

需求可拆分校车路径问题的元启发式算法

陈小潘^{1,2} 孔云峰¹ 郑泰皓³ 郑珊珊²

(河南大学黄河中下游数字地理技术教育部重点实验室 开封 475004)¹

(河南大学计算机与信息工程学院 开封 475004)² (河南大学民生学院 开封 475004)³

摘 要 校车路径规划中,允许站点乘车需求拆分通常能有效地降低校车服务成本。将该问题定义为需求可拆分校车路径问题(SDSBRP)进行求解。由于校车服务中要顾及学生最大乘车时间,且优化目标要兼顾所需校车数量和校车行驶距离,经典 SDVRP 算法难以直接应用于 SDSBRP。因此分析了该问题的解特征,首次构建双目标 SDSBRP 数学模型,并首次设计针对该问题的元启发式求解算法。该算法首先构造初始可行解,然后在模拟退火算法框架下,引入站点需求拆分的邻域搜索算子进行迭代搜索,逐步改善解的质量。邻域搜索中,设计了多目标问题的邻域接受准则来引导邻域解的搜索方向,并引入破坏重建机制来增加解的多样性。使用已有的测试案例集和改造的测试案例进行算法测试,实验结果表明所提算法收敛性好,能够显著降低校车服务成本。

关键词 校车路径问题,需求拆分,元启发式算法,模拟退火

中图法分类号 TP301.6 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.10.045

Metaheuristic Algorithm for Split Demand School Bus Routing Problem

CHEN Xiao-pan^{1,2} KONG Yun-feng¹ ZHENG Tai-hao³ ZHENG Shan-shan²

(Key Laboratory of Geospatial Technology for Middle and Lower Yellow River Regions of Ministry of Education,
Henan University, Kaifeng 475004, China)¹

(College of Computer and Information Engineering, Henan University, Kaifeng 475004, China)²

(Minsheng College, Henan University, Kaifeng 475004, China)³

Abstract In school bus route planning for middle and elementary schools, the total cost of school bus service may be reduced if the travel demands of each bus stop can be split and served by several buses. This paper dealt with the split demand school bus routing problem (SDSBRP). Compared with the split delivery vehicle routing problem (SDVRP), the students' maximum riding time should be considered in SDSBRP. Moreover, the objectives of SDSBRP are minimizing the total number of buses and the total traveling distance. Thus, the methods and strategies for solving classic SDVRP cannot be applied to SDSBRP directly. This paper, for the first time, analyzed the solution properties of SDSBRP, introduced a mathematic formulation for bi-objective SDSBRP, and proposed a metaheuristic algorithm for it. In the algorithm, an initial feasible solution is generated by constructive heuristic. Then, the solution is improved iteratively by neighborhood operators either with or without demand splitting. In addition, a new acceptance criterion and a ruin and recreate mechanism are used to improve the diversity of solutions. For avoiding local optimum, some worsening neighborhood solutions with longer distance can be accepted with a certain probability according to the simulated annealing rule. The efficiency of the proposed algorithm is benchmarked and confirmed by extensive computational experiments. The savings generated from splitting demands are also discussed.

Keywords School bus routing problem, Split deliveries, Metaheuristic algorithm, Simulated annealing

1 引言

校车路径问题(SBRP)由 Newton 等^[1]于 1969 年提出,主要为一个校车车队规划路线,使校车沿路线将学生送至学校或放学时送回乘车站点,并使特定的目标达到最优。SBRP 涉及学生分布、学校分布、道路交通网络和校车车队等组成元

素,路径方案要满足校车容量、学生乘车时间等约束条件,优化目标包括校车服务的成本、质量和公平性,属于离散组合优化领域的 NP-hard 问题^[2,3]。相关的模型、算法和应用一直是离散组合优化领域关注的热点之一^[4]。

需求可拆分的校车路径问题(Split Demand School Bus Routing Problem, SDSBRP)允许同一站点乘车的学生由多辆

到稿日期:2015-08-19 返修日期:2015-11-23 本文受国家自然科学基金青年科学基金项目(41401461,41571417)资助。

陈小潘(1982—),男,博士生,讲师,主要研究方向为空间分析与优化,E-mail: xpcen@henu.edu.cn;孔云峰(1967—),男,博士,博士生导师,主要研究方向为空间分析与应用、GIS 分析与设计,E-mail: yfkong@henu.edu.cn(通信作者);郑泰皓(1989—),男,硕士,主要研究方向为智能算法,E-mail: zth324@qq.com;郑珊珊(1981—),女,讲师,主要研究方向为图像处理,E-mail: zhshsh@henu.edu.cn。

校车服务,是 SBRP 的一个子问题。在我国,中小学校学生乘车站点一般设置在居住社区附近,因人口居住密度大,站点乘车的学生通常较多,探讨 SDSBRP 具有现实意义。在校车路径规划实践中,允许学生站点需求拆分,通常能够提高校车的满载率,减少所需校车数量,也有可能缩短校车运营里程,进而节约校车服务成本。然而,目前关于 SBRP 的研究绝大多数针对需求不拆分的情形,即每个学生站点的所有学生必须且只能由一辆校车提供服务,极少关注站点可以由多辆校车服务的情形。鉴于此,本文考虑校车容量和学生最大乘车时间等约束条件,以最小化校车数量和校车行驶距离为优化目标,进行 SDSBRP 问题建模和元启发式算法设计。在分析 SDSBRP 解特征的基础上,算法有针对性地引入需求可拆分邻域搜索算子和若干邻域搜索策略,在模拟退火框架中进行问题求解。案例测试表明本算法收敛性好,计算时间较短,且显著降低了校车服务成本。

2 相关研究

SDSBRP 本质上属于需求可拆分的车辆路径问题(Split Delivery Vehicle Routing Problem, SDVRP)。SDVRP 最早由 Dror 和 Trudeau 提出,是 NP-hard 问题^[5,6]。现有 SDVRP 研究证明:与需求不拆分相比,通过需求拆分能够进一步缩短车辆运行距离并减少所需车辆的数量^[5],尤其在大部分客户需求量略大于车辆最大装载量 1/2 的情形下成本节约显著^[7]。

SDVRP 求解算法主要分为精确算法和启发式算法。由于其 NP-hard 性质,精确算法能求解问题的规模有限,目前仅能够在最多 30 个客户点的对称 SDVRP 上获取最优解^[8]。因此,启发式算法是求解 SDVRP 的主要手段,力图在合理的时间范围内获得一个较高质量的可行解。

多数 SDVRP 算法以车辆行驶距离为优化目标。针对距离目标,Frizzell 等设计了基于客户点移动和交换的构造启发式算法^[9]。Silva 等^[8]设计了多启动的随机变邻域下降搜索算法,算法采用 10 个搜索算子,引入一个称为 Multiple- k -Split 的扰动机制提高解的多样性。Archetti 等^[10]提出了一个禁忌算法,主要通过客户点的移除和插入实现。Berbotto 等^[11]采用随机粒度邻域的禁忌算法,采用了 7 个邻域算子;每次迭代过程中,所有算子均获取一定数量的邻域解,然后随机选择其中一个算子的最好解作为当前解;搜索过程中允许产生违背一定容量约束的邻域解,避免搜索陷入局部最优。刘旺盛等^[12]首先对客户进行聚类,聚类的过程中对客户的需求进行拆分,然后对每个聚类求解 TSP 路径。孟凡超等^[13]利用禁忌搜索进行求解,主要采用插入法和交换法获取邻域解。以上算法仅考虑了车辆容量约束,优化目标是最小化车辆行驶距离,主要利用已有求解 VRP 的算法框架,通过引入需求拆分算子进行求解。

