

# RCC 的可数核心模型

赵晓蓉<sup>1</sup> 余泉<sup>2,3</sup> 王驹<sup>3</sup>

(黔南民族师范学院计算机科学系 都匀 558000)<sup>1</sup> (黔南民族师范学院数学系 都匀 558000)<sup>2</sup>  
(桂林电子科技大学广西可信软件重点实验室 桂林 541004)<sup>3</sup>

**摘要** 空间逻辑是人工智能领域中的研究热点,RCC 系统(GRCC 系统)是其中最受关注的一个形式化系统。从连接关系的冗余和非冗余性质出发,给出了核心模型的定义,并且证明了核心模型的存在性定理。讨论了 RCC 模型的个体(相当于空间中的物体)内部连通性,证明了该内部连通性是一阶语义可定义的。基于内部连通性,证明了核心模型的外延定理。

**关键词** 空间逻辑,RCC,最小连通,核心模型

**中图分类号** TP301.6 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.4.049

## On Countable Core Models of RCC

ZHAO Xiao-rong<sup>1</sup> YU Quan<sup>2,3</sup> WANG Ju<sup>3</sup>

(Department of Computer Science, Qiannan Normal College for Nationalities, Duyun 558000, China)<sup>1</sup>

(Department of Mathematics, Qiannan Normal College for Nationalities, Duyun 558000, China)<sup>2</sup>

(Guangxi Key Laboratory of Trusted Software, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)<sup>3</sup>

**Abstract** Spatial logic is an important branch of knowledge representation and reasoning. RCC(GRCC) is one of the most popular formal systems which attracts most attention. We started from the redundancy and nonredundancy of connection relation, proposed the concept of core-models, and proved the existence theorem of core-models. The internal connectivity of the RCC model was studied, and the first order definable property was proved. We proved the extension theorem of core-models based on internal connectivity.

**Keywords** Spatial logic, RCC, Minimal contactness, Core-models

## 1 引言

目前,关于空间知识表示与推理,特别是拓扑知识表示与推理的形式理论主要有:英国利兹大学计算机研究学院主任 Cohn 教授等人所倡导的区域连接演算(Region Connection Calculus, RCC 理论)<sup>[4]</sup>;美国国家地理信息与分析中心主任 Egenhofer 教授提出的 9-交模型<sup>[6]</sup>和美国 Smith 教授发展的部分拓扑学(mereology-topology)<sup>[7]</sup>。在所有这些理论中,RCC 理论是最有影响力的、研究最深入的定性空间推理的形式体系。我国专家也对其可数模型进行了广泛、深入的研究工作。其中李三江等人的工作受到广泛关注<sup>[1-3,5,11-14]</sup>。

## 2 可数 RCC 模型

### 2.1 一阶逻辑 RCC

**定义 1**<sup>[8]</sup> 令  $A$  是一个布尔代数, $C$  是  $A - \{\perp\}$  上的一种二元关系。称  $\langle A, C \rangle$  为 RCC 理论的一个模型,如果在  $\langle A, C \rangle$  中下述公理成立:

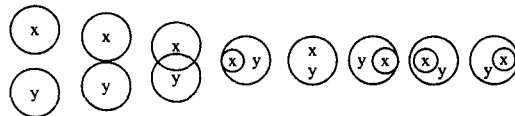
$A_1$ :  $C$  是  $A - \{\perp\}$  上的自反、对称二元关系;

$A_2$ :  $(\forall x \in A - \{\perp, \top\})C(x, x')$ ;

$A_3$ :  $(\forall x, y, z \in A - \{\perp\})C(x, y \vee z) \leftrightarrow C(x, y) \vee C(x, z)$ ;

$A_4$ :  $(\forall x \in A - \{\perp, \top\})(\exists z \in A - \{\perp, \top\}) \rightarrow C(x, z)$ 。

在 RCC 理论中以  $C$  为基础,可以定义其它的二元关系。特别地,在 RCC 中用 8 个互不相交且完备(JEPD)的基本谓词来表示区域间的基本拓扑关系:相离(DC)、外切(EC)、部分相交(PO)、正切真部分(TPP)、相等(EQ)、反正切真部分(TPPI)、非正切真部分(NTPP)和反反正切真部分(NTPPI),如图 1 所示。



从左至右依次为 DC(x,y), EC(x,y), PO(x,y), TPP(x,y),

EQ(x,y), TPPI(x,y), NTPP(x,y), NTPPI(x,y)

图 1 区域间的 RCC-8 关系

### 2.2 连接关系 C 的一些性质

**命题 1** 若  $B = \langle A, C \rangle$  是 RCC 的模型,任意  $x, y \in A$ , 则:

到稿日期:2015-05-12 返修日期:2015-09-29 本文受国家自然科学基金项目(61463044),广西可信软件重点实验室研究课题(kx201330, kx201419),贵州省科技厅项目((2011)LKZ7038, LKQS[2013]29, [2014]7421),贵州省省长基金项目((2012)47)资助。

赵晓蓉(1961—),女,副教授,主要研究方向为算法设计与分析;余泉(1979—),博士,副教授,主要研究方向为知识表示与推理;王驹(1950—),博士,教授,主要研究方向为描述逻辑符人工智能逻辑, E-mail:juwang500909@163.com(通信作者)。

(i)  $x \leq y \rightarrow C(x, y)$ ; (ii)  $y \geq x' \rightarrow C(x, y)$ ; (iii) 若  $x < y$ , 则  $PP(x, y)$  成立; (iv)  $x \wedge y \neq 0 \rightarrow C(x, y)$ 。

证明: (i) 若  $x = y$ , 则由  $A_1$  知  $C(x, y)$ 。若  $x < y$ , 考虑  $y$  相对于  $x, x'$  的表达式的唯一性:  $y = a \vee b, a = x, b = y \wedge x' \neq 0$ 。所以有:  $y = x \vee b, b \neq 0$ 。由公理  $A_3$  知:  $C(x, x)$  或  $C(x, b)$  为真。由于  $C(x, x)$  为真, 因此  $C(x, x \vee b)$  为真, 故  $C(x, y)$  为真。

(ii) 已知  $y \geq x'$ , 又由  $y$  相对于的表达式的唯一性定理有  $y = a \vee b$ , 其中  $b = x', a \leq x$ 。那么, 由公理  $A_3$  知:

$C(x, x')$  或  $C(x, a)$  为真, 因此  $C(x, a \vee b)$  为真, 从而  $C(x, y)$  为真。

(iii)  $PP(x, y) \stackrel{def}{=} C(x, y) \wedge \forall z(C(x, z) \rightarrow C(y, z))$ 。令  $x < y$ , 相对于  $x, x', y$  可以唯一分解为:  $y = x \vee b$ , 其中  $b \leq x'$ 。由于  $C(x, z)$  成立, 因此  $C(x, z)$  或  $C(b, z)$  为真。由此  $C(z, x \vee b)$  为真, 因此  $C(z, y)$  为真, 即  $C(y, z)$  为真。

(iv) 假定  $x \wedge y \neq 0$ , 记  $z = x \wedge y$ 。若  $z = x$ , 则  $x \leq y$ 。由 (i) 知  $C(x, y)$ 。同样  $z = y \rightarrow C(x, y)$ 。又若  $(z < x) \wedge (z < y)$ , 由  $z < y$  可知  $y = z \vee b_1, b_1 \leq z'$ 。所以由 (i) 与  $A_1$  知  $C(y, z)$  为真。由  $z < x$  可知  $x = z \vee b_2, b_2 \leq z'$ 。由  $A_3$  知  $C(y, z \vee b_2)$ , 即  $C(y, x)$  为真, 所以  $C(x, y)$  为真。

**命题 2** 任意 RCC 的模型  $B = \langle A, C \rangle$  都不可能是有穷的。

证明: (反证法) 若  $B$  有穷,  $A$  是一个有穷的布尔代数, 则有原子元素  $a$ , 即是  $a$  与  $0$  之间无其它元素。那么,  $\forall z \in A - \{0\}$ , 或  $z = a$ , 或者  $z \wedge a' \neq 0$ , 所以  $C(z, a')$  为真。这与公理  $A_4$  矛盾。

**命题 3** 若  $B = \langle A, C \rangle$  是 RCC 的可数模型, (i) 任给  $x \in A - \{\perp, \top\}$ , 则  $x' \in A - \{\perp, \top\}$ 。

