

多粒化的模糊粗糙集代数

孔庆钊^{1,2} 韦增欣³

(华东理工大学理学院 上海 200237)¹ (集美大学理学院 厦门 361021)²

(广西大学数学与信息学院 南宁 530004)³

摘要 众所周知,一个粗糙集代数是由一个集合代数加上一对近似算子构成的。首先利用公理化的方法探讨经典的多粒化模糊粗糙集代数系统,可知经典的多粒化模糊粗糙集代数没有很好的性质;其次,引入具有最小(大)元的等价关系的定义,并给出了基于具有最小(大)元等价关系的多粒化模糊近似算子的概念,在此基础上讨论了模糊粗糙集代数的性质,并得到了诸多结果。

关键词 多粒化,模糊粗糙集代数,具有最小(大)元的等价关系,近似算子

中图分类号 TP18 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.4.042

Fuzzy Rough Set Algebra of Multi-granulation

KONG Qing-zhao^{1,2} WEI Zeng-xin³

(College of Science, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)¹

(College of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)²

(College of Mathematics and Information, Guangxi University, Nanning 530004, China)³

Abstract It is well known that a rough set algebra is a set algebra with added dual pair of rough approximation operators. In this paper, on the one hand, we discussed the classical fuzzy rough set algebra of multi-granulation by axiomatic approach. It is shown that the classical fuzzy rough set algebra do not possess good properties. On the other hand, we defined the concept of equivalence relations with minimum (maximum) element. Moreover, multi-granulation fuzzy approximation operators based on equivalence relations with minimum (maximum) element were defined. We discussed the properties of the fuzzy rough set algebra based on equivalence relations with minimum (maximum) element and got many excellent results.

Keywords Multi-granulation, Fuzzy rough set algebra, Equivalence relation with minimum (maximum) element, Approximation operators

粗糙集理论作为一种用于数据分析的理论自从被波兰数学家 Pawlak 引入以来便引起了诸多学者的广泛关注。粗糙集理论已经被广泛并成功地应用在数据挖掘、模糊识别、医疗诊断、股票分析和水文气象等领域。

在 Pawlak 粗糙集理论中,最基本的概念是由近似空间所导出的上近似算子和下近似算子。这两种算子一般是用两种方法来定义的:结构性方法^[1-7]和公理性方法^[8-12]。公理性方法是以满足某些公理的近似算子作为基本的概念来定义二元关系,使得由二元关系通过构造性方法定义的近似算子及粗糙集代数系统刚好是给定的近似算子和粗糙集代数系统。姚一豫用公理性方法给出了诸多经典的粗糙集代数系统并进行了讨论^[12]。之后,各种模糊粗糙近似算子和粗糙模糊近似算子也被吴伟志用公理化的方法给予了刻画和研究^[13]。

另一方面,我们知道经典的 Pawlak 粗糙集是单粒化的,这使得粗糙集理论在实际应用中受到了很大的限制。因此,钱宇华提出了多粒化的粗糙集理论^[14,15]。多粒化粗糙集理

论一经提出便吸引了从事粗糙集理论研究的众多学者的关注,并得到了许多漂亮的结果^[16-18]。

本文试用公理化的方法建立并探讨多粒化意义下的模糊粗糙集代数系统,得到了一些有意义的结果。

1 预备知识

设 $(U, \mathbb{R})$ 是一个近似空间,其中,

$U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是一个非空有限集;

$\mathbb{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_s\}$ 是等价关系的集合。

设 $R \subseteq \mathbb{R}$, 记 $[x]_R = \{y \mid (x, y) \in R\}$; 同时记 $U/R = \{[x]_R \mid x \in U\}$; 对任意 $x \in U$, 记 $[U/R]_x = \{[x]_{R_1}, [x]_{R_2}, \dots, [x]_{R_s}\}$ 。