针对最小化车辆数量和最小化车辆行驶距离的多目标的 SDVRP, Ho 等^[14]设计了一个带有禁忌策略的两阶段算法,第一阶段进行站点交换,第二阶段通过引入和消除拆分对解进行改进;通过给予不同目标不同的权重获取目标值,判断是否接受邻域解。Belfiore 等^[15,16]针对多车型 SDVRP 设计了分散搜索(Scatter Search)算法;在构造初始解的基础上,对路径进行优化,包括路径内交换、需求重分配、路径消除和合并、

单点移动及路径增加(Route Addition)等进行求解,但算法没有阐述两个目标的处理策略。

与 SDVRP 相比,针对 SDSBRP 的研究极少,目前仅有 2 篇相关文献。Thangiah 等^[17]针对残疾学生需要由特定校车的服务的 SBRP 问题,设计了构造启发式算法;算法在获取初始解的基础上,在路径内使用 1-opt 和 2-opt、路径间采用学生交换以及站点交换、移动和路径合并来进一步优化改进。金燕波^[18]针对单校校车路径问题设计了构造式求解算法,求解过程中当某个站点的学生不能由一辆校车服务时拆分该站点的学生乘车需求;算法不包含启发式改进策略,不能保证获取较优解,此外其研究的问题中校车在站点的服务时间固定。

总体上,现有 SDVRP 算法主要集中在同车型、站点无时间窗约束的单目标优化问题,而以车辆数量和行驶距离为优化目标的算法涉及较少;带时间窗的 SDVRP 也大多没有考虑车辆在站点服务时间与在站点集货或者卸货数量的关系。与经典 SDVRP 相比,SDSBRP 中存在学生最大乘车时间约束,而且校车在站点的服务时间与服务学生的人数相关,精确求解难度增大。以校车数量和校车行驶距离为优化目标,使得已有求解 SDVRP 的算法和策略无法直接应用于 SDSBRP 的求解,探讨求解双目标 SDSBRP 的元启发式算法仍是 SBRP 领域的一个难点问题。

3 问题描述及数学模型

校车路径问题主要由站点(含场站、学校)、车队、道路交通网络、优化目标等元素构成。

站点:定义学生乘车站点集合 $D=\{1,2,3,\dots,n\}$,其分布在 n 个不同的位置,站点 i 有 d_i 个学生乘车。每个站点的学生可以由多辆校车来服务,但必须保证所有学生均能得到校车服务。站点 0 代表场站,集合 V 表示学生乘车站点和场站的集合, $V=D\cup\{0\}$ 。场站的位置可以根据实际情况来确定,如专门的停车场或学校。校车 k 在每个乘车站点的服务时间 T_{ik} 与在该站点上车的学生人数 Y_{ik} 有关,本文令 $T_{ik}=19+2.6*Y_{ik}$ (单位:s);校车在场站的服务时间等于 0,即 $T_{0k}=0$ 。

车队:服务学校的校车集合用 M 表示,校车 $k(k\in M)$ 的容量为 Q_k ,校车不能超载。校车初始均停靠站点 0。

学校:学校用 s 表示,要求服务学校的校车必须在时间窗 $[e(s),l(s)]$ 到达学校。集合 $P=D\cup s$,表示学生站点和学校的集合。

道路交通网络:道路交通网络是连接各个站点和学校之间的交通网络,借助于道路交通网络可以计算出校车在任意两个站点 i 和 j 间的运行距离 d_{ij} 和时间 t_{ij} 。

优化目标:以最小化校车数量为首要目标,最小化校车行驶距离为第二目标。为保证校车服务的公平性,限定所有学生的乘车时间不超过一个固定的值 $T_{\max}$ 。

表 1 列出了定义需求可拆分的单校校车路径问题数学模型所用到的相关参数和决策变量。

根据问题定义,服务某条校车路线的校车仅需在 $[e(s),l(s)]$ 到达学校即可,属于一个时间范围。因此,在构造模型时不考虑学校时间窗约束。根据模型获取精确解之后再根据学校时间窗对解进行重构,进而确定校车到达每个站点的时间。以最小化校车数量和校车行驶距离为优化目标的 SDS-

BRP 整形规划数学模型定义如下。

Minimize $M_0 \sum_{j \in D} \sum_{k \in M} x_{0jk} + \sum_{i \in V} \sum_{j \in P} \sum_{k \in M} d_{ij} X_{ijk}$
(1)

Subject to $\sum_{i \in V} \sum_{k \in M} X_{ijk} \geq 1, \forall j \in D$
(2)

$\sum_{i \in V} X_{iuk} - \sum_{j \in P} X_{ujk} = 0, \forall u \in D, k \in M$
(3)

$\sum_{k \in M} Y_{ik} = d_i, \forall i \in D$
(4)

$\sum_{i \in D} Y_{ik} \leq Q_k, \forall k \in M$
(5)

$Z_{ik} \leq T_{\max}, \forall i \in D, k \in M$
(6)

$Z_{jk} + t_{ij} + 19 + 2.6 * Y_{jk} - Z_{ik} \leq M_2(1 - X_{ijk}),$
 $\forall i \in D, j \in P; k \in M$
(7)

$Y_{ik} \leq d_i \sum_{j \in P} X_{ijk}, \forall k \in M, i \in D$
(8)

$Y_{ik} \geq \sum_{j \in P} X_{ijk}, \forall k \in M, i \in D$
(9)

$\sum_{k \in M} \sum_{j \in D} X_{0jk} \leq 1$
(10)

$X_{ijk} = \{0, 1\}, i \in V, j \in P | i \neq j, k \in M$
(11)

$Y_{ik} = \{0, 1, 2, \dots\}, \forall i \in V, k \in M$
(12)

$Z_{ik} = \{0, 1, 2, \dots\}, \forall i \in V, k \in M$
(13)

式(1)表示优化目标为校车数量和校车行驶距离。约束(2)限定每一个学生站点都必须有校车访问,并且至少被访问一次。约束(3)保证若校车 k 访问某一个学生站点,则校车必须离开该站点。约束(4)表示在站点 i 的学生必须都能得到校车服务。约束(5)表示每辆校车不能超载。约束(6)为学生的最大乘车时间约束。约束(7)表示校车路径中两个连续站点校车行驶时间的关系。约束(8)和(9)表示当校车 k 经过站点 i 时,站点 i 才能由校车 k 服务,此时 $0 < Y_{ik} \leq d_i$;若校车 k 不经过站点 i ,则必有 $Y_{ik} = 0$,反之亦然。约束(10)表示每辆校车最多只能离开场站一次。约束(11)–(13)表示决策变量的取值范围。

