AGM 信念收缩算子的拓扑式刻画

孟 华[1,4] 原雅燕[2] 储节磊[3] 王红军[4]

(西南交通大学数学学院 成都 611756)[1] (河南师范大学数学与信息科学学院 新乡 453007)[2]

(西南交通大学力学与工程学院 成都 611756)[3] (西南交通大学信息科学与技术学院 成都 611756)[4]

摘 要 当 agent 的信念集是无限集时,传统的基于有限逻辑语言的刻画信念变化(belief change)的简单语义模型通常不再适用。Gärdenfors 和 Makinson 引入的 epistemic entrenchment(认知牢固度)模型虽然可以用来从语义上刻画 AGM 型信念收缩算子,但他们并未给出如何构造一个具体的 epistemic entrenchment 的方法。在无限命题逻辑语言的背景下,通过在模型集上引入一个拓扑结构,构造出一种新的用来刻画 AGM 信念收缩的语义结构,称为认知链,并给出相应表示定理。讨论了 epistemic entrenchment 与认知链之间的关系。相对 epistemic entrenchment 而言,认知链具有结构简单并易于构造的特点。

关键词 知识表示,信念收缩,认知牢固度,拓扑空间

中图法分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10. 11896/j. issn. 1002-137X. 2016. 9. 016

Topological Characterization of AGM Belief Contraction Operator

MENG Hua[1,4] YUAN Ya-yan[2] CHU Jie-lei[3] WANG Hong-jun[4]

(School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)[1]

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)[2]

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)[3]

(School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)[4]

Abstract When the background language is finite, there are different semantic methods to characterize belief change operators, which are easy to construct. However, when the background language is infinite, these methods are usually unsuitable. Gärdenfors and Makinson proposed a representation model using epistemic entrenchment to characterize belief contraction over an infinite language. But they did not show us how to construct a concrete epistemic entrenchment. In this paper, a new model called "epistemic chain" was introduced to characterize AGM-style belief contraction operators. An epistemic chain was a chain of closed set (about set inclusion) based on a topology on the set of all possible worlds. The relation between epistemic entrenchment and epistemic chain was discussed. Comparing with epistemic entrenchment, epistemic chain is simpler in structure and easier to construct.

Keywords Knowledge representation, Belief contraction, Epistemic entrenchment, Topological space

1 引言

信念修正(belief revision)理论是人工智能基础理论研究的核心领域之一[1]。20 世纪 80 年代,Alchourron,Gärdenfors 和 Makinson(AGM)在其开创性的工作中率先研究了两种信念变化的算子,分别称为信念修正(belief revision)算子和信念收缩 (belief contraction) 算子[2]。此后吸引了大量学者从事信念修正和信念收缩的相关研究[1-18],其中 Harper[14] 和 Levi[15]讨论了修正算子与收缩算子之间的联系,以及如何互相诱导。

在 AGM 框架下,智能体(agent)的信念由逻辑语句来表示,称为信念集 (belief set)。信念修正是研究当智能体获得新的信念 μ 时如何修改原有的信念。而信念收缩是研究智能体如何从 K 中删除一条已有信念。AGM 从语法上给出了修正算子和收缩算子所满足的公理,称为 AGM 理论。为了从语义上刻画上述算子,Grove[16] 引入球系统 (system of spheres)模型来刻画信念修正算子。Gärdenfors 等[6]引入了 epistemic entrenchment 来刻画信念收缩算子。然而无论是球系统模型还是 epistemic entrenchment 模型,都存在一个明显的问题:它们并不易于直接构造。以 epistemic entrenchment 为例,一个基于信念集 K 的 epistemic entrenchment 是语言 L 上的一个序结构,需要满足 5 条公理(详见 3.2 节)。而这些

到稿日期:2015-07-28 返修日期:2015-09-10 本文受 NSFC(61402382,11501177),中央高校基础研究基金(2682014ZT28),河南省高等学校重点科研项目计划(15A110034),西南交通大学创新项目(2682014CX054)资助。

孟 华(1982-),男,博士,主要研究方向为知识表示与推理、拓扑学,E-mail:menghua@home. swjtu. edu. cn;**原雅燕**(1978-),女,博士,硕士生导师,主要研究方向为拓扑学;**储节磊**(1977-),男,博士,主要研究方向为机器学习;**王红军**(1977-),男,博士,副教授,主要研究方向为机器学习、数据挖掘。