定义 1 设 $(U, \mathbb{R})$ 是一个近似空间, $R \subseteq \mathbb{R}$, 对任意的 $X \subseteq U$, 称

$$\underline{R}(X) = \{x \in U \mid [x]_R \subseteq X\}$$

到稿日期:2015-04-09 返修日期:2015-08-14 本文受国家自然科学基金(11161003, 11261006, 61472463, 61402064), 福建省教育厅科技项目(JA15281)资助。

孔庆钊(1978—),男,博士生,讲师,主要研究方向为人工智能与优化理论, E-mail: kongqingzhao@163.com; 韦增欣(1962—),男,博士,教授,主要研究方向为人工智能与优化理论, E-mail: zxwei@gxu.edu.cn。

$$\bar{R}(X) = \{x \in U \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\}$$

分别为 X 的关于等价关系 R 的 Pawlak 下近似和上近似。

定义 2 设 (U, R) 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s \in R$ 是等价关系。对 $\forall x \in U$, 如果存在某个 $[x]_{R_{\min}} \in [U/R]_x$ (或者 $[x]_{R_{\max}} \in [U/R]_x$), 使得对 $\forall [x]_{R_j} \in [U/R]_x, j=1, 2, \dots, s$, 都有 $[x]_{R_{\min}} \subseteq [x]_{R_j}$ (或者 $[x]_{R_j} \subseteq [x]_{R_{\max}}$), 则称 $R_1, R_2, \dots, R_s$ 为具有最小元(或者最大元)的等价关系。

令 $F(U)$ 表示所有定义在 U 上的模糊集的全体。

定义 3^[14,15] 设 (U, R) 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s \in R$ 是等价关系, 则对 $\forall X, Y \in F(U)$, 定义:

$$\overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)(x) = \bigvee_{i=1}^s \{ \bigwedge \{ X(y) \mid y \in [x]_{R_i} \} \}$$

$$\underline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)(x) = \bigwedge_{i=1}^s \{ \bigvee \{ X(y) \mid y \in [x]_{R_i} \} \}$$

称 $\overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)$ 和 $\underline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)$ 分别为 X 的关于等价关系 $R_1, R_2, \dots, R_s$ 的乐观多粒化粗糙下近似和粗糙上近似。分别称 $\overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}$ 和 $\underline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}$ 为 $F(U)$ 上的关于等价关系 $R_1, R_2, \dots, R_s$ 的乐观多粒化粗糙下近似算子和粗糙上近似算子。

定义:

$$\overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)(x) = \bigwedge_{i=1}^s \{ \bigwedge \{ X(y) \mid y \in [x]_{R_i} \} \}$$

$$\underline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)(x) = \bigvee_{i=1}^s \{ \bigvee \{ X(y) \mid y \in [x]_{R_i} \} \}$$

称 $\overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)$ 和 $\underline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)$ 分别为 X 的关于等价关系 $R_1, R_2, \dots, R_s$ 的悲观多粒化粗糙下近似和粗糙上近似。分别称 $\overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}$ 和 $\underline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}$ 为 $F(U)$ 上的关于等价关系 $R_1, R_2, \dots, R_s$ 的悲观多粒化粗糙下近似算子和粗糙上近似算子。

对偶算子和粗糙集代数的定义在文献[19]中有所论述, 但是文献[19]对这些定义的描述是建立在集值算子的基础上的。为了讨论模糊的粗糙集代数系统的性质, 必须对这些定义在模糊集值算子的情形下进行推广。正是基于这样的一种考虑, 于是有如下的定义:

定义 4 算子 $L, H: F(U) \rightarrow F(U)$ 称为对偶的, 如果对 $\forall X \subseteq F(U)$, 它们满足:

$$(L_0) LX = \sim H \sim X$$

$$(H_0) HX = \sim L \sim X$$

定义 5 设 $L, H: F(U) \rightarrow F(U)$ 是一对对偶算子, 如果 L 满足公理 (L_1) 和 (L_2) , 或者等价地, H 满足公理 (H_1) 和 (H_2) , 则称系统 $(F(U), \cap, \cup, \sim, L, H)$ 为模糊的粗糙集代数。