表 1 单校 SDSBRP 数学模型中的参数和决策变量

参数	含义
D	学生乘车站点 $D = \{1, 2, 3, \dots, n\}$
d_i	站点 i 的学生人数, $i \in D$
V	场站和学生站点集合, $V = D \cup 0$
s	学校
$e(s), l(s)$	学校的时间窗, $e(s) \leq l(s)$
P	$P = D \cup s$, 表示学生站点和学校的集合
M	校车集合
Q_k	Q_k 为校车 k 的最大容量 ($k \in M$)
d_{ij}	校车从站点 i 到 j 的行驶距离, 由站点坐标计算, 或者由道路交通网络的最短距离获得, $i, j \in V \cup s i \neq j$
t_{ij}	校车从站点 i 到站点 j 的行驶时间, $i, j \in V \cup s i \neq j$
决策变量	
X_{ijk}	校车 k 访问站点 i 后直接访问站点 j , 则 $X_{ijk} = 1$; 否则 $X_{ijk} = 0$, $i \in V, j \in P i \neq j, k \in M$
Y_{ik}	站点 i 由车辆 k 服务的学生人数, $i \in D, k \in M$
Z_{ik}	校车 k 离开站点 i 的时间, Z_{ik} 按照校车行驶顺序的逆序计算, $i, j \in V \cup s, Z_{sk} = 0 (k \in M)$

4 解特征分析

经典的 SDVRP 存在若干基本特征。1)SDVRP 中站点需求量为整数且车辆容量为 2 时,可以在多项时间内获得最优解;但当车辆容量大于 2 时,该问题的计算复杂度为 NP-hard^[10,19]。2)需求拆分带来的成本节约不超过需求不拆分的 VRP 成本的一半^[10]。3)站点客户需求量与车辆容量比值是影响 SDVRP 成本的主要因素^[10];当站点平均需求略大于车辆容量一半,且需求差异较小时,SDVRP 成本节约最显著^[7]。

这些特征表明:SDSBRP 具有节约成本的潜力,但数学精确求解困难。

SDVRP 最优解的其他几个基本特征建立在 k -split cycle 定义的基础上。

定义 1 给定一个客户点集合 $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$, 存在 k 条路径 $r_1, r_2, \dots, r_k, k \geq 2$ 。若 r_w 包含站点 c_w 和 c_{w+1} , $w = 1, 2, \dots, k-1$, 且 r_k 包含站点 c_1 和 c_k , 则称客户点子集 $\{c_i\}_{i=1}^k$ 为一个 k -split cycle。

定理 1 若 SDVRP 存在可行解,且客户点之间的距离关系符合三角不等式,则总存在一个最优解,该最优解不包含 k -split cycle^[5,6], 其中 $k \geq 2$ 。

推论 1 如果 SDVRP 存在可行解,且点与点之间的距离关系符合三角形不等式,则在该问题的最优解的任意 2 条路线中最多只存在 1 个共同拆分点。该推论等价于:若 SDVRP 客户点之间的距离关系符合三角不等式,则存在一个最优解,该解中两个客户点之间的边至多被经过一次^[6]。

文献[14]证明了推论 1 也适用于带时间窗的 SDVRP。

定理 2 如果 SDVRP 存在可行解,且点与点之间的距离关系符合三角形不等式,则在该问题最优解中客户点的拆分次数小于路径数^[12,20]。

定理 3 如果 SVD RP 存在可行解,且点与点之间的距离关系符合三角形不等式,则当客户需求等于车辆最大运载能力时,该问题优化解中的这类站点应单独满足,不宜拆分^[12]。

分析 SDSBRP 的约束条件,可知定理 1 及推论 1、定理 2 也适合于 SDSBRP,这些定理和推论为设计 SDSBRP 求解算法提供了参考。然而,由于约束条件和优化目标与 SDVRP 的差异,定理 3 不适用于有最大乘车时间约束的 SDSBRP,具体分析如下。

SDVRP 和 SDSBRP 的主要优化目标包括车辆数量和车辆行驶距离,约束条件主要有车辆容量和最大运输时间(或学生的最大乘车时间)。图 1 是校车路径问题的一个示意图。假设校车容量为 66,学生的最大乘车时间为 16min。图 1 中 $t_{01} = 10, t_{02} = 10, t_{03} = 10, t_{1s} = 10, t_{12} = 8, t_{2s} = 8, t_{13} = 12, t_{32} = 8, t_{3s} = 11$, 分别表示校车在两个站点之间的运行时间(单位:min)。图 1 中“1(30)”表示站点的编号为 1,站点的学生乘车人数为 30。该案例中站点 2 的学生人数等于校车容量。

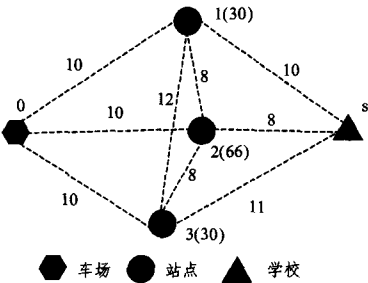


图 1 SBRP 案例示意图

图 2—图 4 是图 1 对应的 3 个可能路径规划方案,在不考虑学生最大乘车时间时,3 个路径方案均可行,方案 1(2 辆校车,车辆旅行时间为 50min)是最好方案,此时定理 3 成立。然而,考虑学生最大乘车时间时,方案 1 不可行,方案 3(2 辆校车,旅行时间为 52min)优于方案 2(3 辆车,旅行时间为 59min)。拆分站点 2 的乘车需求不仅能减少所需车辆旅行时间,而且能减少所需校车的数量。

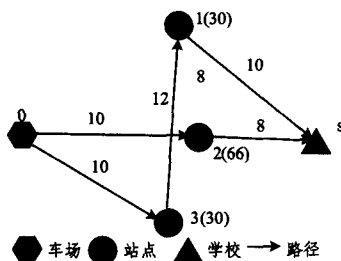


图2 路径方案1

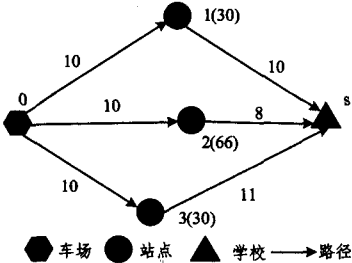


图3 路径方案2

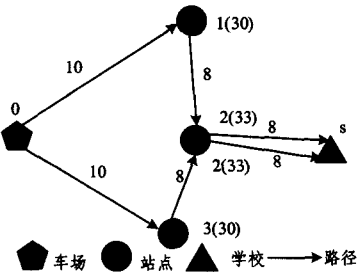


图4 路径方案3

综上,在仅存在容量约束时,不拆分站点需求等于车辆容量的站点能够获取较优解;引入最大乘车时间约束后,拆分站点需求等于车辆容量的站点能够获取较优解。因此,本文设计的 SDSBRP 求解算法中允许需求等于校车容量站点拆分。

5 算法设计

5.1 算法框架

本文在模拟退火算法框架下,基于邻域搜索算子,设计了求解双目标 SDSBRP 的元启发式算法。算法的基本步骤为数据读取、初始解构造、元启发迭代优化、结果输出。基本框架如算法1所示。

算法1 基本框架

1. DataInput();
2. $S = \text{BuildInitialSolution}()$;
3. $S_{\text{best}} = \text{Optimization_Split_SA}(S)$;
4. OutputSolution(S_{best});

构造初始解时,每次均选择离学校最远且未被访问的站点作为路径的第一个站点;然后在满足各种约束条件下将未被访问的、距离当前路径最近的站点添加到当前路径中,直至无法加入更多的站点到当前路径中,则一条路径构造完成;之后开始新路径构造。重复以上过程,直至所有站点均被访问则初始解构造完成。