(ii) 若  $y, z$  满足  $(y \wedge z = 0) \wedge (y \vee z = x')$ , 则一定有  $C(x, y)$  或者  $C(x, z)$ 。

证明: (i) 由补元素的唯一性定理即可以得到;

(ii) 由  $A_2$ , 我们有  $C(x, x')$ , 又因为  $x' = y \vee z$ , 由  $A_3$  得  $C(x, y)$  或者  $C(x, z)$ 。

**命题 4** 若  $C(x, z)$ , 且  $z \leq y$ , 则  $C(x, y)$ 。

证明: 因为  $z \leq y$ , 所以  $y = y \vee z$ 。因为  $C(x, z)$ , 由  $A_3$  可得  $C(x, y)$ 。

**命题 5** 若  $C(x_1, y_1)$ , 且  $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ , 则有  $C(x_2, y_2)$ 。

证明: 因为  $C(x_1, y_1), y_1 \leq y_2$ , 由命题 4 可得  $C(x_1, y_2)$ 。因为  $x_1 \leq x_2$ , 所以存在元素  $y$  使得  $y \vee x_1 = x_2$ , 由公理  $A_3$  可得  $C(x_2, y_2)$ 。

### 2.3 3种可数 RCC 模型

设字符串  $s \in \{0, 1\}^*$ ,  $xs$  已经被定义, 定义  $xs0$  为  $xs$  的前一半左闭右开子区间,  $xs1$  为  $xs$  的后一半左闭右开子区间。记  $X_n = \{xs: s \in \{0, 1\}^*, |s| = n, n \geq 1\}, X_\omega = \{xs: s \in \{0, 1\}^*\}, Y_n = \{xs: s \in \{0, 1\}^*, |s| \leq n, n \geq 1\}$ 。根据  $xs$  的次序,  $Y_n$  可以对应一个深度为  $n$  完全二叉树,  $X_\omega$  可以对应一个无限完全二叉树。

记  $B_n$  为由  $X_n$  生成的  $2^{\{0, 1\}}$  的幂集子代数,  $B$  为由  $X_\omega$  生成的  $2^{\{0, 1\}}$  的幂集子代数。  $B_n$  包含  $2^n$  个原子,  $B_\omega$  是无原子可数的。对任何  $n < m$  都有  $B_n$  是  $B_m$  的子代数, 并且对任意  $n$ ,  $B_n$  是  $B$  的子代数。有  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n, B_n = \{\bigcup_{i=1}^{n-1} x_{s_i} : s_i \in \{0, 1\}^*\}$ , 则

$B$  为可数布尔代数。通过定义如下 3 个连接关系可以分别得到 3 个不同的 RCC 模型。

**定义 2** 假设  $s, t, s'$  是  $\{0, 1\}^*$  上的字符串, 定义  $C$  为  $B$  上的二元自反、对称关系, 且满足以下条件:

- (1) 对任意  $k \in \mathbb{N}$  和两个非空集  $U, V \subseteq X_n$ , 令  $a = \bigvee U, b = \bigvee V$ 。那么,  $C(a, b)$  当且仅当存在  $x \in U, y \in V$  使得  $C(x, y)$  成立;
- (2) 对任意  $k \in \mathbb{N}$ , 若  $\{s, t\} = \{01^k, 10^k\}$ , 则  $C_\varphi(x_s, x_t)$ 。其中  $k \geq 0, 1^k$  记  $11 \cdots 1$  ( $k$  个 1);
- (3) 若  $C(x_s, x_t)$ , 则  $C(x_{s'}, x_{t'})$ ;
- (4) 若  $C_\varphi(x_s, x_t)$ , 则  $C(x_{s_0}, x_{t_0})$ ;
- (5)  $C(x_{s_0}, x_{s_1})$  且  $C(x_{s_1}, x_{s_0})$ ;
- (6) 若  $C(x_s, x_t)$ , 则  $C(x_{s'}, x_{t'})$ ;
- (7) 若  $C(x_s, x_t)$ , 则  $C(x_{s_1}, x_{t_1})$ 。

① 若满足条件 (1)、(2)、(3) 则称此关系为  $C_x$ , 且  $\langle B, C_x \rangle$  是一个可数 RCC 模型, 简记为模型  $B_x$ 。

② 若满足条件 (1)、(2)、(3)、(4) 则称此关系为  $C_\varphi$ , 且  $\langle B, C_\varphi \rangle$  是一个可数 RCC 模型, 简记为模型  $B_\varphi$ 。

③ 满足条件 (1)、(5)、(6)、(7) 则称此关系为  $C_\omega$ , 且  $\langle B, C_\omega \rangle$  是一个可数 RCC 模型, 简记为模型  $B_\omega$ 。

### 2.4 RCC 最小模型

文献[10]给出了最小模型的定义, 并证明了  $B_\omega$  是一个最小模型。

**定义 3** 称一个 RCC 模型  $\langle B, C \rangle$  是一个最小模型, 如果  $\langle B, C \rangle$  能够同构地嵌入到任何 RCC 模型。

**命题 6**  $B_\omega$  是一个最小模型, 即任何一个 RCC 模型都存在它的一个子模型与  $B_\omega$  同构。

文献[9]指出了模型  $B_x$  是 Düntsch 的 RCC 模型  $B$  的一个特例, 并证明了模型  $B_\varphi$  与 Stell 的 RCC 模型  $B_s$  同构, 而模型  $B_x, B_\varphi$  与  $B_\omega$  之间互不同构。

## 3 核心模型 $B_c$

### 3.1 核心模型 $B_c$

下面首先给出核心模型的定义。

**定义 4** (核心模型)  $B_c = \langle A, C \rangle$  是 RCC 的一个核心模型, 若  $B \models RCC$ , 且连接关系  $C$  满足如下的条件: 任给  $\langle x, y \rangle \in C$ , 则  $\langle A, C - \{\langle x, y \rangle\} \rangle$  不是 RCC 的模型。

直观上, 如果从  $C$  中删除任意一个元素, 都会破坏公理  $A_1$  或者公理  $A_2$ , 即原结构将不再是 RCC 模型。

**定理 1** (最小连通内部构成) 令  $B = \langle A, C \rangle$  是 RCC 的可数模型, 则:

(i)  $A$  的任一有穷子代数  $D \subset A$  且  $\{0, 1\} \subset D$ , 则  $\langle D, C \upharpoonright D \rangle$  是  $A_1, A_2, A_3$  的模型。

(ii) 以  $D_n$  记  $D$  的原子元素全体, 即  $D_n = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ , 如果  $C(a_i, a_j) (i \neq j)$ , 则用“ $\leftrightarrow$ ”连接。以每一个  $a_i$  为一个端点, 用  $E$  记连接边的全体, 则  $\langle D_n, E \rangle$  是一个连通图。该图一定有一个包含  $m - 1$  条边的连通生成子图  $\langle D_n, E_n \rangle$ 。

(iii) 若  $\langle D_n, E_n \rangle$  是由  $\langle D, C \upharpoonright D \rangle$  产生的最小连通子图, 定义最小原子关系:  $C(a_i, a_j) \stackrel{def}{=} a_i \leftrightarrow a_j \in E_n$ 。由此产生  $D$  上的连接关系:  $C \stackrel{def}{=} (x \wedge y \neq 0) \vee (y = x') \vee [(x \wedge y = 0) \wedge (y \neq x') \wedge \exists a_i, a_j (C^+(a_i, a_j) \wedge (a_i \leq x) \wedge (a_j \leq y))]$ 。则  $\langle D_n, C \rangle \models A_1 - A_3$ , 如果删去  $C$  中的任何一个二元关系, 那么这个结构将不是  $A_1 - A_3$  的模型。

证明: (i) 由于  $\{0, 1\} \subset D$ , 任给  $x \in D, x'$  也在  $B$  中, 因此  $A_1, A_2$  在  $D$  中成立。若有  $x, y, z \in D$  破坏  $A_3$ , 它在  $B$  中同样

破坏  $A_3$ , 矛盾。

(ii)  $E_n$  的建立: 由  $a_1$  开始,  $a_1$  必与  $\{a_2, a_3, \dots, a_m\}$  中的某一元素  $a_i$  连接, 否则  $A_2$  不成立, 则有:  $a_1 \leftrightarrow a_{i1}$ 。又  $\{a_1, a_{i1}\}$  中某一元必与  $D_n - \{a_1, a_{i1}\}$  中的某一元连接, 否则矛盾。取一个连接可以得到  $\{a_1, a_{i1}, a_{i2}\}$ , 如此下去必定可以得到一个只含  $m-1$  条边的连通图。