公理并不够直观，以至于当智能体的信念集 K 确定以后，想构造一个具体的基于 K 的 epistemic entrenchment 来描述智能体的认知状并非易事。因此寻找信念修正算子和信念收缩算子易于构造的语义模型是十分必要的。

当背景语言为有限时，Katsuno 等[17]发现模型集上的全预序可以用来刻画信念修正算子，并基于这种语义结构发展出了迭代的信念修正理论[19]。然而当背景语言为无限时，他们的方法不再适用。本文将在无限的逻辑语言背景下，围绕着如何构造信念收缩的一种新的语义模型展开研究。通过在模型集上建立拓扑空间，对 epistemic entrenchment 的结构进行拓扑式刻画，进而为信念收缩找到一个新的易于构造的模型。

本文第 2 节简述传统的 AGM 收缩算子满足的公理及 epistemic entrenchment 模型；第 3 节介绍如何通过逻辑语句诱导模型集上的拓扑空间；第 4 节给出与 epistemic entrenchment 等价的拓扑结构；第 5 节介绍相关研究并指出今后的工作方向；最后总结全文。

2 预备知识

本文基于命题逻辑（propositional logic）语言来讨论信念收缩，用 L 表示由可数多个原子命题生成的命题逻辑语言。若 Γ 为 L 中的公式（formula）构成的集合，$Cn(\Gamma)$ 表示 Γ 的逻辑闭包，即 $Cn(\Gamma)=\{\varphi|\Gamma\vdash\varphi\}$。如果 $Cn(\Gamma)=\Gamma$，则称 Γ 为 L 中的一个理论。L 中所有理论构成的集合记作 $T(L)$。若 K 为一个理论，记 $K+\varphi=Cn(K\cup\{\varphi\})$。称一个理论 K 为完全的（complete）当且仅当对任意的公式 φ，有 $\varphi\in K$ 或 $\neg\varphi\in K$。完全的、协调的理论（也称 possible world）通常用 ω 来表示。由于命题逻辑是可靠和完备的，一个完全的、协调的理论等价于一个赋值函数（也称模型），因此我们不区分完全的、协调的理论与模型，当写作 $\omega\vdash\varphi$ 时，ω 表示一个完全的协调理论；而当写作 $\omega\models\varphi$ 时，ω 表示一个模型。记 W 为 L 的所有模型的集合。对任意的 $\varphi\in L,\Gamma\subseteq L$，令 $[\varphi]=\{\omega\in W|\omega\models\varphi\}$，即 φ 的模型集。类似地，有 $[\Gamma]=\{\omega\in W|\forall\varphi\in\Gamma,\omega\models\varphi\}$。令 T 表示一个特定的重言式（不妨设 $T=p\vee\neg p,p\in L$），$\perp=\neg T$，则 $[T]=W,[\perp]=\emptyset$。对任意的 $U\subseteq W$，记 $\bigcap U=\{\varphi|\forall\omega\in U,\omega\models\varphi\}$。由定义易知 $\omega\in[\Gamma]$ 当且仅当 $\Gamma\subseteq\omega$，$\varphi\in\bigcap U$ 当且仅当 $U\subseteq[\varphi]$。

称 G 上的一个二元关系 $\leqslant$ 为预序，如果 $\leqslant$ 满足自反性与传递性。若预序 $\leqslant$ 满足反对称性，则称 $\leqslant$ 为一个偏序。对任意的预序 $\leqslant$，记 $x\approx y$ 若 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant x$，则 $\approx$ 为一个等价关系。如果把等价的元素粘合起来，即可通过 $\leqslant$ 诱导 $G/\approx$ 上一个偏序关系 $\hat{\leqslant}$，满足 $x\leqslant y$ 当且仅当 $\hat{x}\hat{\leqslant}\hat{y}$，其中 $\hat{x}$ 表示 x 所在的等价类。

若对任意的 $x,y\in G$ 有 $x\leqslant y$ 成立或 $y\leqslant x$ 成立，称 $\leqslant$ 为全序。记 $x<y$ 当且仅当 $x\leqslant y$ 但 $y\not\leqslant x$。