Optimization_Split_SA(S)是整个求解算法的核心部分,主要采用允许拆分和不允许拆分的局部搜索算子搜索邻域解。算法的关键代码如算法2所示。

算法2 Optimization_Split_SA(S)

输入:SDSBRP的一个当前解 S ,初始温度 t_0 ,冷却率 α ,迭代次数 maxloop ,最优解允许不提高的最大次数 max_noimprovement

1. $t = t_0$;
2. $S_{\text{best}} = S$;
3. $\text{noimprovement} = 0$;
4. for($i = 1; i \leq \text{maxloop}; i++$){
5. $S_1 = \text{OPM}(S)$;
6. $S_2 = \text{TPM}(S_1)$;
7. $S_3 = \text{OPSM}(S_2)$;
8. $S = \text{SPM}(S_3)$;
9. if($f(S) < f(S_{\text{best}})$)
10. $\text{noimprovement} = 0$;
11. else
12. $\text{noimprovement}++$;
13. if($\text{noimprovement} > \text{max_noimprovement}$) {
14. $S = \text{route_ruin_and_recreate}(S_{\text{best}})$;
15. $\text{noimprovement} = 0$;
16. }
17. $t = \alpha \times t$;
18. }
19. $S_{\text{best}} = \text{MergeCommonStops}(S_{\text{best}})$

输出:最优解 S_{best}

算法2中第1行设定模拟退火的初始温度。第3—18行是迭代优化过程。第4—8行分别执行单点移动(OPM)、两点移动(TPM)、单点拆分移动(OPSM)、点对交换(SPM)的局部搜索,并根据接受规则更新当前解和最优解。第9—12行根据目标函数 $f(S)$ 更新最优解没有提高的次数 noimprovement 。第13—16行表示经过若干次迭代优化,最优解没有提高的次数大于 max_noimprovement 时,对当前最优解执行路径的“破坏重建”获取一个新的解,使迭代优化从一个新产生的解开始继续优化。通过“破坏重建”能够增加邻域解的多样性,利于发现最优解。第19行则尝试将两条路径上共同的拆分点合并到其中一条路径上。

算法2依次使用4个局部搜索算子:单点移动、两点移动、单点拆分移动、点对交换。基本过程是:针对每一个站点构造邻域搜索空间,当邻域解满足约束条件且目标值优于当前解或满足模拟退火接受条件时更新当前解。以单点移动搜索说明这4个算子的执行过程。

算法3 OPM(S)

输入:SDSBRP的当前解 S

1. foreach (p in NodeList){
2. $Nlist = \text{OPM_neighborhood}(S, p)$;
3. foreach (p^* in Nlist) {
4. if ($\text{Evaluate}(S, p, p^*) == \text{false}$) continue;
5. $\text{sol}^* = \text{OPM_neighborhood_solution}(p, p^*)$;
6. $\text{RemoveNodeCopy}(\text{sol}^*)$;
7. $\text{Eliminateshare}(\text{sol}^*)$;
8. if ($\text{is_better_sa}(S, \text{sol}^*)$)
9. $S = \text{sol}^*$;
10. if ($\text{is_better}(S, \text{sol}_{\text{best}})$)
11. $\text{sol}_{\text{best}} = \text{sol}^*$;
12. }
13. }

输出:解 S

算法3针对每个站点执行单点移动搜索。第1行的 NodeList 代表学生站点列表,第2行构造站点 p 的邻域列表

$Nlist$ 。第3—12行针对 p 和 p 的邻域点 p^* 进行单点移动, 尝试将 p 移动到 p^* 之前或之后。第4行评估移动是否可行, 若不可行则判断 p 的下一个邻域点。第5行获取对应的邻域解。第6行消除某个站点在一条路径上出现多次的情况。第7行使用算子 $Eliminateshare$ 消除两条路径上共同的拆分点, 使两条路径至多有一个共同拆分点。第8和第9行表示基于模拟退火和相应的邻域接受规则判断是否用邻域解 sol^* 更新当前解 S 。第10和第11行表示根据优化目标判断是否更新当前最优解 sol_{best} 。

算法中的4个邻域搜索算子均属于小邻域算子, 算子操作对解的影响都是一个较小的局部影响, 搜索易陷入局部最优。本文算法采用模拟退火规则接受一定的使路径长度变差的解, 增加算法跳出局部最优解的机会。此外, 鉴于局部搜索算法改进一个解的最简单方法是从另一个新的位置开始搜索^[21]。因此, 当基于模拟退火的邻域搜索仍不能改进全局解时, 本文算法进一步利用“破坏重建”(ruin and recreate)对当前最优解进行扰动。“破坏重建”方法由 Schimpf 等^[22]提出, 主要思想是首先对当前解进行适当的破坏, 然后采用不同的重建算法将破坏后部分进行修复。通过破坏重建能得到当前解的一个更大的邻域, 有助于跳出局部最优。从当前解中删除的部分一般可以占整个解的1%~20%^[23], 本文选取总路径数的1/5进行操作。“破坏重建”过程如下: 首先随机选择一部分路径, 然后将路径上的站点从当前解中删除, 得到一个不完整解; 最后采用最节省的插入算法将删除的站点与不完整解一起重新构造一个新的完整解。

5.2 邻域算子设计

邻域算子是局部搜索算法的关键, 影响着算法的性能。本文所采用的算子主要包括两类: 1) 经典的 VRP 算子, 不允许站点需求拆分; 2) 针对需求拆分问题的邻域算子。邻域算子产生的邻域解必须是一个可行解, 满足问题的各种约束条件。

采用的经典 VRP 邻域算子包括:

(1) $Swap(1, 0)$: 单点移动, 将一个站点移动到相同路径或者不同路径上的另一个位置。

(2) $Swap(1, 1)$: 交换两个站点的位置, 交换操作既可以在同一路径内也可以在不同路径之间。

(3) $Swap(2, 1)$: 将一条路径上两个连续的站点 i 和 j 与另一路径上的站点 k 进行交换, 交换操作既可以在同一路径内也可以在不同路径之间。

站点需求拆分邻域算子包括:

(1) $Swap(1, 0)^*$: 允许站点乘车需求拆分的单点移动。将一个站点 i 从路径 r_i 移动到另一路径 r_j 时: 1) 若 r_j 的剩余容量大于或等于路径 r_i 上站点 i 的需求, 则尝试直接将 i 移至路径 r_j 上的合适位置, 如图 5(b) 所示; 2) 若 r_j 的剩余容量小于站点 i 的需求, 则对站点 i 拆分, 移动至路径 r_j 上 i 的需求等于路径 r_j 的剩余容量, 剩余的需求仍由 r_i 来服务, 如图 5(c) 所示。 $Swap(1, 0)^*$ 的目的在于通过拆分, 使操作所涉及的两条路径中的其中一条尽量满载。单点拆分算子是需求拆分的主要算子, 以下3个与拆分相关的算子是辅助算子, 对解进行优化。

(2) $Eliminateshare$ 算子: 根据推论1, 本文设计了邻域算子 $Eliminateshare$ 来消除任意两条路径的共同站点。假设 $i, j \in r_i \cap r_j$, 则尝试将站点 i (或 j) 从 r_i (或 r_j) 中删除, 然后将其

合并到 r_j (或 r_i) 的站点 i (或 j) 上, 从而实现从两条路径上删除一个共同的拆分点。 $Eliminateshare$ 算子操作前后分别如图 6(a) 和图 6(b) 所示。