(iii) 只需考虑  $x \wedge y = 0$  的情况即可。因为  $D \vdash x \wedge y \neq 0 \rightarrow B \vdash x \wedge y \neq 0$ 。由  $E_i$  是给定的连通图。因为  $D_n$  的任一子集必与它的补集连接, 因此  $C(x, x')$  成立, 即  $\langle D_n, C \rangle \vdash A_2$ 。由定义, 若有  $C(x, y \vee z)$  则应有  $x \wedge (y \vee z) \neq 0$ , 或者有  $x \wedge (y \vee z) = 0$  且  $\exists a_i, a_j, ((a_i < x) \wedge (a_j < y \vee z)) \wedge E_i(\langle a_i, a_j \rangle)$ 。由于  $a_j$  是原子的,  $a_j < y \vee z \rightarrow (a_j < y) \vee (a_j < z)$ , 因此  $C(x, y) \vee C(x, z)$  为真, 即  $A_3$  为真。所以有  $\langle D_n, C \rangle \vdash A_1 - A_3$ 。

我们的做法是先生成最小链, 然后在扩大的有穷域中删除冗余的原子连接后得到已知可数模型中的核心模型。

有了定理 1, 我们可以证明本节的主要定理。

**定理 2(核心模型的存在性)** 任给 RCC 的一个可数模型  $B = \langle A, C \rangle$ , 一定存在连接关系  $C$  的子集  $\bar{C}$ , 使得  $\langle A, \bar{C} \rangle$  是 RCC 的核心模型。

证明: 首先, 模型  $\langle A, C \rangle$  中的  $A$  是无原子的。若存在  $y \in A$  是原子的, 则对  $y'$  来说不存在  $A$  中的元素  $x$  使得  $\neg C(y', x)$ , 破坏公理  $A_4$ , 所以  $A$  是无原子的。

其次, 令  $A' \subset A$ , 如果  $A'$  是可数布尔代数的一个有穷子集, 那么  $A'$  在  $A$  内部生成的子布尔代数一定是有穷的。事实上, 由 stone 定理知,  $A$  一定可以次直分解到直接积  $\prod_{i=1}^{\infty} 2_i$  中, 记为:  $A \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} 2_i$ , 因为  $A'$  是有穷集合, 可以简单地记为  $A' = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 。用归纳法, 令  $A'_1 = \{a_1\}$ , 且  $a_1$  对应到  $\prod_{i=1}^{\infty} 2_i$  中的元素为  $a_1 = \langle t_1, t_2, \dots, t_n, \dots \rangle$ , 其中, 下标集  $N = \mathbb{I} \cup \mathbb{J}$ , 同时  $\mathbb{I} \cup \mathbb{J} = \emptyset$ , 若  $i \in \mathbb{I}$ , 则  $t_i = 1$ , 若  $i \in \mathbb{J}$ , 则  $t_i = 0 (i \in 0, 1, 2, \dots)$ 。若  $\mathbb{I} = \emptyset$ , 则  $a_1 = \langle 0, 0, \dots, 0, \dots \rangle$ ,  $a_1' = \langle 1, 1, \dots, 1, \dots \rangle$ 。那么由  $A'_1$  生成的布尔代数就是 2 型的布尔代数。反之, 若  $\mathbb{J} = \emptyset$ , 它就是上述情形的对称式。若  $\mathbb{I} \neq \emptyset, \mathbb{J} \neq \emptyset$ , 则  $a_1 = \langle t_1, t_2, \dots, t_n, \dots \rangle$ ,  $a_1' = \langle s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \rangle$ , 对任意的  $i \in N, s_i = t_i'$ 。于是  $A_1 \cong 2 \times 2, 2 \times 2$  可以简记为  $2^2$ 。当  $k = n+1$  时, 由于  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  生成的子代数有穷, 并且同构于  $2^m$ , 对  $a_{n+1}$ , 若  $a_{n+1} \in A_n$ , 则断言也成立。若  $a_{n+1} \notin A_n$ , 由定理 1,  $A_n$  中的元素相对于  $a_{n+1}, a_{n+1}'$  有唯一的表达式:  $x = a \vee b$ , 其中  $a < a_{n+1}, b < a_{n+1}'$ , 于是由  $A_n \cup \{a_{n+1}\}$  生成的子代数同构于  $2^{m+1}$ 。

由于  $A$  是可数的, 可以把  $A$  中的元素排成一个可数无穷序列:

$$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3, a_4, \dots \quad (*)$$

归纳定义:  $B_1$  是由  $\{a_1, a_2, a_3\}$  生成的有穷布尔代数;  $D_1$  是  $B_1$  的原子元素集合;  $C_1 = C \upharpoonright D_1$  则  $C_1$  在  $D_1$  中是连通的, 如果不连通则  $B$  不满足  $A_2$ 。因为  $D_1$  是有穷的, 由定理 1 可知  $C_1$  中存在一个最小连通  $\bar{C}_1$ 。假定  $B_n, D_n, C_n, \bar{C}_n$  已定义, 令  $b_n$  是 (\*) 中第一个不在  $B_n$  中出现的  $A$  的元素, 定义  $B_{n+1}$  是由  $B_n \cup \{b_n\}$  生成的  $A$  的有穷布尔代数;  $D_{n+1}$  是  $B_{n+1}$  的原子元素集合;  $C_{n+1} = C \upharpoonright D_{n+1}$ 。

此时, 关键之处是  $\bar{C}_{n+1}$  的设置,  $\bar{C}_{n+1}$  要满足:  $\bar{C}_{n+1}$  是  $C \upharpoonright D_{n+1}$  的最小连通, 且  $\bar{C}_{n+1}$  必须保持  $C_n$  的连接。

若  $a, b \in D_n$ , 又有  $\bar{C}_n(a, b)$ , 则有 4 种情形: (1)  $a, b \in D_{n+1}$ , 这时必须保证  $\bar{C}_{n+1}(a, b)$ ; (2)  $a \in D_{n+1}, b \notin D_{n+1}$ , 这时

必有  $b = d_1 \vee d_2 \vee \dots \vee d_k$ , 其中  $d_1, d_2, \dots, d_k \in D_{n+1}$ 。由于  $\bar{C}_n(a, b)$  成立, 即  $\bar{C}_n(a, d_1 \vee d_2 \vee \dots \vee d_k)$  成立, 由公理  $A_3$ , 存在  $d_i$  使得  $\bar{C}_n(a, d_i)$  成立,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ 。此时定义  $\bar{C}_{n+1}(a, b)$  成立; (3)  $a \notin D_{n+1}, b \in D_{n+1}$ , 与上一种情况类似; (4)  $a, b \notin D_{n+1}$ , 那么应有  $a = d_1 \vee d_2 \vee \dots \vee d_k, b = e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_l, d_i, e_j \in D_{n+1}$ , 于是  $\bar{C}_n(a, b)$  得  $C(d_1 \vee d_2 \vee \dots \vee d_k, e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_l)$ , 由公理  $A_3$ , 一定存在  $d_i, e_j$  使得  $C(d_i, e_j)$  成立, 则把  $\langle d_i, e_j \rangle$  放入  $\bar{C}_{n+1}$  中, 并且只放这一组。

按照以上分析的 4 种情形, 我们构建  $\bar{C}_{n+1}$  如下:

1) 首先假定  $\bar{C}_{n+1}$  是空集。

2) 将  $\bar{C}_n$  的元素(即  $D_n \times D_n$  的一个子集合)去掉自反和对称的情形排成一个有穷列:  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \delta_i = \langle x, y \rangle, x, y \in D_n$ 。从  $\delta_1$  起, 依上述 4 种情况, 将唯一的一个  $\langle d_1, e_1 \rangle$  放入  $\bar{C}_{n+1}$  中, 这里  $d_1, e_1 \in D_{n+1}, \delta_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ , 且  $d_1 \leq x_1, e_1 \leq y_1$ 。依次可得  $C \upharpoonright D_{n+1}$  的子集合  $\{\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_m^*\}$ , 其中  $\delta_i^* = \langle d_i, e_i \rangle$ 。记此集合为:  $\bar{C}_{n+1}(I)$ 。