3 AGM 信念收缩算子

3.1 AGM 规则

在 AGM 框架中，智能体的信念为一个理论 K，也称为信念集。信念收缩（belief contraction）主要研究如何从已知的信念集 K 中删减一条信念 φ。通常用 $K\div\varphi$ 表示信念收缩的结果。其中 $\div$ 是一个 $T(L)\times L\rightarrow T(L)$ 的映射。$\div$ 被称为 AGM 信念收缩算子，如果 $\div$ 满足如下规则：

($K\div1$) $K\div\varphi$ 是一个理论；

($K\div2$) $K\div\varphi\subseteq K$；

($K\div3$) 如果 $\varphi\notin K$ 则 $K\div\varphi=K$；

($K\div4$) 如果 $\nvdash\varphi$ 则 $\varphi\notin K\div\varphi$；

($K\div5$) 如果 $\varphi\in K$ 则 $K\subseteq(K\div\varphi)+\varphi$；

($K\div6$) 如果 $\varphi\equiv\psi$ 则 $K\div\varphi=K\div\psi$；

($K\div7$) $K\div\varphi\cap K\div\psi\subseteq K\div(\varphi\wedge\psi)$；

($K\div8$) 如果 $\varphi\notin K\div(\varphi\wedge\psi)$ 则 $K\div(\varphi\wedge\psi)\subseteq K\div\varphi$。

3.2 epistemic entrenchment

($K\div1$)－($K\div8$) 给出了一个理性的智能体在信念收缩时应该满足的语法规则。但 ($K\div1$)－($K\div8$) 并没有给出如何构造一个 AGM 信念收缩算子的方法。Gärdenfors 和 Makinson 为了从语义结构上刻画 AGM 信念收缩算子，引入了认知牢固度（epistemic entrenchment）这一概念[2]。称 L 上的一个预序 $\leqslant$ 为基于理论 K 的 epistemic entrenchment，如果 $\leqslant$ 满足下列条件：

(EE1) 如果 $\varphi\leqslant\psi$ 且 $\psi\leqslant\chi$，则 $\varphi\leqslant\chi$；

(EE2) 如果 $\varphi\vdash\psi$，则 $\varphi\leqslant\psi$；

(EE3) $\varphi\leqslant\varphi\wedge\psi$ 或者 $\psi\leqslant\varphi\wedge\psi$ 至少有一个成立；

(EE4) 如果 K 是协调的，则 $\varphi\notin K$ 当且仅当 $\forall\varphi\in L$ 有 $\varphi\leqslant\psi$；

(EE5) 如果 $\forall\psi\in L$ 有 $\psi\leqslant\varphi$，则 $\vdash\varphi$。

Gärdenfors 和 Makinson 给出了如下表示定理刻画 AGM 信念收缩算子与 epistemic entrenchment 的关系：

(C-) $\psi\in K\div\varphi$ 当且仅当 $\varphi<\psi\vee\varphi$ 或 $\vdash\varphi$

定理 1 假设 $\div$ 为一个信念收缩算子，满足 ($K\div1$)－($K\div8$)，则通过 (C-) 可以诱导一个 L 上的预序 $\leqslant$ 满足 (EE1)－(EE5)。反之，若 $(L,\leqslant)$ 满足 (EE1)－(EE5)，则通过 (C-) 可以诱导一个信念收缩算子满足 ($K\div1$)－($K\div8$)。

注：如无特别说明，为了表述简单，此后本文出现 $K\div\varphi$ 时，所讨论的理论 K 均为协调理论，φ 亦为非重言式的公式。此时 (C-) 简化为 $\psi\in K\div\varphi$ 当且仅当 $\varphi<\psi\vee\varphi$。由于 K 是用来表示智能体的信念，当 K 不协调时，意味着 $K=L$，此时智能体无所不信这是平凡的情形。再者 φ 表示智能体要放弃的信念，当 φ 为重言式时，$(K\div\varphi)+\varphi=K\div\varphi$，由 ($K\div5$) 知 $K\div\varphi=K$。我们略过这两种特殊情形的讨论。