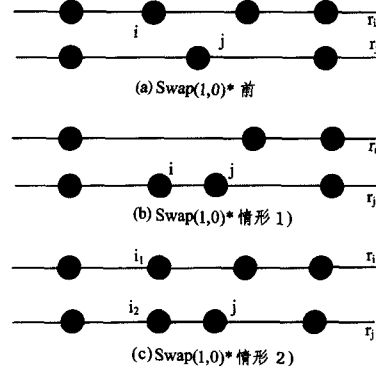


图5 $Swap(1, 0)^*$ 操作算子

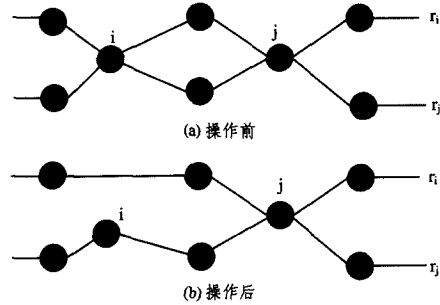


图6 $Eliminateshare$ 算子

(3) $RemoveNodeCopy$ 算子: 站点移动时可能导致将一个站点 i 插入到其他已经访问站点 i 的路径中, 使得一辆校车在一条路线上多次访问同一个站点, 因此通过 $RemoveNodeCopy$ 操作来消除该类站点, 缩短路径长度。

(4) $MergeCommonStops$ 算子: 尝试在不改变其他站点的前提下, 将位于不同路径但属于同一站点的拆分点合并到其中一条路径, 进一步缩短路径总长度。

5.3 邻域解接受准则

校车路径规划通常有两个目标, 即最小化校车数量和最小化校车行驶距离。若单纯考虑这两个优化目标, 会导致搜索向着较小行驶距离的解发展, 校车数量的减少仅作为距离优化的副作用^[24, 25]。Archetti 等^[7]指出由需求拆分带来的运输成本的下降主要是由所需车辆数目的减少所产生的, 原因在于车辆数量的减少使得需要更小的车队规模。而且通常认为与行驶距离产生的成本相比, 校车数量的减少能够带来更大的成本节省。因此优化时以最小化校车路径数量为首要目标, 最小化校车行驶总距离为次要目标。在通过每个局部搜索算子操作获取一个邻域解之后, 根据优化目标来判断是否接受邻域解。本文采用 First-Accept 接受策略, 即使用搜索过程中遇到第一个优于当前解的邻域解来更新当前解。

在需求拆分的情形下, 若缺乏引导则会导致站点频繁拆分, 站点在路径之间往复移动, 但并不一定使解得到改善。因此本文引入一个辅助目标 F , 其定义如式(14)所示。式(14)中邻域解对应移动涉及的两条路径分别为 r_i 和 r_j , 邻域算子操作后的路径为 r_i' 和 r_j' , $load(r_i)$ 表示路径 r_i 上的学生人数。

$$F = |load(r_i') - load(r_j')| - |load(r_i) - load(r_j)| \quad (14)$$

若 F 大于 0,表明邻域解向着一条路径满载、另一条路径人数变少的方向发展,此时接受邻域解;否则表明解的结构变差,不接受该邻域解。辅助目标 F 引导搜索算子删除路径,减少所需校车数量。

综上分析,本文算法判断是否接受邻域解的规则如下:首先判断路径数量,然后判断目标 F ,最后判断路径长度。为避免搜索陷入局部最优,在进行路径长度判断时采用模拟退火规则,允许接受部分使路径长度增加的解。

6 实验验证

算法基于 Visual studio 2010 环境下 C++ 开发,在硬件配置为 Intel(R) Core(TM) i7-4790 3.60GHz,8GB 内存的 PC 机上进行测试。鉴于不同案例中站点的数量不同,经过测试,最终选取算法的迭代循环次数 $maxloop=700$,模拟退火的初始温度 $t_0=0.1/n$ (n 为学生站点数),温度下降系数 $\alpha=0.993$,最优解允许不提高的最大次数 $max_noimprovement=10$ 。

6.1 案例数据

Park 等^[26]构建了 SBRP 领域首个公开的基准测试案例集,包括 RSRB 和 CSCB 两类案例集。每个案例集中包含若干所学校及对应的站点。RSRB 案例集中学校和乘车站点的分布是随机的,CSCB 案例集中学校和乘车点则分别相对集中地分布在若干个聚积区。测试案例的基本情况如表 2 所列,平均每个案例集有 13.75 所学校。

表 2 测试案例集基本情况

案例集	学校个数	站点个数	学生人数
RSRB01	6	250	3409
RSRB02	12	250	3670
RSRB03	12	500	6794
RSRB04	25	500	6805
CSCB01	6	250	3907
CSCB02	12	250	3204
CSCB03	12	500	6813
CSCB04	25	500	7541

表 3 RSRB 案例集需求拆分测试结果

案例集	N_{best}	N_{ave}	$N_{dev}(\%)$	D_{best}	D_{ave}	$D_{dev}(\%)$	N_{split}	$T_{ave}(s)$
RSRB01_2700	59	59.00	0.00	8779490.98	8787647.78	0.09	18	4.14
RSRB02_2700	72	72.00	0.00	12620749.46	12640198.46	0.15	20	2.10
RSRB03_2700	122	125.20	0.63	19017020.90	19294894.13	0.20	44	8.42
RSRB04_2700	153	153.90	0.21	23761246.61	23807459.33	0.06	31	3.82
RSRB01_5400	55	55.00	0.00	7924434.88	7957323.28	0.25	22	5.33
RSRB02_5400	60	60.00	0.00	10741827.35	10833534.16	0.41	23	2.43
RSRB03_5400	111	111.00	0.00	16729329.24	16834613.65	0.21	39	11.06
RSRB04_5400	119	119	0.00	18884413.7	18949551.48	0.14	30	4.99
平均	93.88	94.39	0.10	14819396.24	14888152.78	0.19	28.25	5.28

从表 3 和表 4 可以看出,针对最大乘车时间是 2700s 和 5400s 的 RSRB01—RSRB04 案例集,若不允许站点需求的拆分共需要校车 771 辆,需求拆分后需要 751 辆,平均节约 2.24% 的校车;校车的行驶距离节约 2.40%。平均每个 RSRB 案例集中站点拆分数为 28.25,每所学校对应案例的平均求解时间为 0.38s。

从表 5 和表 6 可以看出,针对最大乘车时间是 2700s 和 5400s 的 CSCB01—CSCB04 案例集,如果不允许站点需求的拆分共需要校车 847 辆,需求拆分后需要 824 辆,平均节约 2.72% 的校车;校车的行驶距离节约 2.69%。平均每个 CSCB 案例集中站点拆分数为 27.38,每所学校对应案例的平

假定场站位于坐标(105600,105600)处,校车容量设定为 66,站点的学生人数为 1~66 不等。学生最大乘车时间分别设置为 2700s 和 5400s,车辆的平均行驶速度为 32.2km/h。校车在站点的服务时间的计算参考文献[26,27]:如果站点 i 为学生乘车站点,则校车在该站点 i 的服务时间为 $19.0+2.6Y_i$, Y_i 为在站点 i 上车的学生数,单位均为秒(s)。实验中站点间的距离 d_{ij} 使用曼哈顿距离($|x_i-x_j|+|y_i-y_j|$),而行驶时间 t_{ij} 则由 d_{ij} 除以车辆的平均速度计算得到。