3) 若  $a \in D_n$ , 并且  $a \in D_{n+1}$ , 即  $a$  在  $B_n, B_{n+1}$  中都是原子元素则忽略; 若  $a \in D_n - B_{n+1}$  则  $a$  在  $B_{n+1}$  中不是原子元素, 且有  $a = d_1 \vee d_2 \vee \dots \vee d_k, d_i \in D_{n+1}, k > 1, 1 \leq i \leq k$ 。此时有:  $C \upharpoonright \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$  是连通的。选择它的一个最小连通记为  $\bar{C}_{n+1}(a)$ 。

注意,  $\bar{C}_{n+1}(I)$  和  $\bar{C}_{n+1}(a)$  的交集为空集。

4)  $\bar{C}_{n+1}(II) = \bar{C}_{n+1}(I) \cup \{\bar{C}_{n+1}(a) \mid a \in D_n - D_{n+1}; a = d_1 \vee d_2 \vee \dots \vee d_k \text{ 且 } C \upharpoonright \{d_1, d_2, \dots, d_k\} \text{ 是连通的}\}$ 。注意, 可能有元素  $a \in D_n - D_{n+1}, C \upharpoonright \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$  是不连通的。此时, 依下述方法自然地将  $\bar{C}_{n+1}(II)$  扩充为  $D_{n+1}$  上的一个最小连通: 将  $D_{n+1}$  的元素进行排序, 其中不连通的子集合的元素都在前面, 写为  $\{w_1, w_2, \dots\}$ 。由于  $C$  在  $D_{n+1}$  上是连通的且  $\bar{C}_{n+1}(II) \subset C, \exists x_1 \in D_{n+1}, C(w_1, x_1)$  成立。若  $\langle w_1, x_1 \rangle \in \bar{C}_{n+1}(II)$ , 略过; 否则, 将其放入  $\bar{C}_{n+1}(II)$  中。记  $E_1 = \{w_1, x_1\}, F_1 = D_{n+1} - E_1$ 。此时, 若  $\bar{C}_{n+1}(II)$  中有在  $E_1$  和  $F_1$  之间的连接, 比如  $\langle x_1, x_2 \rangle$ , 略过, 否则选  $C$  的一个而且只选一个在  $E_1$  和  $F_1$  之间的连接, 比如  $\langle x_1, x_2 \rangle$ , 将其放入  $\bar{C}_{n+1}(II)$  中, 又定义  $E_2 = E_1 \cup \{x_2\}, F_2 = D_{n+1} - E_2$ 。以后的步骤类似。当有穷步后, 程序结束, 得到  $\bar{C}_{n+1}$ 。

5) 加上自反和对称。

最后定义:  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \bar{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n$ , 即  $\bar{C} = \{\langle x, y \rangle \mid \exists n, \exists z_1, z_2 \in \bar{C}_n \text{ 满足 } z_1 \leq x, z_2 \leq y\}$ 。

以上的构造过程保证了如下的性质:

1)  $\bar{C}_{n+1}$  是  $D_{n+1}$  上的最小连通, 并且在以下的意义下保持了  $\bar{C}_n: \forall a, b \in D_n (\bar{C}_n(a, b) \rightarrow \exists d, e \in D_{n+1} (\bar{C}_{n+1}(d, e)))$ 。

由  $\bar{C}_{n+1}(I)$  的设置, 它退化回  $D_n$  时应是  $\bar{C}_n$ 。  $\bar{C}_n$  是  $D_n$  上的最小连通, 删除的  $\bar{C}_{n+1}(I)$  的任一元将立即破坏公理  $A_2$ 。同时, 对任一  $a \in D_n - B_{n+1}$ , 若删除  $\bar{C}_{n+1}(a)$  的任一元, 也破坏公理  $A_2$ 。

2)  $\bar{C} \subseteq C$ , 因为  $\forall n, \bar{C}_n \subseteq C$ , 同时  $B = \langle A, C \rangle$  是 RCC 模型, 所以  $\bar{C} \subseteq C$ 。

3)  $\langle A, \bar{C} \rangle$  是一个 RCC 模型, 由  $\bar{C}$  的定义知它是自反、对称的; 任给  $x \in A$ , 且  $x \neq 0, 1$  由  $B$  的定义可知  $A = B$ , 因为在序列 (\*) 中已经保证没有漏掉  $A$  中的任一个元。由  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  可知,  $\exists n$  使得:  $x, x' \in B_n$ , 那么  $D_n$  就分为不相交的两个集合,  $D_n = \{d_1, d_2, \dots, d_k\} \cup \{e_1, e_2, \dots, e_l\}$  且  $x = \vee d_i; x' = \vee$

$e_j$ 。由于  $\bar{C}_n$  的连通性, 存在  $d_i \leq x, e_j \leq x', \bar{C}_n(d_i, e_j)$  成立。因此有  $\bar{C}_n(x, x')$ , 则有  $\bar{C}(x, x')$  成立, 所以公理  $A_2$  在  $\langle A, \bar{C} \rangle$  中成立; 类似可证  $A_3, A_4$  也成立。

4)  $\langle A, \bar{C} \rangle$  是一个 RCC 核心模型。令  $\langle x, y \rangle \in \bar{C}$ , 若  $x = y$ , 删除  $\langle x, y \rangle$  就会破坏公理  $A_1$ , 若  $x < y$ , 由命题 1 知, 删除  $\langle x, y \rangle$  会导致矛盾。若  $x$  与  $y$  不可比较, 则存在  $n$  使  $x, y \in B_n$  且  $\bar{C}_n(x, y)$  成立。 $\langle x, y \rangle$  不可删除, 否则破坏  $A_2$  或  $A_3$ 。

## 4 一阶可定义连通性及核心模型的外延定理

### 4.1 RCC 中子空间的连通性

考虑实数区间  $I = [0, 1)$ , 令  $S_I = \{[r_1, r_2] \mid 0 \leq r_1 \leq r_2 < 1, r_1, r_2 \text{ 都是有理数}\}$ , 在  $S_I$  上定义运算  $\wedge, \vee, '$  如下:

$\wedge: [r_1, r_2] \wedge [s_1, s_2] = \emptyset$ , 若  $r_2 \leq s_1, [r_1, r_2] \wedge [s_1, s_2] = [s_1, s_2]$ , 若  $r_1 \leq s_1 < r_2$ , 同时  $s = \min\{r_2, s_2\}$ ;

$\vee: [r_1, r_2] \vee [s_1, s_2] = [r_1, s]$ , 若  $r_1 \leq s_1 \leq r_2$ , 同时  $s = \max\{r_2, s_2\}, [r_1, r_2] \vee [s_1, s_2] = \{[r_1, r_2], [s_1, s_2]\}$ , 若  $r_2 \leq s_1$ ;

$': ([r_1, r_2])' = [r_2, 1)$ , 若  $r_1 = 0, ([r_1, r_2])' = \{[0, r_1], [r_2, 1)\}$ , 若  $0 < r_1 < r_2 < 1$ 。

以  $S_I$  作为生成集合, 以  $\wedge, \vee, '$  3 个算子作为生成算子, 归纳定义:

$S_I^{(0)} = S_I; S_I^{(1)} = \{y \mid y = y_1 \wedge y_2 \text{ 或 } y = y_1 \vee y_2 \text{ 或 } y = y_1', \text{ 其中 } y_1, y_2 \in S_I\}$ ;

若  $S_I^{(n)}$  已定义, 则:  $S_I^{(n+1)} = \{y \mid y = y_1 \wedge y_2 \text{ 或 } y = y_1 \vee y_2 \text{ 或 } y = y_1', \text{ 其中 } y_1, y_2 \in S_I^{(n)}\}$ ;

最后令:  $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_I^{(n)}$ 。

**命题 7** 用 1 记  $[0, 1)$ , 0 记空区间, 则  $B = \langle B, 0, 1, \wedge, \vee, ' \rangle$  是一个可数的布尔代数, 并且对任一  $x \in B, x$  或者是一个自身连通的区间, 或者是有穷个这样的区间的并集合, 且具有如下的形式:

$x = \{[r_1, s_1], [r_2, s_2], \dots, [r_n, s_n]\}$ , 其中  $r_i, s_i$  皆为有理数,  $[r_i, s_i] \in S_I, 1 \leq i \leq n$ 。并且满足不等式

$$r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \dots < r_n < s_n$$

证明: 由  $B$  的构造可证。

下面在  $B$  的基础上定义连接关系  $C$  如下:

首先定义  $S_I$  上的连接关系, 记为  $C \upharpoonright S_I$ 。  $\forall x, y \in S_I$ , 记  $x = [r_1, s_1], y = [r_2, s_2]$ , 若以下两个条件:  $r_1 < s_1 < r_2 < s_2$  与  $r_2 < s_2 < r_1 < s_1$  都不成立, 则  $C \upharpoonright S_I(x, y)$  成立。否则有  $\neg C \upharpoonright S_I(x, y)$ 。

现在将  $C \upharpoonright S_I(x, y)$  扩展到  $B$  上:  $\forall x, y \in B, C(x, y)$  成立当且仅当  $\exists z_1, z_2 [(z_1, z_2 \in S_I) \wedge (z_1 \leq x) \wedge (z_2 \leq y) \wedge C \upharpoonright S_I(z_1, z_2)]$  成立。

**命题 8** 结构  $\langle B, C \rangle$  是 RCC 的可数模型。即 RCC 公理  $A_1 - A_4$  在结构  $\langle B, C \rangle$  中成立。

证明: 任给  $x \in B - \{0\}$ , 由  $C$  的定义可知  $C(x, x)$  一定成立, 即公理  $A_1$  在结构  $\langle B, C \rangle$  中成立;

任给  $x \in B - \{0, 1\}$ , 则存在最小的正整数  $n$  使得  $x \in S_I^{(n)}$ , 则  $x = \{[r_1, s_1], [r_2, s_2], \dots, [r_m, s_m]\}$  其中  $1 \leq m \leq 2^{n-1}, r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \dots < r_m < s_m$ 。所以  $x' = \{[0, r_1], [s_1, r_2], \dots, [s_{m-1}, r_m], [s_m, 1)\}$  由  $C \upharpoonright S_I$  的定义可知  $C \upharpoonright S_I([r_m, s_m], [s_m, 1))$ , 又因为  $[r_m, s_m] \leq x, [s_m, 1) \leq x'$ , 且  $[r_m, s_m], [s_m, 1) \in S_I$ , 由命题 1 可得  $C(x, x')$ , 即公理  $A_2$  在结构  $\langle B, C \rangle$  中成立。

任给  $x, y, z \in B - \{0\}$ , 若  $C(x, y)$  成立, 则  $\exists z_1, z_2 [(z_1,$

$z_2 \in S_I) \wedge (z_1 \leq x) \wedge (z_2 \leq y) \wedge C \upharpoonright S_I(z_1, z_2)]$ , 又因为  $z_2 \leq y$ , 则有  $z_2 \leq y \vee z$ , 所以有  $C(x, y \vee z)$ 。同样, 若  $C(x, z)$  成立, 也有  $C(x, y \vee z)$ 。反过来, 若  $C(x, y \vee z)$  成立, 则  $\exists z_1, z_2 [(z_1, z_2 \in S_I) \wedge (z_1 \leq x) \wedge (z_2 \leq y \vee z) \wedge C \upharpoonright S_I(z_1, z_2)]$ , 此时若  $z_2 \leq y$  则有  $C(x, y)$ , 若  $z_2 \leq z$  则有  $C(x, z)$ 。若  $z_2 \leq y, z_2 \leq z$  都不成立, 则必定存在  $z_3 \leq z_2$  使得  $z_3 \leq y$  并且  $(z_2 \wedge z_3') \leq z$ 。又因为  $C \upharpoonright S_I(z_1, z_2)$ , 所以  $C \upharpoonright S_I(z_1, z_3)$  与  $C \upharpoonright S_I(z_1, z_2 \wedge z_3')$  必然有一个成立。则  $C(x, y)$  与  $C(x, z)$  必然有一个成立。总之, 公理  $A_3$  在结构  $\langle B, C \rangle$  中成立; 任给  $x \in B - \{0, 1\}$ , 由  $C$  的定义, 对任意的  $0 < z < x'$  必定有  $\neg C(x, z)$ 。所以公理  $A_4$  在结构  $\langle B, C \rangle$  中成立。

由命题 7 和命题 8 知: 1) 若  $x, y \in S_I$ , 则  $x$  具有  $[r, s)$  型, 并且是自身连通的; 2) 若  $x \in B - S_I$ , 则  $x$  不是自身连通的。比如,  $x = \{[0, 1/4], [3/4, 1)\}$  是  $x \in S_I^{(1)} - S_I^{(0)}$  的一个特例, 这时  $x$  不是自身连通的。

但在这种特殊的情况下, 对于 RCC 的这个模型  $\langle B, C \rangle$ , 可以找到一个一阶的公式将  $S_I$  中的元素和  $B - S_I$  中的元素严格的区分开来。现在讨论这种特殊的情况。

如果在给定的 BCA 结构  $\langle B, C \rangle$  的框架下对每一个  $x \in B$ , 记:  $B_x = \{y \mid y \leq x\}$ , 关系 “ $\leq$ ” 或 “ $<$ ” 在布尔代数  $B = \langle A, 0, 1, \wedge, \vee, ' \rangle$  中是自然导入的。此时, 我们知道  $B_x$  是布尔代数  $B$  的子布尔代数。进一步, 在给定的关系  $C(x, y)$  下, 加上一些限制条件, 可以获得  $\langle B, C \rangle$  的一个子布尔连接代数:  $\langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle$ , 并称  $\langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle$  为  $\langle B, C \rangle$  的子空间。以下的命题将导致 “内部连通” 这一概念的一阶可定义。

**命题 9** 对所有的  $x \in B, \langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle \models A_1 - A_4$  当且仅当  $x \in S_I$ , 即  $x$  是一个形为  $[r, s)$  的左闭右开区间, 其中  $0 \leq r < s \leq 1$ , 且  $r, s$  是有理数。

证明: ( $\Rightarrow$ ) 不失一般性, 只要证明  $x \in S_I^{(1)} - S_I^{(0)}$  的情形即可。此时  $x$  若不是一个形为  $[r, s)$  的左闭右开区间,  $x$  必定具有  $x = \{[r_1, s_1], [r_2, s_2]\}$  的形式, 按照端点的大小的形式排列有:  $r_1 < s_1 < r_2 < s_2$ 。若记  $y_1 = [r_1, s_1], y_2 = [r_2, s_2]$ , 则在布尔代数  $B_x$  中有:  $y_1 \wedge y_2 = 0; y_1 \vee y_2 = x$ 。  $x$  就是  $B_x$  中的最大元 1。这时  $y_2$  是  $y_1$  在  $B_x$  中的补元素。

根据连接关系  $C(x, y)$  的设置,  $C(y_1, y_2)$  是不成立的。所以  $\langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle \not\models A_2$ , 这时有  $\langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle \not\models \text{RCC}$ , 矛盾。所以结论成立。

( $\Leftarrow$ ) 若  $x \in S_I$ , 则  $x$  是具有  $[r, s)$  型的子区间,  $B_x$  中的所有元都是  $[r, s)$  型中的, 当然也是  $S_I$  中的元所生成的。于是, 依照  $C(x, y)$  的设置可以验证对  $\forall z_1, z_2 \in B_x, C \upharpoonright B_x(z_1, z_2)$  成立当且仅当  $C(z_1, z_2)$  在模型  $\langle B, C \rangle$  中成立。所以:

1)  $A_1$  在  $\langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle$  中是自然满足的;

2) 任给  $z_1, z_2 < x$ , 若  $z_1 \wedge z_2 = 0, z_1 \vee z_2 = x$ , 依照命题 7,  $z_1, z_2$  分别是有穷个  $[r, s)$  型的子区间的集合, 它们的连接与否在  $\langle B, C \rangle$  中已定。即很容易验证  $z_1$  中某一个子区间的端点一定是  $z_2$  中另一个子区间的端点, 因而  $C(z_1, z_2)$  成立。于是  $C \upharpoonright B_x(z_1, z_2)$  自然成立, 这说明了  $A_4$  在子结构  $\langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle$  中成立;

3)  $A_3$  的证明可以仿照 2) 进行验证;

4) 任给  $0 < z < x$ , 则  $z$  是  $[r, s)$  的真子集, 且  $z$  相对于  $x$  的补也是非空真子集, 记为  $z_x'$ 。  $z_x'$  必定含  $[r, s)$  型的真子空间, 记为  $[r_1, s_1)$ 。只要取有理数  $r_2, s_2$  使  $r_1 < r_2 < s_2 < s_1$ , 则可知  $B_x$  的元素  $w = [r_2, s_2)$  必定与  $z$  不连接。这就说明了公

理  $A_4$  在子结构  $\langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle$  中成立。于是有,若  $x \in S_I$ , 则  $\langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle \models RCC$ 。