4 由 L 的公式诱导 W 上的一个拓扑空间

拓扑空间是一种重要的数学结构，广泛应用于数学的各个分支。若 Ω 为集合 X 的一个子集族，如果 $\emptyset,X\in\Omega$ 并且 Ω 关于集合间的有限交和任意并运算封闭，则称 Ω 为 X 上的一个拓扑，同时称 (X,Ω) 为一个拓扑空间。Ω 中的元素称为开集。称 U 为闭集当且仅当 $X\backslash U\in\Omega$。称一个拓扑空间 (X,Ω) 为豪斯多夫（Hausdorff）空间，如果对任意的不同的 $x,y\in X$，存在 $U,V\in\Omega$ 使得 $x\in U,y\in V$ 且 $U\cap V=\emptyset$。称一个拓扑空间为紧的，如果对于 X 的任意的由开集构成的覆盖具有有限子覆盖。称 X 的一个子集族 Λ 具有有限交性质，如果对于 Λ 的任意非空有限子集具有非空交，即对任意的 $\Pi\subseteq\Lambda$ 为有限集，有 $\bigcap\Pi\neq\emptyset$。对于紧空间而言，具有有限交性质的闭集族有非空交。

对任意的 $B\subseteq\Omega$，称 B 为 Ω 的一个基如果对任意的开集 $U\in\Omega$，U 可表示为 B 中元素的并。由定义可知只要选定了拓

扑空间的一个基通过基元的并运算就可以得到所有开集。因此数学上通常采用构造一个基的方式来构造整个拓扑空间。

引理 1[21] 若 B 为 X 的一个子集族，$\bigcup B=X$，且对任意的 $B_1,B_2\in B$ 以及 $x\in B_1\cap B_2$，存在 $B_3\in B$ 使得 $x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2$，则存在 X 上的唯一的一个拓扑空间 (X,Ω)，使得 B 为 (X,Ω) 的一个基。

下面通过 L 上的语句诱导 W 上的一个拓扑空间。令 $B^*=\{[\varphi]\mid\varphi\in L\}$。不难验证 B^* 满足引理 1 的条件。因此存在 W 上的唯一的以 B^* 为基的拓扑空间 (W,Ω_L)。

注：Surendonk[20]较早地引入该拓扑空间来刻画信念修正的语义模型。文献[8,18]中相关学者也应用该拓扑空间来描述信念变化和模态逻辑。

引理 2[8] (W,Ω_L) 是紧的豪斯多夫空间。

引理 3[8] 对任意的 $\Gamma\subseteq L$，$\Gamma\in T(L)$ 当且仅当 $[\Gamma]$ 为闭集。

更多的关于该拓扑空间的性质参考文献[21]。

5 epistemic entrenchment 的拓扑式刻画

本节将通过对 epistemic entrenchment 结构的分析，给出 epistemic entrenchment 的拓扑式刻画。由 $\varphi\vdash\varphi$ 和(EE2)知 $\varphi\leqslant\varphi$。由(EE1)－(EE2)可知 $\leqslant$ 是 L 上的一个预序。因此可以在 L 上定义一个等价关系 $\approx$：$\varphi\approx\psi$ 当且仅当 $\varphi\leqslant\psi$ 并且 $\psi\leqslant\varphi$。对任意的 $\varphi\in L$，令 $\hat{\varphi}$ 表示 φ 所在的等价类，即 $\hat{\varphi}\in L/\approx$。从而 $\leqslant$ 可以诱导 $L/\approx$ 上一个偏序 $\hat{\leqslant}$，满足 $\hat{\varphi}\hat{\leqslant}\hat{\psi}$ 当且仅当 $\varphi\leqslant\psi$。

由 $\varphi\wedge\psi\vdash\varphi$ 和(EE2)知 $\varphi\wedge\psi\leqslant\varphi$，类似地有 $\varphi\wedge\psi\leqslant\psi$。再由(EE3)知，$\varphi\wedge\psi\approx\varphi$ 或 $\varphi\wedge\psi\approx\psi$ 至少有一个成立。因此 $\psi\leqslant\varphi$ 或 $\psi\leqslant\varphi$ 至少有一个成立。这意味着如果 $(L,\leqslant)$ 满足(EE1)－(EE3)，则 $\leqslant$ 为全预序。由(EE3)易得到如下结论。

命题 1 若 $\varphi<\psi$ 则 $\varphi\approx\varphi\wedge\psi$。

(EE4)表明如果 $\varphi\notin K$ 则 $\hat{\varphi}$ 为 $(L/\approx,\hat{\leqslant})$ 的最小元，不难验证 $\hat{\varphi}=\hat{\perp}$。类似地，(EE5)表明 $\hat{T}$ 为 $(L/\approx,\hat{\leqslant})$ 中的最大元，而且 $\hat{\varphi}=\hat{T}$ 当且仅当 $\varphi\equiv T$。