其中, 对 $\forall X, Y \subseteq F(U)$, 有

$$(L_1) LU = U$$

$$(L_2) L(X \cap Y) = LX \cap LY$$

$$(H_1) H\emptyset = \emptyset$$

$$(H_2) H(X \cup Y) = HX \cup HY$$

如果系统 $(F(U), \cap, \cup, \sim, \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}, \underline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i})$ (或者 $(F(U), \cap, \cup, \sim, \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}, \underline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i})$) 满足定义 5, 则称之为乐观(或者悲观)的模糊粗糙集代数。

2 基于等价关系的多粒化模糊粗糙集代数

2.1 基于等价关系的乐观多粒化模糊粗糙集代数

定理 1^[14] 设 (U, R) 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是等价关系, 对 $\forall X, Y \in F(U)$, 有

$$(1) \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(U) = \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(U) = U$$

$$(2) \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(\emptyset) = \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(\emptyset) = \emptyset$$

$$(3) \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X) \subseteq X \subseteq \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)$$

$$(4) X \subseteq Y \Rightarrow \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X) \subseteq \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(Y)$$

$$(5) X \subseteq Y \Rightarrow \underline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X) \subseteq \underline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(Y)$$

$$(6) \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X \cap Y) \subseteq \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X) \cap \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(Y)$$

$$(7) \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X \cup Y) \supseteq \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X) \cup \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(Y)$$

$$(8) \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(\sim X) = \sim \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)$$

$$(9) \underline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(\sim X) = \sim \underline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)$$

由定理 1 不难发现, 若 $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是等价关系, 则系统 $(F(U), \cap, \cup, \sim, \overline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}, \underline{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i})$ 不构成模糊粗糙集代数。

2.2 基于等价关系的悲观多粒化模糊粗糙集代数

定理 2^[15] 设 (U, R) 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是等价关系, 对 $\forall X, Y \in F(U)$, 有

$$(1) \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(U) = \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(U) = U$$

$$(2) \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(\emptyset) = \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(\emptyset) = \emptyset$$

$$(3) \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X) \subseteq X \subseteq \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)$$

$$(4) X \subseteq Y \Rightarrow \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X) \subseteq \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(Y)$$

$$(5) X \subseteq Y \Rightarrow \underline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X) \subseteq \underline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(Y)$$

$$(6) \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X \cap Y) = \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X) \cap \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(Y)$$

$$(7) \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X \cup Y) = \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X) \cup \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(Y)$$

$$(8) \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(\sim X) = \sim \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)$$

$$(9) \underline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(\sim X) = \sim \underline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}(X)$$

由定理 2 和定义 5, 显然有下面定理 3。

定理 3 设 (U, R) 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是等价关系, 则 $(F(U), \cap, \cup, \sim, \overline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i}, \underline{PR}_{\sum_{i=1}^s R_i})$ 构成模糊粗糙集代数。

3 基于具有最小(大)元等价关系的多粒化模糊粗糙集代数

3.1 基于具有最小元等价关系的乐观多粒化模糊粗糙集代数

定理 4 设 (U, R) 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是具有最小元的等价关系, 对 $\forall X, Y \in F(U)$, 有

$$(1) \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X \cap Y)}} = \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)}} \cap \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (Y)}}$$

$$(2) \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X \cup Y)}} = \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)}} \cup \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (Y)}}$$

证明: (1)($\Rightarrow$): 由定理 1 显然可得。

($\Leftarrow$): 对 $\forall x \in U$, 由定义 3, 有

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)}}(x) &= \bigvee_{i=1}^s \{ \wedge \{ X(y) | y \in [x]_{R_i} \} \} \\ &= \wedge \{ X(y) | y \in [x]_{R_{\min}} \} \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (Y)}}(x) &= \bigvee_{i=1}^s \{ \wedge \{ Y(y) | y \in [x]_{R_i} \} \} \\ &= \wedge \{ Y(y) | y \in [x]_{R_{\min}} \} \end{aligned}$$