为进一步衡量算法的性能以及站点拆分带来的成本节约,基于文献[26]的案例 CSCB01 和 RSRB01 中的站点位置,按照式(15)生成站点学生的乘车人数,形成新的测试案例。

$$d_i=\alpha Q+\delta(\gamma-\alpha)Q \tag{15}$$

其中,随机数 $\delta\in[0,1]$, d_i 位于 $[\alpha Q,\gamma Q]$ 之间。令 $(\alpha,\gamma)=(0.01,0.1),(0.1,0.3),(0.1,0.5),(0.1,0.9),(0.3,0.7)$ 和 $(0.7,0.9)$ 产生案例,并分别在案例名称中用 A,B,C,D,E,F 予以区别。

6.2 测试结果与分析

鉴于模拟退火算法的随机性,算法在测试案例集上运行 10 次,获取案例集的最好解、平均解以及平均计算时间 T_{ave} 。为衡量站点乘车需求拆分算法的效果,在本文设计的需求拆分的算法框架下,设计了需求不拆分的校车路径规划算法,算法主要采用 OPM,TPM 和 SPM 等搜索算子。

表 3—表 8 给出了计算结果,列“案例集”中的 2700 和 5400 分别表示学生的最大乘车时间为 2700s 和 5400s。表中 N_{best} 和 D_{best} 分别表示从 10 次运行获取的最好解所对应的校车数量和校车行驶距离, N_{ave} 和 D_{ave} 分别表示 10 次运行获取的校车数量和校车行驶距离的均值, N_{dev} 和 D_{dev} 表示标准差与平均值的百分比。 N_{gap} 和 D_{gap} 表示与不拆分的情形相比,最好解对应的校车数量和行驶距离节约的百分比,负值表示减少,正值表示增加。 N_{split} 表示获取的最好解中学生乘车站点的拆分次数。

均求解时间为 0.46s。

表 4 RSRB 案例集需求拆分与不拆分比较

案例集	不拆分		拆分改进	
	N_{best}	D_{best}	$N_{gap}(\%)$	$D_{gap}(\%)$
RSRB01_2700	59	8837323.50	0.00	-0.65
RSRB02_2700	76	13192786.41	-5.26	-4.34
RSRB03_2700	130	19863116.20	-6.15	-4.26
RSRB04_2700	158	24422793.19	-3.16	-2.71
RSRB01_5400	55	8004985.06	0.00	-1.01
RSRB02_5400	61	10996938.71	-1.64	-2.32
RSRB03_5400	112	16955723.18	-0.89	-1.34
RSRB04_5400	120	19383434.60	-0.83	-2.57
平均	96.38	15207137.61	-2.24	-2.40

表5 CSCB 案例集需求拆分测试结果

案例集	N _{best}	N _{ave}	N _{dev} (%)	D _{best}	D _{ave}	D _{dev} (%)	N _{split}	T _{ave} (s)
CSCB01_2700	66	66.10	0.48	9938425.34	9986155.058	0.48	27	6.26
CSCB02_2700	74	75.30	0.89	11571740.10	11715916.94	0.63	11	3.52
CSCB03_2700	145	145.30	0.46	21339259.16	21447368.81	0.36	28	8.81
CSCB04_2700	185	185.00	0.00	28885576.38	28904840.58	0.05	30	4.33
CSCB01_5400	63	63.00	0.00	9269633.93	9290864.37	0.19	22	7.47
CSCB02_5400	56	56.00	0.00	9156679.30	9245053.70	0.52	22	4.42
CSCB03_5400	109	109.00	0.00	16874916.86	17038822.80	0.26	46	10.77
CSCB04_5400	126	126.00	0.00	21421419.50	21561002.00	0.18	33	5.47
平均	103.00	103.21	0.23	16057206.32	16148753.03	0.33	27.38	6.38

从表4和表6可以看出,在学生最大乘车时间是5400s时,通过拆分所带来的校车数量和校车行驶距离的节约低于最大乘车时间是2700s的情形。原因在于后者对校车路径约束较为宽松,站点不拆分时校车满载率已经较高,不易通过拆分进一步减少成本。因此,校车路径规划中,学生乘车时间约束越紧,站点拆分带来的成本节约相对越高。

表7和表8是CSCB01随机需求案例集的拆分结果及与不拆分情形的对比。与站点需求不拆分相比,站点拆分平均节约了7.90%的校车和6.54%的行驶距离,平均每个RSRB案例集中站点拆分数为12.39,每所学校对应案例的平均求解时间为6.88s。表9和表10是RSRB01随机需求案例集的拆分结果及与不拆分情形的对比。与站点需求不拆分相比,站点拆分平均节约了6.76%的校车和6.48%的行驶距离,平均每个RSRB案例集中站点拆分数为11.99,每所学校对应

案例的平均求解时间为4.01s。总体上,随站点平均学生人数增加,站点拆分所节约的校车数量和行驶距离也进一步增加;学生乘车时间约束较紧时,站点拆分带来的成本节约相对较高。

表6 CSCB 案例集需求拆分与不拆分比较

案例集	不拆分		拆分改进	
	N _{best}	D _{best}	N _{gap} (%)	D _{gap} (%)
CSCB01_2700	68	10218227.00	-2.94	-2.82
CSCB02_2700	76	11861536.10	-2.63	-2.50
CSCB03_2700	153	22095123.00	-5.23	-3.54
CSCB04_2700	192	29931759.08	-3.65	-3.62
CSCB01_5400	64	9411651.78	-1.56	-1.53
CSCB02_5400	57	9245983.50	-1.75	-0.98
CSCB03_5400	110	17225484.56	-0.91	-2.08
CSCB04_5400	127	21916982.58	-0.79	-2.31
平均	105.88	16488343.45	-2.72	-2.69

表7 CSCB01 随机需求案例集拆分测试结果

案例集	N _{best}	N _{dev} (%)	N _{ave}	D _{best}	D _{ave}	D _{dev} (%)	N _{split}	T _{ave} (s)
CSCB01A_2700	46	0.00	46.00	7263114.39	7274311.75	0.04	0	8.86
CSCB01B_2700	61	0.00	61.00	9105453.31	9130487.23	0.16	16	9.50
CSCB01C_2700	82	0.00	82.00	11953816.99	11970012.90	0.06	37	15.61
CSCB01D_2700	134	0.24	134.90	19381895.30	19503342.07	0.21	106	42.83
CSCB01E_2700	132	0.00	132.00	18831618.12	18858975.54	0.05	90	41.49
CSCB01F_2700	206	0.00	206.00	29179484.92	29225988.48	0.05	190	107.88
CSCB01A_5400	19	1.60	19.90	3824754.09	3862817.61	0.27	1	12.75
CSCB01B_5400	53	0.00	53.00	7979150.73	8019419.40	0.16	20	11.44
CSCB01C_5400	80	0.00	80.00	11652849.65	11690154.30	0.10	44	20.24
CSCB01D_5400	133	0.00	133.00	19277290.16	19334097.29	0.11	105	49.78
CSCB01E_5400	132	0.00	132.00	18828502.98	18872292.55	0.08	88	45.59
CSCB01F_5400	206	0.00	206.00	29253764.38	29336326.04	0.14	195	129.29
平均	107.25	0.15	107.16	15544307.92	15589852.10	0.12	74.33	41.27