定义 1 对任意的 $\varphi\in L$，记 $\Omega(\varphi)=\bigcap\{[\psi]\mid\psi\approx\varphi\}$ 为 φ 的认知度(epistemic degree)。

命题 2 由定义易知：

(1) $\Omega(\varphi)=\{\omega\mid\forall\psi\in\hat{\varphi},\omega\vDash\psi\}$；

(2) $\Omega(\varphi)$ 为闭集；

(3) 如果 $\varphi\approx\psi$，则 $\Omega(\varphi)=\Omega(\psi)$；

(4) $\Omega(\hat{T})=W$，$\Omega(\hat{\perp})=\varnothing$。

由定理 1 知 $\varphi<\psi\vee\varphi$ 当且仅当 $\psi\in K\div\varphi$，因此可以通过收缩算子来刻画 $\psi\approx\varphi$，进而可以通过收缩算子刻画 $\Omega(\varphi)$。

命题 3 设 $\leqslant$ 为基于理论 K 的 epistemic entrenchment，则 $\psi\approx\varphi$ 当且仅当 $\psi\wedge\neg\varphi\notin K\div(\varphi\wedge\psi)$ 且 $\varphi\wedge\neg\psi\notin K\div(\varphi\wedge\psi)$。其中 $\div$ 为由(C-)诱导的 AGM 信念收缩算子。

证明：因 $\leqslant$ 为全预序，且 $\leqslant$ 满足(EE3)，$\psi\approx\varphi$ 等价于 $\varphi\wedge\psi\approx\varphi$ 且 $\varphi\wedge\psi\approx\psi$。而 $\varphi\wedge\psi\approx\varphi$ 即 $\varphi\wedge\psi\leqslant\varphi$ 且 $\varphi\leqslant\varphi\wedge\psi$。由(EE2)知 $\varphi\wedge\psi\leqslant\varphi$ 是显然的。因此 $\varphi\wedge\psi\approx\varphi$ 等价于 $\varphi\wedge\psi\not<\varphi$。由(C-)知 $\varphi\wedge\psi\not<\varphi$ 等价于 $\varphi\wedge\neg\psi\notin K\div(\varphi\wedge\psi)$。类似地有 $\varphi\wedge\psi\approx\psi$ 等价于 $\psi\wedge\neg\varphi\notin K\div(\varphi\wedge\psi)$。因此命题成立。

由命题 3 知，给定信念集 K 和 AGM 收缩算子 $\div$ 可确定 L 上的等价关系 $\approx$。由 $\Omega(\varphi)$ 的定义有：

推论 1 设 K 为信念集，$\div$ 为 AGM 信念收缩算子，则 $\Omega(\varphi)=\bigcap\{[\psi]\mid\psi\in L,\psi\wedge\neg\varphi\notin K\div(\varphi\wedge\psi)$ 且 $\varphi\wedge\neg\psi\notin K\div(\varphi\wedge\psi)\}$。

接下来讨论在给定的 epistemic entrenchment(或 AGM 信念收缩算子)下 $\{\Omega(\varphi)\mid\varphi\in L\}$ 的结构。

引理 4 如果 $(L,\leqslant)$ 为 epistemic entrenchment 则 $\varphi<\alpha$ 当且仅当 $\Omega(\varphi)\subset\Omega(\alpha)$。