根据以上的证明过程得 RCC 模型中连通性的一阶定义及核心模型的外延性质。

**定义 5** 令  $\langle B, C \rangle$  是 RCC 的一个可数模型,  $x$  是  $B$  的任意一个元素, 称  $x$  是内部连通的, 如果:  $\langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle \models A_1 - A_4$ , 此时也称  $\langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle$  是  $\langle B, C \rangle$  的一个子空间。

显然“ $x$  是内部连通的”或“ $\langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle$  是  $\langle B, C \rangle$  的一个子空间”是二阶属性。变元  $x$  尽管是一阶变量, 但它要满足此属性就与  $B$  本身的真子集相关。下文论述的这个二阶属性是可以降到一阶语言中来定义的。

RCC 的语言就是布尔连接代数的语言  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}$  的个体常量是:  $0, 1$ , 个体变元是:  $x, y, z, \dots$ , 函词:  $\wedge, \vee, ',$  谓词:  $=, C(x, y)$ , 而谓词:  $<, \leq$  分别可定义为:  $x < y$  当且仅当  $(x \wedge y = x)$  且  $(x \neq y)$ ;  $x \leq y$  当且仅当  $(x < y)$  或  $(x = y)$ 。 $\mathcal{L}$  的一个公式称为语句, 若该公式没有自由变元。若对语句中所有的约束变元加上一个一阶可定义的条件就称语句为受围语句。另外, 某个属性在  $\langle B, C \rangle$  中是一阶可定义的, 如果有  $\mathcal{L}$  的一个公式仅含一个自由变元, 即为  $\varphi(x)$ , 使得对所有的  $x \in B$ ,  $\langle B, C \rangle \models \varphi(x)$ , 当且仅当元素  $x$  具有该属性。

依照定义 5, “ $x$  是内部连通的”当且仅当  $\langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle \models A_1 - A_4$ , 那么任给自由变元  $w$  (以区别  $A_1 - A_4$  中的自由变元), 各公式受围于  $w$  的受围语句表达如下 (注意, 这里的  $w$  是自由变元):

1)  $A_1(w)$  的定义:  $\forall x, y \{ (x < w \wedge y < w \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0) \rightarrow [C(x, x) \wedge [C(x, y) \rightarrow C(y, x)]] \}$ ;

2)  $A_2(w)$  的定义:  $\forall x \{ (x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x < w) \rightarrow \forall z_1, z_2 \{ ((z_1 \wedge z_2 = 0) \wedge (z_1 \vee z_2 = w)) \rightarrow C(z_1, z_2) \} \}$ ;

3)  $A_3(w)$  的定义:  $\forall x, y, z \{ (x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0 \wedge x < w \wedge y < w \wedge z < w) \rightarrow [C(x, y \vee z) \leftrightarrow (C(x, y) \vee C(x, z))] \}$ ;

4)  $A_4(w)$  的定义:  $\forall x [ (x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x < w) \rightarrow \exists z \{ (z < w) \wedge \neg (C(x, z)) \} ]$ 。

那么,  $A_1(w) \wedge A_2(w) \wedge A_3(w) \wedge A_4(w)$  就是  $\mathcal{L}$  的包含一个自由变元的一个公式。简单来记, 将后来语句 (公理)  $A_1 - A_4$  中的约束变元用其它某一个变元 (如  $x_1$ ) 替换, 而将受围语句中的  $w$  用  $x$  来替换, 得到公式  $\varphi(x)$ :

$\varphi(x) \stackrel{def}{=} A_1(x) \wedge A_2(x) \wedge A_3(x) \wedge A_4(x)$ , 其中  $x$  在  $\varphi(x)$  中是自由的。

**命题 10** 任给  $x \in B$ , 则有  $\langle B, C \rangle \models \varphi(x)$  当且仅当  $\langle B_x, C \upharpoonright B_x \rangle \models RCC$ , 当且仅当  $x$  是内部连通的。

证明: 可仿照命题 9 的证明。

内部连通概念的提出及其一阶可定义性的确立, 为刻画各种可数模型的内部结构提供了良好的逻辑工具。核心模型存在于每一个可数模型中, 同时存在一个核心模型, 它不同构于  $B_x, B_\varphi, B_w$  中的任一个。

#### 4.2 核心模型的外延性定理

考察在模型  $B_x, B_\varphi$  和  $B_w$  中, 公式  $\varphi(x)$  是如何将模型中的元素分类的。在一个模型中, 若元素  $a$  满足公式  $\varphi(x)$ , 它是什么样的元素, 若不满足公式  $\varphi(x)$ , 又应该是什么样的元素?

这与 3 个模型的基本连接的归纳定义有关。以文献 [9] 中的最小模型  $B_w$  为例, 它的基本连接的归纳定义可以用图 2 (参见文献 [9]) 直观地表示出来。图 2 给出了  $C_1, C_2, C_3$ , 即

前 3 步的连接设置。

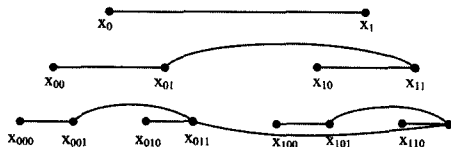


图 2  $B_w$  的连接关系

以下是对  $C_w$  的另外一种归纳定义:

$C_1$ : 取一个直线上的内部连通的子区间, 比如  $[a, b]$  即是  $B_1$  的元素, 其中两端点  $a, b$  是连通的;

$C_2$ : 将此区间分裂为两个不相交的子区间  $I_1, I_2$ , 即是  $B_2$  的元素, 它们的 4 个端点为  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , 但此时它们的连接关系如图 3 所示。

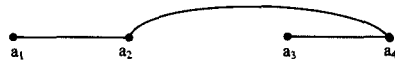


图 3  $C_2$  的连接关系图

注意到  $B_1$  中的  $a$  裂变为  $\{a_1, a_2\}$ , 代表一个连通的子区间,  $b$  裂变为  $\{a_3, a_4\}$ , 代表另一个连通的子区间, 那么应有  $C_2(a_1, a_2), C_2(a_3, a_4)$ 。为了继承  $C_1$  中的连接关系, 我们定义了  $C_2(a_2, a_4)$ , 即  $a_2$  是  $a = \{a_1, a_2\}$  的代表,  $a_4$  是  $b = \{a_3, a_4\}$  的代表, 从而保证  $C_2(a_2, a_4) \rightarrow C_1(a, b)$ , 另外要注意  $\neg C_2(a_1, a_3)$ 。记这个连接类型为  $l_4$  型。

下面是  $B_3$  和  $C_3$  的定义:

$C_3$ : 区间  $[a_1, a_2], [a_3, a_4]$  分别各自裂变为两个不相交的子区间  $I_3, I_4, I_5, I_6$ , 这些区间组成  $B_3$  的元素; 它们的 8 个端点分别是  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8$ , 如图 4 所示。

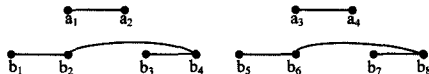


图 4  $a_1, a_2, a_3, a_4$  裂变图

$[a_1, a_2]$  裂变后的内部连接是  $l_4$  型的。但要保证  $C_2$  中的连接能继承下来, 以  $B_3$  中的右端点 (即  $b_4, b_8$ ) 为代表元来保持  $C_2$  中的连接, 即  $C_3(b_4, b_8)$ , 如图 5 所示。

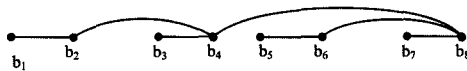


图 5  $C_3$  的连接关系图

$C_{n+1}$ : 在  $B_n$  中必定有  $2^{n-1}$  个小连通区间, 它们各自分裂后共有  $2^n$  个小区间,  $2^{n+1}$  个端点, 构成  $B_{n+1}$  中的元素, 按照顺序, 由  $B_n$  的小区间裂变后端点的连接都是  $l_4$  型的, 定义  $C_{n+1}$  就是把每个小区间的右端点作为代表元, 它们的连接正好是  $C_n$ 。

**命题 11** 任给  $x \in B_w, \varphi(x)$  在  $B_w$  中成立当且仅当存在  $n$ , 使得  $B_n$  第一次生成  $x$ 。即: (i)  $x$  是  $B_n$  的原子元素, 或者 (ii)  $x$  是  $B_n$  中有穷个原子元素  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  的并, 同时  $C_n \upharpoonright \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  是连通的。