表8 CSCB01 随机需求案例集拆分与不拆分比较

案例集	站点学生数量		不拆分		拆分改进	
	平均值	方差	N _{best}	D _{best}	N _{gap} (%)	D _{gap} (%)
CSCB01A_2700	4.24	1.73	46	7265362.39	0.00	-0.03
CSCB01B_2700	13.53	3.95	61	9115736.91	0.00	-0.11
CSCB01C_2700	20.36	7.61	84	12296054.66	-2.44	-2.78
CSCB01D_2700	34.42	15.82	152	22003219.58	-13.43	-11.91
CSCB01E_2700	33.90	7.65	148	21235560.02	-12.12	-11.32
CSCB01F_2700	53.47	3.88	250	34965094.13	-21.36	-16.55
CSCB01A_5400	4.24	1.73	20	3854486.69	-5.26	-0.77
CSCB01B_5400	13.53	3.95	55	8168270.23	-3.77	-2.32
CSCB01C_5400	20.36	7.61	80	11730995.79	0.00	-0.67
CSCB01D_5400	34.42	15.82	146	21161861.52	-9.77	-8.91
CSCB01E_5400	33.90	7.65	139	20199131.17	-5.30	-6.79
CSCB01F_5400	53.47	3.88	250	34965094.13	-21.36	-16.33
平均	26.65	6.77	119.25	17246738.94	-7.90	-6.54

表9 RSRB01 随机需求案例集拆分测试结果

案例集	N _{best}	N _{dev} (%)	N _{ave}	D _{best}	D _{ave}	D _{dev} (%)	N _{split}	T _{ave} (s)
RSRB01A_2700	46	0.69	46.10	7157734.96	7184925.11	0.42	0	7.07
RSRB01B_2700	56	0.84	57.30	8411043.94	8550290.21	0.66	23	6.74
RSRB01C_2700	79	0.40	79.10	11028452.70	11058656.40	0.19	47	9.74
RSRB01D_2700	125	0.00	125.00	16529120.60	16559895.56	0.05	97	21.92
RSRB01E_2700	129	0.00	129.00	16981432.32	17029236.24	0.10	86	23.37
RSRB01F_2700	206	0.00	206.00	26409081.12	26491579.37	0.12	183	64.55
RSRB01A_5400	23	2.06	23.30	4434761.30	4483414.13	1.09	0	8.77
RSRB01B_5400	55	0.00	55.00	7854583.18	7905212.37	0.24	19	7.85
RSRB01C_5400	79	0.00	79.00	10734555.58	10775863.77	0.12	52	11.17
RSRB01D_5400	125	0.00	125.00	16445486.62	16504750.86	0.10	89	24.48
RSRB01E_5400	129	0.00	129.00	16915472.76	16981651.90	0.09	84	27.12
RSRB01F_5400	206	0.00	206.00	26440140.30	26543963.72	0.14	183	75.72
平均	104.83	0.33	104.98	14111822.12	14172453.30	0.28	71.92	24.04

表10 RSRB01 随机需求案例集拆分与不拆分比较

案例集	站点学生数量		不拆分		拆分改进	
	平均值	方差	N _{best}	D _{best}	N _{gap} (%)	D _{gap} (%)
RSRB01A_2700	4.20	1.71	46	7158419.82	0.00	-0.01
RSRB01B_2700	13.73	4.01	58	8638747.78	-3.45	-2.64
RSRB01C_2700	20.38	7.63	84	11498923.90	-5.95	-4.09
RSRB01D_2700	32.28	14.88	135	18048542.24	-7.41	-8.42
RSRB01E_2700	33.41	8.09	145	18924293.26	-11.03	-10.27
RSRB01F_2700	53.34	3.99	250	31182483.92	-17.6	-15.31
RSRB01A_5400	4.20	1.71	23	4433145.30	0.00	0.04
RSRB01B_5400	13.73	4.01	56	8029711.80	-1.79	-2.18
RSRB01C_5400	20.38	7.63	81	11032673.88	-2.47	-2.7
RSRB01D_5400	32.28	14.88	132	17825252.60	-5.3	-7.74
RSRB01E_5400	33.41	8.09	141	18636034.06	-8.51	-9.23
RSRB01F_5400	53.34	3.99	250	31182483.92	-17.6	-15.21
平均	26.22	6.72	116.75	15549226.04	-6.76	-6.48

综合表3、表5、表7和表9可以看出,本文设计的算法多次运行获取的解的均值和标准差的变化很小,表明算法具有良好的稳定性和收敛性。

经典的SDVRP中,所需车辆数目的下界可以由 $\lceil \sum d_i / Q \rceil$ 给出,然而SDSBRP中存在学生最大乘车时间约束,使得所需校车数目的下界难于估计。为便于比较,放宽学生的最大乘车时间约束,采用类似于SDVRP的方法估算SDSBRP中校车数下界(N_b)。表11给出了拆分情形下校车数目与下界的比较,列 N_{2700} 和 N_{5400} 分别表示最大乘车时间为2700s和5400s时本文算法获取的需求拆分的解中校车数,带有星号(*)的数值表示获取了下界。从表中可以看出,在最大乘车时间为5400s时本文的算法能够在大部分案例上获取校车数的下界,表明了算法的有效性。

表11 SDSBRP解中校车数目与下界比较

案例集	N _b	N ₂₇₀₀	N ₅₄₀₀	案例集	N _b	N ₂₇₀₀	N ₅₄₀₀
RSRB01	55	59	55*	CSCB01	63	66	63*
RSRB02	60	72	60*	CSCB02	54	74	56
RSRB03	111	122	111*	CSCB03	109	145	109*
RSRB04	117	153	119	CSCB04	124	185	126
RSRB01A	19	46	23	CSCB01A	19	46	19*
RSRB01B	55	56	55*	CSCB01B	53	61	53*
RSRB01C	79	79*	79*	CSCB01C	80	82	80*
RSRB01D	125	125*	125*	CSCB01D	133	134	133*
RSRB01E	129	129*	129*	CSCB01E	132	132*	132*
RSRB01F	206	206*	206*	CSCB01F	206	206	206*
平均	95.60	104.70	96.20	平均	97.30	113.10	97.70

结束语 与经典SDVRP相比,因约束条件和优化目标不同,使得站点乘车需求拆分的校车路径问题更加复杂,精确算法难以求解,求解经典SDVRP的启发式算法难以直接应

用。本文首次构建了需求可拆分SDSBRP的数学模型,分析了该问题的解特征,设计了基于邻域搜索的模拟退火算法。算法在邻域解判断时引入路径学生人数之差作为辅助目标,引导邻域解的搜索向着校车满载的趋势改变,兼顾校车数量和校车运行距离优化目标;另一方面引入“破坏重建”的策略来增加解的多样性,以利于算法跳出局部最优,发现好的解,扩展了邻域解的启发策略。

本文算法在3个经典邻域搜索算子的基础上,引入了一个需求拆分邻域搜索算子及3个辅助算子,与经典多目标SDVRP算法设计相比具有简单性。同时,本文算法的计算复杂度主要取决于3个经典邻域搜索算子和需求拆分邻域搜索算子及迭代循环次数,与常见VRP求解算法的计算复杂度相当。