证明：(必要性)首先证明如果 $\varphi<\alpha$ 则 $\Omega(\varphi)\subseteq\Omega(\alpha)$。若 $\varphi<\alpha$ 则对任意的 $\varphi'\approx\varphi$ 均有 $\varphi'\wedge\alpha\approx\varphi'<\alpha$。因此 $\bigcap\{[\psi]\mid\psi\approx\varphi\}\subseteq[\varphi'\wedge\alpha]$，所以 $\bigcap\{[\psi]\mid\psi\approx\varphi\}=\bigcap\{[\psi\wedge\alpha]\mid\psi\approx\varphi\}\subseteq[\alpha]$。类似地，对任意的 $\alpha'\approx\alpha$ 同样有 $\bigcap\{[\psi]\mid\psi\approx\varphi\}\subseteq[\alpha']$。不难验证 $\bigcap\{[\psi]\mid\psi\approx\varphi\}\subseteq\bigcap\{[\beta]\mid\beta\approx\alpha\}$，即 $\Omega(\varphi)\subseteq\Omega(\alpha)$。其次证明 $\Omega(\varphi)\neq\Omega(\alpha)$。由 $\varphi\wedge\alpha<\alpha$ 知 $[\varphi\wedge\alpha]\neq[\alpha]$，于是 $[\neg\varphi\wedge\alpha]\neq\varnothing$。类似地对任意的 $\alpha'\approx\alpha$ 有 $[\neg\varphi\wedge\alpha']\neq\varnothing$。于是可以构造闭集族 $\Lambda=\{[\neg\varphi\wedge\beta]\mid\beta\approx\alpha\}$，不难发现 Λ 满足有限交性质。由于 (W,Ω_L) 是紧空间，因此 $\bigcap\Delta=\{[\neg\varphi\wedge\beta]\mid\beta\approx\alpha\}=[\neg\varphi]\cap\{[\beta]\mid\beta\approx\alpha\}\neq\varnothing$。即 $[\neg\varphi]\cap\Omega(\alpha)\neq\varnothing$。而 $\Omega(\varphi)\subseteq[\varphi]$，因此 $\Omega(\varphi)\neq\Omega(\alpha)$。

(充分性)因为 $\Omega(\varphi)\subset\Omega(\alpha)$，所以 φ 与 α 不属于同一个等价类，由 $\leqslant$ 是全预序，于是 $\varphi<\alpha$ 或 $\alpha<\varphi$ 必有一个成立。由必要性的证明可知 $\alpha<\varphi$ 不成立，否则 $\Omega(\alpha)\subset\Omega(\varphi)$ 与已知条件矛盾。

定义 2 假设 Λ 由 (W,Ω_L) 中的闭集构成，包含 W 和 $\varnothing$，并且关于真包含的关系($\subset$)构成一个链，则称 Λ 为一个认知链。

引理 5 如果 $\leqslant$ 为 L 上的 epistemic entrenchment，令 $\Delta(\leqslant)=\{\Omega(\varphi)\mid\varphi\in L\}$，则 $\Delta(\leqslant)$ 构成一个认知链。

证明：因为 $\Omega(\perp)=\varnothing$，$\Omega(T)=W$，所以 $\varnothing,W\in\Delta(\leqslant)$。对任意的 $\varphi,\psi\in L$，$\varphi\approx\psi$、$\varphi<\psi$ 和 $\psi<\varphi$ 三者有且只有一个成立。由命题 2 知，如果 $\varphi\approx\psi$ 则 $\Omega(\varphi)=\Omega(\psi)$，再由引理 4 易知 $\Delta(\leqslant)$ 关于集合间的 $\subset$ 关系构成一个闭集链。故 $\Delta(\leqslant)$ 为一个认知链。

定理 1 表明信念集 K 和一个 AGM 信念收缩算子可以通过(C-)诱导一个 epistemic entrenchment $\leqslant$ 并且 $\psi\in K\div\varphi$ 当且仅当 $\varphi<\psi\vee\varphi$。而引理 5 表明，$\leqslant$ 可以诱导一个认知链 $\Delta(\leqslant)$ 并且 $\varphi<\alpha$ 当且仅当 $\Omega(\varphi)\subset\Omega(\alpha)$。于是可以通过认知链刻画收缩算子。即 $\psi\in K\div\varphi$ 当且仅当 $\Omega(\varphi)\subset\Omega(\varphi\vee\psi)$。

定理 2 如果 $\div$ 为一个信念收缩算子，满足 $(K\div1)$—$(K\div8)$，则存在一个认知链 Δ，满足：(Δ-) $\psi\in K_\Delta\div\varphi$ 当且仅当 $\Omega(\varphi)\subset\Omega(\psi\vee\varphi)$，其中 $\Omega(\varphi)=\bigcap\{[\mu]\mid\mu\in L,\mu\wedge\neg\varphi\notin K\div(\varphi\wedge\mu)$ 且 $\varphi\wedge\neg\mu\notin K\div(\varphi\wedge\mu)\}$。