从而可得

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)}} \cap \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (Y)}}(x) &= \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)}}(x) \wedge \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (Y)}}(x) \\ &= \{ \wedge \{ X(y) | y \in [x]_{R_{\min}} \} \} \wedge \{ \wedge \{ Y(y) | y \in [x]_{R_{\min}} \} \} \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X \cap Y)}}(x) &= \bigvee_{i=1}^s \{ \wedge \{ (X \cap Y)(y) | y \in [x]_{R_i} \} \} \\ &= \{ \wedge \{ (X \cap Y)(y) | y \in [x]_{R_{\min}} \} \} \\ &= \{ \wedge \{ X(y) \wedge Y(y) | y \in [x]_{R_{\min}} \} \} \\ &\supseteq \{ \wedge \{ X(y) | y \in [x]_{R_{\min}} \} \} \wedge \{ \wedge \{ Y(y) | y \in [x]_{R_{\min}} \} \} \\ &= (\overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)}} \cap \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (Y)}})(x) \end{aligned}$$

综上所述, (1) 成立; (2) 仿(1)的证明可得。

定理 5 设 $(U, \mathbb{R})$ 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是具有最小元的等价关系, 则 $(F(U), \cap, \cup, \sim, \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}}}, \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}}})$ 构成模糊粗糙集代数。

证明: 由定理 1, 定理 4 和定义 5 可得。

根据定义 2, 不难证明有以下引理成立。

引理 1 设 $(U, \mathbb{R})$ 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是具有最小元的等价关系, 对 $\forall y \in [x]_{R_{\min}}$, 有 $[y]_{R_{\min}} = [x]_{R_{\min}}$ 和 $[y]_{R_{\min}} \subseteq [y]_{R_j}, j=1, 2, \dots, s$ 。

定理 6 设 $(U, \mathbb{R})$ 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是具有最小元的等价关系, 对 $\forall X \in F(U)$, 有

$$(1) \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X))}} = \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)}}$$

$$(2) \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X))}}} = \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)}}$$

证明: (1) 对 $\forall x \in U$, 由定义 3 有

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X))}}(x) &= \bigvee_{i=1}^s \{ \wedge \{ \text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)(y) | y \in [x]_{R_i} \} \} \\ &= \wedge \{ \text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)(y) | y \in [x]_{R_{\min}} \} \quad (*) \end{aligned}$$

由引理 1 有

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)}}(y) &= \bigvee_{i=1}^s \{ \wedge \{ X(z) | z \in [y]_{R_i} \} \} \\ &= \wedge \{ X(z) | z \in [y]_{R_{\min}} \} \\ &= \wedge \{ X(y) | y \in [x]_{R_{\min}} \} \quad (**) \end{aligned}$$

结合 (*) 和 (**) 两式, 可得

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\text{OR}_{R_1+R_2} (\text{OR}_{R_1+R_2} (X))}}(x) &= \wedge \{ \text{OR}_{R_1+R_2} (X)(y) | y \in [x]_{R_{\min}} \} \\ &= \{ \wedge \{ X(y) | y \in [x]_{R_{\min}} \} \} \\ &= \bigvee_{i=1}^s \{ \wedge \{ X(y) | y \in [x]_{R_i} \} \} \\ &= \overline{\overline{\text{OR}_{R_1+R_2} (X)}}(x) \end{aligned}$$

(2) 仿(1)的证明可得。

定理 7 设 $(U, \mathbb{R})$ 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是具有最小元的等价关系, 则 $(F(U), \cap, \cup, \sim, \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}}}, \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}}})$ 构成模糊粗糙集代数。

证明: 首先, 根据定理 1, 有

$$(1) \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\sim X))}} = \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\sim \text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X))}}$$

$$= \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\sim \text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X))}}$$

$$= \sim \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X))}}$$

$$(2) \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\sim X))}}} = \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\sim \text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X))}}$$

$$= \sim \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X))}}$$

因此, $\overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}}}$ 和 $\overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}}}$ 是一对对偶算子。