算法测试表明:1)与站点不拆分SBRP相比,需求拆分能够进一步减少所需校车数量和缩短行驶距离,进而节约校车服务成本;2)当学生乘车时间约束较紧时,站点拆分带来的校车服务成本节约相对越高;3)算法计算效率高,且收敛性好。我国大部分地区人口密度高,校车站点乘车学生人数往往较多,运用SDSBRP进行校车路径规划具有很高的应用价值。后续研究将探讨站点的时空关系对拆分的影响,进一步提高算法的寻优能力;开展SDSBRP与SDVRP差异的理论分析和实验验证工作。

参考文献

- [1] Newton R M, Thomas W H. Design of school bus routes by computer [J]. Socio-Economic Planning Sciences, 1969, 3(1): 75-85

2013,40(9):221-224(in Chinese)

张翼鹏,陈亮,郝欢. 一种基于 LM 的量子神经网络训练算法[J]. 计算机科学,2013,40(9):221-224

- [12] Zha F,Xu J N,Li J S,et al. IUKF neural network modeling for FOG temperature drift[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics,2013,24(5):828-844
- [13] Mu J,Cai Y L. Iterated cubature Kalman filter and its application[C]//IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER). Kunming,China,2011:33-37

(上接第 241 页)

- [2] Park J,Kim B I. The school bus routing problem: A review [J]. European Journal of Operational Research,2010,202(2):311-319
- [3] Dang Lan-xue,Chen Xiao-pan,Kong Yun-feng. Reivew of School Bus Routing Problem: Concept, Model And Optimizaion Algorithms[J]. Journal of Henan University(Natutal science),2013,43(6):682-691(in Chinese)
党兰学,陈小潘,孔云峰. 校车路径问题模型及算法研究进展[J]. 河南大学学报(自然科学版),2013,43(6):682-691
- [4] Dang Lan-xue,Wang Zhen,Liu Qing-song,et al. Heuristic Algorithm for Solving Mixed Load School Bus Routing Problem [J]. Computer Science,2013,40(7):248-253(in Chinese)
党兰学,王震,刘青松,等. 一种求解混载校车路径的启发式算法 [J]. 计算机科学,2013,40(7):248-253
- [5] Dror M, Trudeau P. Savings by split delivery routing [J]. Transportation Science,1989,23(2):141-145
- [6] Dror M, Trudeau P. Split delivery routing [J]. Naval Research Logistics (NRL),1990,37(3):383-402
- [7] Archetti C,Savelsbergh M W P,Grazia Speranza M. To split or not to split: That is the question [J]. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review,2008,44(1):114-123
- [8] Silva M M,Subramanian A,Ochi L S. An iterated local search heuristic for the split delivery vehicle routing problem [J]. Computers & Operations Research,2015,53(53):234-249
- [9] Frizzell P W, Giffin J W. The split delivery vehicle scheduling problem with time windows and grid network distances [J]. Computers & Operations Research,1995,22(6):655-667
- [10] Archetti C,Speranza M G,Hertz A. A tabu search algorithm for the split delivery vehicle routing problem [J]. Transportation Science,2006,40(1):64-73
- [11] Berbotto L,García S,Nogales F J. A Randomized Granular Tabu Search heuristic for the split delivery vehicle routing problem [J]. Annals of Operations Research,2014,222(1):153-173
- [12] Liu Wang-sheng,Yang Fan,Li Mao-qing,et al. Clustering algorithm for split delivery vehicle routing problem[J]. Control and Decision,2012,27(4):535-541(in Chinese)
刘旺盛,杨帆,李茂青,等. 需求可拆分车辆路径问题的聚类求解算法 [J]. 控制与决策,2012,27(4):535-541
- [13] Meng Fan-chao,Lu Zhi-qiang,Sun Xiao-ming. Taboo Search algorithm of split Vehicle routing problem [J]. Computer Aided Engineering,2010,19(1):78-83(in Chinese)
孟凡超,陆志强,孙小明. 需求可拆分车辆路径问题的禁忌搜索算法 [J]. 计算机辅助工程,2010,19(1):78-83

- [14] Wu X D,Chang Y C,Mao J X,et al. Predicting reliability and failures of engine systems by single multiplicative neuron model with iterated nonlinear filters[J]. Reliability Engineering and System Safety,2013,119:244-250
- [15] Zhang Shao-you,Hao Yan-ling,Wu Xu. Complexity analysis of three deterministic sampling nonlinear filtering algorithms[J]. Journal of HARBIN Institute of Technology,2013,45(12):111-115(in Chinese)
张召友,好烟令,吴旭. 3 种确定性采样非线性滤波算法的复杂度分析[J]. 哈尔滨工程大学学报,2013,45(12):111-115

- [14] Ho S C,Haugland D. A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with time windows and split deliveries [J]. Computers & Operations Research,2004,31(12):1947-1964
- [15] Belfiore P,Yoshizaki H T Y. Heuristic methods for the fleet size and mix vehicle routing problem with time windows and split deliveries [J]. Computers & Industrial Engineering,2013,64(2):589-601
- [16] Belfiore P C,Yoshida Yoshizaki H T. Scatter search for a real-life heterogeneous fleet vehicle routing problem with time windows and split deliveries in Brazil [J]. European Journal of Operational Research,2009,199(3):750-758
- [17] Thangiah S R,Fergany A,Wilson B,et al. School bus routing in rural school districts [M]. Computer-aided Systems in Public Transport. Springer,2008:209-232
- [18] Jin Yan-bo. Research on Optimizatin Of School Bus Routing [D]. Changchun:Jilin University,2006(in Chinese)
金燕波. 校车路径优化问题研究 [D]. 长春:吉林大学,2006
- [19] Archetti C, Mansini R, Speranza M G. Complexity and Reducibility of the Skip Delivery Problem [J]. Transportation Science,2005,39(2):182-187
- [20] Archetti C,Speranza M G,Savelsbergh M W P. An Optimization-Based Heuristic for the Split Delivery Vehicle Routing Problem [J]. Transportation Science,2008,42(1):22-31
- [21] Lourenço H,Martin O,Stützle T. Iterated Local Search: Framework and Applications(2nd ed)[M]//Gendreau M,Potvin J-Y. Handbook of Metaheuristics. Springer US,2010:363-397
- [22] Schrimpf G,Schneider J,Stamm-Wilbrandt H,et al. Record Breaking Optimization Results Using the Ruin and Recreate Principle [J]. Journal of Computational Physics,2000,159(2):139-171
- [23] Schneider J,Kirkpatrick S. Ruin & Recreate [M]//Schneider J, Kirkpatrick S. Stochastic Optimization. Berlin: Springer Berlin Heidelberg,2006:73-77
- [24] Bent R, Van Hentenryck P. A Two-Stage Hybrid Local Search for the Vehicle Routing Problem with Time Windows [J]. Transportation Science,2004,38(4):515-530
- [25] Bent R,Hentenryck P V. A two-stage hybrid algorithm for pick-up and delivery vehicle routing problems with time windows [J]. Computers & Operations Research,2006,33(4):875-893
- [26] Park J,Tae H,Kim B-I. A post-improvement procedure for the mixed load school bus routing problem [J]. European Journal of Operational Research,2012,217(1):204-213
- [27] Braca J,Bramel J,Posner B,et al. A computerized approach to the New York City school bus routing problem [J]. IIE Transactions,1997,29(8):693-702