我们已经讨论了如何用 epistemic entrenchment 来诱导一个认知链，接下来讨论如何通过认知链直接构造一个 epistemic entrenchment。若 Λ 为一个认知链，则 $\Lambda-\{\varnothing\}$ 为满足有限交性质的闭集族，因此 $\bigcap(\Lambda-\{\varnothing\})$ 非空。令 $K_\Lambda=\{\psi\mid\bigcap(\Lambda-\{\varnothing\})\subseteq[\psi]\}$ 为闭集。由引理 3，不难验证 K_Λ 即为以 $\bigcap(\Lambda-\{\varnothing\})$ 为模型集的理论。对任意的 $\varphi\in L$，令 $\nabla(\varphi)=\{U\mid U\in\Lambda,U\subseteq[\varphi]\}$。

定义 3 对于任意一个认知链 Λ，定义 L 上一个二元关系 $\leqslant_\Lambda$ 如下：$\varphi\leqslant_\Lambda\psi$，若 $\nabla(\varphi)\subseteq\nabla(\psi)$。

定理 3 如果 Λ 为一个认知链，则 $\leqslant_\Lambda$ 是 L 上的一个关于理论 K_Λ 的 epistemic entrenchment，并且 $\nabla(\varphi)\subset\nabla(\psi)$ 当且仅当 $\varphi<_\Lambda\psi$。

证明：只需验证$\leqslant_\Lambda$满足(EE1)－(EE5)即可。(EE1)，(EE2)，(EE5)的验证是平凡的。关于(EE3)，由于Λ关于$\subset$构成一个链，不难发现对于任意的φ,ψ，总有$\nabla(\varphi)\subseteq\nabla(\psi)$或$\nabla(\psi)\subseteq\nabla(\varphi)$至少有一个成立，不妨设$\nabla(\varphi)\subseteq\nabla(\psi)$。此时对于任意的$U\in\nabla(\varphi)$有$U\subseteq[\varphi]$且$U\subseteq[\psi]$。因此，$U\subseteq[\varphi\wedge\psi]$。所以$\nabla(\varphi)\subseteq[\varphi\wedge\psi]$。这意味着$\nabla(\varphi)=\nabla(\varphi\wedge\psi)$。故$\leqslant_\Lambda$满足(EE3)。对于(EE4)，若$\varphi\notin K_\Lambda$则$\bigcap(\Lambda-\{\emptyset\})\nsubseteq[\varphi]$，因此$\nabla(\varphi)=\emptyset$。由$\leqslant_\Lambda$定义知，对任意的$\psi\in L$，$\varphi\leqslant_\Lambda\psi$。反之若对任意的$\psi$有$\varphi\leqslant_\Lambda\psi$，令$\psi=\perp$，即得$\nabla(\varphi)=\emptyset$。因此$\bigcap(\Lambda-\{\emptyset\})\nsubseteq[\varphi]$，即得$\varphi\notin K_\Lambda$。故$\leqslant_\Lambda$满足(EE4)。

综上，则$\leqslant_\Lambda$是L上的一个关于理论K_Λ的 epistemic entrenchment。

由于 epistemic entrenchment 和信念收缩算子是可以互相刻画的，因此定理 3 给出了一种如何通过任给的一个认知链直接构造信念收缩算子的方法。

定理 4　如果Λ为一个认知链，则通过(∇-)可以诱导一个信念收缩算子满足($K\div1$)－($K\div8$)。

(∇-)$\psi\in K_\Lambda\div\varphi$当且仅当$\nabla(\varphi)\subset\nabla(\psi\vee\varphi)$

综上，通过定理 2 和定理 4 发现，每一个 AGM 信念收缩算子可以诱导模型集上的一个认知链，反之，任何一个认知链亦可以诱导一个 AGM 信念收缩算子。当智能体的信念集为K时，只需要构造一个以$[K]$为最小元的闭集链即可得到一个 AGM 收缩算子。