证明: ( $\Rightarrow$ ) 假定  $\varphi(x)$  在  $B_w$  中成立,  $x \in B_w$  意味着存在整数  $n$ , 并且  $n$  是最小的整数使  $x$  在  $B_n$  生成的布尔代数中出现。此时或者  $x$  是  $B_n$  的原子元素 (则 (i) 得证), 或者  $x = \vee \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , 其中  $x_1, x_2, \dots, x_k$  是  $B_n$  的原子元素。若  $C_n \upharpoonright \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  不是连通的, 则对  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  的一个非平凡划分, 不失一般性设为  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \cup \{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_k\}$ 。令:  $y_1 = \vee \{x_1, x_2, \dots, x_m\}; y_2 = \vee \{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_k\}$ , 同时有:  $y_1 \wedge y_2 = 0; y_1 \vee y_2 = x$ , 但  $\neg C(y_1, y_2)$ , 则  $x$  不是

RCC 的模型,矛盾,所以(ii)得证。

( $\Leftarrow$ ) (i)若  $x$  是某一个  $B_n$  的原子元素,  $C \uparrow x$  自然满足  $A_1$ , 下面只需证  $A_2$  ( $A_3, A_4$  的证明类似)。在  $B_\omega$  中, 任给  $y_1, y_2$  使  $y_1 \wedge y_2 = 0, y_1 \vee y_2 = x$ , 一定有一个最小的整数  $n_1 > n$ , 使  $B_{n_1}$  第一次生成  $y_1, y_2$ , 于是  $x, y_1, y_2$  可表示为:  $x = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k; y_1 = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_m; y_2 = x_{m+1} \vee x_{m+2} \vee \dots \vee x_k, m < k, x_1, x_2, \dots, x_k$  是  $B_{n_1}$  的原子元素, 依照  $C_\omega$  的设置,  $B_n$  的原子元素在  $B_{n+1}$  至  $B_{n_1}$  中分裂后产生的元素在内部是连通的, 即  $C \uparrow \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  是连通的。因而一定存在某一  $1 \leq i \leq m, m+1 \leq j \leq k$ , 使得  $C(x_i, x_j)$  成立。因此  $C(y_1, y_2)$  成立, 则有  $x$  满足  $A_2$ 。同样可证  $x$  满足  $A_3, A_4$ 。

(ii)证明类似。

依照核心模型的外部构造方法, 用归纳定义来构建每一步的最小连通子图  $C_n$  和原子元素集合  $B_n: B_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, C_1 = \{C(a_1, a_2), C(a_1, a_3), C(a_1, a_4)\}$  且  $C_1$  是自反、对称的, 如图 6 所示。称这样的图为  $T_4$  图,  $a_1$  为  $T_4$  图的中心元素。

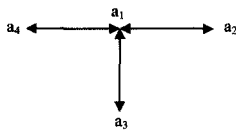


图 6  $C_1$  的连通图

$B_2$  即是每一个  $a_i$  都分解为 4 个原子元素。  $C_2$  是自反、对称的, 且每一个元素分解成的 4 个原子元素仍然构成  $T_4$  型连接, 4 个中心元素同时也构成  $T_4$  型且以  $a_1$  组 ( $a_1$  被切分为 4 个元) 的中心元素为中心元素, 以继承  $C_1$  的连接。

依此类推, 又记:  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n; C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ 。

则  $B$  能生成一个布尔代数, 它是可数无原子的布尔代数。  $C$  是  $B$  上的一个核心连接, 于是  $B_c = \langle B, C \rangle$  即是所要求的核心模型。

在以上归纳构造的每一步中, 在对当前的任何一个原子元素都可以做任意有穷的切分, 切分后可以赋予它任意类型的最小连通。由此可以构成任意连通形式的核心模型。其中,  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$  的演变亦像分形几何中  $T_4$  图的演变。图 7 为  $T_4 \rightarrow (T_4)^2$  的演变图 (即  $C_1$  到  $C_2$  的演变图)。

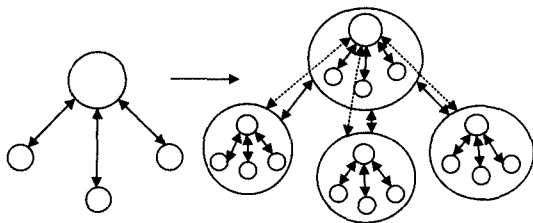


图 7  $T_4 \rightarrow (T_4)^2$  的演变图

值得注意的是: (1) 在文献 [9] 中作为定理已经证明了  $B_x, B_\varphi$  与  $B_\omega$  之间互不同构, 其中  $B_x$  与  $B_\omega$  都是本文所定义的核心模型, 而  $B_\varphi$  不是核心模型, 但它可以在  $B_x$  的基础上扩展  $C(x, y)$  得到。因此, 要证明我们的核心模型不只是涵盖了已知的模型, 而已知模型的确没有涵盖核心模型, 我们只要证明  $B_x, B_\varphi$  与  $B_\omega$  中的任何一个都不与  $B_c$  同构即可。而  $\varphi(x)$  的构造起了证明的关键作用。(2) 命题 11 对  $B_c, B_x, B_\varphi$  与  $B_\omega$  都是成立的。

**定理 3 (核心模型外延性定理)** (i)  $B_\varphi$  与  $B_c$  不同构; (ii)

$B_x$  与  $B_c$  不同构; (iii)  $B_\omega$  与  $B_c$  不同构。

证明: (i) 很显然  $B_\varphi$  不是核心模型, 如它的第二层的  $C(x_{00}, x_{10})$  就可以删去。

(ii)  $B_x$  满足公式:  $\exists z_1, z_2, z_3, z_4 [(\varphi(z_1) \wedge \varphi(z_2) \wedge \varphi(z_3) \wedge \varphi(z_4)) \wedge C(z_1, z_2) \wedge C(z_1, z_3) \wedge C(z_1, z_4) \wedge (z_1 \wedge z_2 = 0) \wedge (z_1 \wedge z_3 = 0) \wedge (z_1 \wedge z_4 = 0) \wedge (z_2 \wedge z_3 = 0) \wedge (z_2 \wedge z_4 = 0) \wedge (z_3 \wedge z_4 = 0)]$ 。这个公式的直观含义是:  $B_x$  中的任何一个区间  $z_1$  只能与左边的一个区间  $z_2$  和右边的一个区间  $z_3$  相连接 (它们两两相交为空)。若第 4 个区间  $z_4$  与  $z_1, z_2, z_3$  都不相交, 则  $z_4$  与  $z_1$  必定不连接。但  $B_c$  满足这个公式的否定, 所以  $B_x$  与  $B_c$  不同构。

(iii)  $B_c$  满足公式:  $\exists z_1, z_2, z_3, z_4 [(\varphi(z_1) \wedge \varphi(z_2) \wedge \varphi(z_3) \wedge \varphi(z_4)) \wedge C(z_1, z_2) \wedge C(z_1, z_3) \wedge C(z_1, z_4) \wedge (z_1 \wedge z_2 = 0) \wedge (z_1 \wedge z_3 = 0) \wedge (z_1 \wedge z_4 = 0) \wedge (z_2 \wedge z_3 = 0) \wedge (z_2 \wedge z_4 = 0) \wedge (z_3 \wedge z_4 = 0) \wedge (\bigvee \{z_1, z_2, z_3, z_4\} = 1) \wedge \neg C(z_2, z_3) \wedge \neg C(z_2, z_4) \wedge \neg C(z_3, z_4)]$ 。这个公式的直观含义是:  $B_c$  可以作为一个  $T_4$  型的子空间的划分。由  $B_c$  的构造可知这是显然的。

但  $B_\omega$  不满足此公式, 先考虑  $C_2$ , 如图 3 所示, 它不可能是  $T_4$  型的。用归纳法可以证明  $B_\omega$  没有这样的  $T_4$  型真子空间划分: 参见图 5, 每一个  $B_{n+1}$  一定由  $2^n$  个最小区间组成。若  $B_{n+1}$  有  $T_4$  型的划分, 记为  $A_1, A_2, A_3, A_4$ 。若每一个小区间都不被这个四元划分分割, 则该四元划分可退化为  $B_n$  上的一个  $T_4$  型的划分, 与归纳假设矛盾。但另一方面, 有一个小区间被分割, 比如  $g \in A_1$ , 但  $f \notin A_1, g$  在  $A_1$  中与任何  $A_i$  的元都不连接。那么  $A_1$  是不连通的。亦矛盾, 因为此时  $\varphi(A_1)$  不成立。所以  $B_\omega$  与  $B_c$  不同构。