注：不难验证，一个认知链由以$[K]$为最小元的闭集链、$\emptyset$和W所构成。

6　相关工作

epistemic entrenchment 作为刻画信念收缩的一类重要语义结构被广泛采用并被通过各种方式推广。如 Zhang 等[13]刻画多语句信念变化用到的“nicely ordered partition”正是 epistemic entrenchment 的推广。然而与 epistemic entrenchment 类似，nicely ordered partition 亦为一种理论模型，需要满足若干公理，而不便于直接构造。Lindström 等[18]较早地通过L中的逻辑语句诱导模型集(或极大协调集)上一个拓扑结构，并通过该拓扑结构来刻画信念修正算子。Meng 等[8]用这种拓扑结构给球系统一个拓扑式刻画。他们发现每一个 AGM 信念修正算子都可以用特殊的闭集链来刻画。这种特殊闭集链满足如下性质，即对任意的语句φ，存在一个最小的链元U，使得$[\varphi]\cap U\neq\emptyset$。满足该属性的这种特殊的闭集链是认知链，反之，对任意一个认知链，却未必满足该属性。那么能否用认知链刻画信念修正算子呢？由于闭集链结构既与收缩算子有关亦与修正算子有关，因此闭集链结构可以用来研究同时包含信念收缩和信念修正的迭代信念变化。我们将在今后的工作中展开讨论。

结束语　本文通过引入模型集上的拓扑结构，给出了 epistemic entrenchment 的拓扑式刻画。我们发现在刻画 AGM 信念收缩算子时一个 epistemic entrenchment 等价于一个包含$\emptyset$和W的由闭集构成的链，称为认知链。于是认知链可以作为刻画 AGM 信念收缩算子的一种新的模型。相较于 epistemic entrenchment，它的结构更加简单，易于构造。

参 考 文 献

[1] Harmelen F, Lifschitz V, Porter B. Handbook of Knowledge Representation[M]. Elsevier Science, 2008: 317-359

[2] Alchourron C E, Gärdenfors P, Makinson D. On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions[J]. Journal of Symbolic Logic, 1985, 50(2): 510-530

[3] Peppas P. The limit assumption and multiple revision[J]. Journal of Logic and Computation, 2004, 14(3): 355-371

[4] Peppas P, Koutras D, Williams M A. Maps in multiple belief change[J]. ACM Transactions on Computational Logic, 2012, 13(4): 929-956

[5] Meng Hua, Kou Hui, Li San-jiang. Belief revision with general epistemic state[C]//Proc. of AAAI 2015. AAAI Press, 2015

[6] Gärdenfors P, Makinson D. Revisions of knowledge systems using epistemic entrenchment[C]//Proceedings of the 2nd Conference on Theoretical Aspects of Reasoning About Knowledge. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1988: 83-95

[7] Peppas P, Williams M A. Belief change and semiorders[C]//Proceedings of the Fourteenth International Conference Principles of Knowledge Representation and Reasoning. 2014

[8] Meng Hua, Li San-jiang. A Topological Characterisation of Belief Revision over Infinite Propositional Language [C]// LNAI: Proc of PRICAI-2014. Berlin: Springer, 2014: 77-90

[9] Hansson S O. Multiple and iterated contraction reduced to single-step single sentence contraction [J]. Synthese, 2010, 173(2): 153-177

[10] Darwiche A, Pearl J. On the logic of iterated belief revision[J]. Artificial Intelligence, 1997, 89(1): 1-29

[11] Lindström L, Segerberg K. 21 modal logic and philosophy. Studies in Logic and Practical Reasoning [M]. Elsevier B. V, 2007: 1149-1214

[12] Rott H, Pagnucco M. Severe withdrawal (and recovery) [J]. Journal of Philosophical Logic, 1999, 28(5): 501-547

[13] Zhang D, Foo N. Infinitary belief revision [J]. Journal of Philosophical Logic, 2001, 30(6): 525-570

[14] Harper W. Rational conceptual change[C]//Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association. Symposia and Invited Papers, Vol. 2, 1977: 462-494

[15] Levi I. The enterprise of knowledge [M]. Cambridge: MIT Press, 1980

[16] Grove A. Two modellings for theory change [J]. Journal of Philosophical Logic, 1988, 17(2): 157-170

[17] Katsuno H, Mendelzon A O. Propositional knowledge base revision and minimal change [J]. Artificial Intelligence, 1991, 52(3): 263-294

[18] Jin Y, Thielscher M. Iterated belief revision, revised [J]. Artificial Intelligence, 2007, 171(1): 1-18

[19] Darwiche A, Pearl J. On the logic of iterated belief revision [J]. Artificial Intelligence, 1997, 89(1): 1-29

[20] Surendonk T. Revising some basic proofs in belief revision [R]. 1997

[21] Kelley J. General topology [M]. Springer, 1975