**结束语** 语义的研究将直接影响和决定语法体系的优劣。从新的角度考察了已知的 RCC 可数模型, 由连接关系的冗余和非冗余性质定义了一类新的 RCC 模型。提出并讨论了 RCC 模型的个体 (相当于空间中的物体) 的内部连通性; 指出该内部连通性是一阶语言可定义的; 以此为理论工具, 证明了核心模型的外延性质, 为空间逻辑的语义研究扩展了更大的空间。

## 参 考 文 献

- [1] Sioutis M, Condotta J F. Tackling large Qualitative Spatial Networks of scale-free-like structure [M] // Artificial Intelligence: Methods and Applications. Springer International Publishing, 2014: 178-191
- [2] Miguel-Tomé S. Extensions of the heuristic topological qualitative semantic: Enclosure and fuzzy relations [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2015, 63: 214-218
- [3] Wałęga P. What Does It Mean to Reason Qualitatively? [J]. Filozofia Nauki, 2015, 23(1): 59-80
- [4] Cohn A G, Hazarika S M. Qualitative spatial representation and reasoning: An overview [J]. Fundamenta Informaticae, 2001, 46 (1/2): 1-29
- [5] Chen J, Cohn A G, Liu D, et al. A survey of qualitative spatial representations [J]. The Knowledge Engineering Review, 2015, 30(1): 106-136
- [6] Egenhofer M J. reasoning about binary topological relation [C] // Gunther O, Sheck H J, eds. Proceedings of the 2nd Symposium on Large Spatial Databases. SSD'91 (Zurich, Switzerland). Lecture Notes in Computer Science 525, 1991: 143-160

(下转第 273 页)

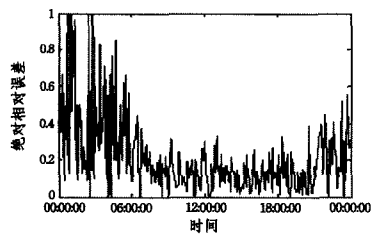


图8 预测时长  $T=15\text{min}$ ,改进预测算法的绝对相对误差

由图5和图6可知,基于改进的混沌预测算法对高速公路交通流量进行的5min预测具有较好的预测效果,其在早上8:00到晚上8:00的绝对相对误差较小,其他时间段的误差较大,这是由于该时间段的交通流量较小,使得其绝对相对误差较大。由图7和图8能够得到相似的结论。实验1、实验2的两种模型的预测误差指标如表2所列。

表2 基于不同预测时长的预测模型的误差指标对比

评价指标	预测时长	
	5min	15min
平均绝对误差 (MAE)	6.807	7.307
平均绝对相对误差 (MAPE)	29.1%	35.1%
均方根误差 (RMSE)	12.386	14.386

从表2可以看出,本文改进的最大Lyapunov指数预测算法在5min和15min时长的预测效果均良好,但是5min的预测精度要比15min预测精度高,一方面是由于随着预测步长的增加,交通流的混沌特性的演化规律性会降低;另一方面是由于随着预测步长的增加,会引入较多的序列噪声,进而降低预测精度。然而,这两种预测步长都能够满足高速公路交通流量短时预测的需求,表明了基于马尔科夫链的改进的最大Lyapunov指数预测算法的可行性和有效性。

**结束语** 本文通过引入马尔科夫链理论改进了最大Lyapunov指数的混沌预测算法,验证结果表明了改进算法的可行性和有效性,但是本文为了减少因引入过多近邻点而可能会增加的噪声和数据冗余,只选择了预测值前一个近邻点作为状态向量的计算参数,将来可以在尽量降低噪声和数据冗余的前提下,研究利用多个近邻点预测相点的演化方向。

## 参考文献

[1] Luo Yi. Analysis and Prediction on the Chaotic Property of Traffic Flow Time Series [J]. Journal of Jishou University (Natural Science Edition), 2013, 34(5): 60-65 (in Chinese)  
罗轶. 交通流的混沌特性分析及其预测[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2013, 34(5): 60-65

[2] Zhang Chun-tao, Ma Qian-li, Peng Hong, et al. Multivariate chaotic

time series phase space reconstruction based on extending dimension by conditional entropy [J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(2): 112-119 (in Chinese)

张春涛, 马千里, 彭宏, 等. 基于条件熵扩维的多变量混沌时间序列相空间重构[J]. 物理学报, 2011, 60(2): 112-119

[3] Gao Guang-yong, Jiang Guo-ping. Prediction of multivariable chaotic time series using optimized extreme learning machine [J]. Acta Physica Sinica, 2012, 62(4): 040506 (in Chinese)  
高光勇, 蒋国平. 采用优化极限学习机的多变量混沌时间序列预测[J]. 物理学报, 2012, 62(4): 040506

[4] Zhang Yong, Guan Wei. Prediction of multivariable chaotic time series based on maximal Lyapunov exponent [J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(2): 756-763 (in Chinese)  
张勇, 关伟. 基于最大Lyapunov指数的多变量混沌时间预测模型[J]. 物理学报, 2009, 58(2): 756-763

[5] Chen Keng, Han Bo-tang. A Survey of State Space Reconstruction of Chaotic Time Series Analysis [J]. Computer Science, 2005, 32(4): 67-70 (in Chinese)  
陈铿, 韩伯棠. 混沌时间序列分析中的相空间重构技术综述[J]. 计算机科学, 2005, 32(4): 67-70

[6] Han Min. Prediction Theory and Method of chaotic time series [M]. Beijing: China Water & Power Press, 2007: 50-51 (in Chinese)  
韩敏. 混沌时间序列预测理论与方法[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2007: 50-51

[7] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining lyapunov exponents from time series [J]. Physica D, 1985, 16(2): 285-371

[8] Li Ying, Liu Bao, Ma Shou-feng. The identification of chaos in traffic flow using surrogate-data technique [J]. Systems Engineering, 2000, 18(6): 54-58 (in Chinese)  
李英, 刘豹, 马寿峰. 交通流时间序列中混沌特性判定的替代数据方法[J]. 系统工程, 2000, 18(6): 54-58

[9] Chen Shu-yan, Wang Wei. Chaos forecasting for traffic flow based on Lyapunov exponents [J]. China Civil Engineering Journal, 2004, 37(9): 96-99 (in Chinese)  
陈淑燕, 王伟. 基于Lyapunov指数的交通量混沌预测方法[J]. 土木工程学报, 2004, 37(9): 96-99

[10] Tang Y S, Li J, Tian Y G, et al. Chaos forecast for traffic conflict flow [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2005, 35(6): 646-648

[11] Kao E P C. 随机过程导论 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2009: 60-62

[12] Zhang Yi, Tian Ai-kui, Han Shi-yuan. An Adaptive Chaotic Particle Swarm RBF Neural Network Optimization Algorithm [J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2015, 29(11): 126-130 (in Chinese)  
张义, 田爱奎, 韩士元. 一种自适应的混沌粒子群优化RBF神经网络算法[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2015, 29(11): 126-130

(上接第246页)

[7] Smith B. Mereotopology: A theory of parts and boundaries [J]. Data and Knowledge Engineering, 1996, 20(3): 287-304

[8] Stell J G. Boolean connection algebras: A new approach to the region-connection calculus [J]. Artificial Intelligence, 2000, 122: 111-137

[9] Li S, Ying M, Li Y. On countable RCC models [J]. Fundamenta Informaticae, 2005, 65(4): 329-351

[10] Li S, Ying M. Generalized Region Connection Calculus [J]. Artificial Intelligence, 2004, 160(1/2): 1-34

[11] Liu W, Zhang X, Li S, et al. Reasoning about cardinal directions

between extended objects [J]. Artificial Intelligence, 2010, 174(12): 951-983

[12] Hawes N, Klenk M, Lockwood K, et al. Towards a Cognitive System that Can Recognize Spatial Regions Based on Context [C]// AAAI. 2012

[13] Kontchakov R, Pratt-Hartmann I, Zakharyashev M. Spatial reasoning with RCC8 and connectedness constraints in Euclidean spaces [J]. Artificial Intelligence, 2014, 217: 43-75

[14] Sabharwal C L, Leopold J L. Evolution of Region Connection Calculus to VRCC-3D+ [J]. New Mathematics and Natural Computation, 2014, 10(2): 103-141