其次, 根据定理 1, 定理 4 和定理 6, 可得:

$$(3) \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (U))}} = \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (U)}} = U$$

$$(4) \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\emptyset)}})}} = \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\emptyset)}} = \emptyset$$

$$\begin{aligned} (5) \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X \cap Y))}} &= \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X) \cap \text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (Y))}} \\ &= \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)) \cap \text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (Y))}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X \cup Y))}}} &= \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X) \cup \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (Y)}})}}} \\ &= \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)) \cup \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (\overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i} (Y))}}}})}}} \end{aligned}$$

由定义 5, 可知定理 7 成立。

于是, 仿照定理 7 的证明, 有下面的定理 8。

定理 8 设 $(U, \mathbb{R})$ 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是具有最小元的等价关系, 则 $(F(U), \cap, \cup, \sim, \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}}}, \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}}}, \dots, \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}}}, \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}}}, \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}}}, \dots, \overline{\overline{\text{OR}_{\sum_{i=1}^s R_i}}})$ 构成模糊粗糙集代数。

3.2 基于具有最大元等价关系的悲观多粒化模糊粗糙集代数

根据定义 2, 不难证明有以下引理成立:

引理 2 设 $(U, \mathbb{R})$ 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是具有最大元的等价关系, 对 $\forall y \in [x]_{R_{\max}}$, 有 $[y]_{R_{\max}} = [x]_{R_{\max}}$ 和 $[y]_{R_j} \subseteq [y]_{R_{\max}}, j=1, 2, \dots, s$ 。

定理 9 设 $(U, \mathbb{R})$ 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是具有最大元的等价关系, 对 $\forall X \in F(U)$, 有

$$(1) \overline{\overline{PR_{\sum_{i=1}^s R_i}} (PR_{\sum_{i=1}^s R_i} (X))} = \overline{\overline{PR_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)}}$$

$$(2) \overline{\overline{PR_{\sum_{i=1}^s R_i} (PR_{\sum_{i=1}^s R_i} (X))}} = \overline{\overline{PR_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)}}$$

证明: (1) 对 $\forall x \in U$, 由定义 3 有

$$\begin{aligned} & \overline{\overline{PR_{\sum_{i=1}^s R_i} (PR_{\sum_{i=1}^s R_i} (X))}}(x) \\ &= \bigwedge_{i=1}^s \{ \bigwedge_{j=1}^s \{ PR_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)(y) | y \in [x]_{R_i} \} \} \\ &= \bigwedge_{i=1}^s \{ PR_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)(y) | y \in [x]_{R_{\max}} \} \quad (*) \end{aligned}$$

由引理 2 可得

$$\begin{aligned} \overline{\overline{PR_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)(y)}} &= \bigwedge_{i=1}^s \{ \bigwedge \{ X(z) | z \in [y]_{R_i} \} \} \\ &= \bigwedge \{ X(z) | z \in [y]_{R_{\max}} \} \\ &= \bigwedge \{ X(y) | y \in [x]_{R_{\max}} \} \quad (**) \end{aligned}$$

结合 (*) 和 (**) 两式, 可得

$$\begin{aligned} & \overline{\overline{PR_{\sum_{i=1}^s R_i} (PR_{\sum_{i=1}^s R_i} (X))}}(x) \\ &= \bigwedge \{ X(y) | y \in [x]_{R_{\max}} \} \\ &= \bigwedge_{i=1}^s \{ \bigwedge \{ X(y) | y \in [x]_{R_i} \} \} \\ &= \overline{\overline{PR_{\sum_{i=1}^s R_i} (X)(x)}} \end{aligned}$$

(2) 仿(1)的证明可得。

定理 10 设 (U, R) 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是具有最大元的等价关系, 则 $(F(U), \cap, \cup, \sim, \overline{\overline{PR_{\sum_{i=1}^s R_i}}}, \overline{\overline{PR_{\sum_{i=1}^s R_i}}})$

构成模糊粗糙集代数。

证明: 仿定理 7 的证明可得。

同理, 还有以下定理。

定理 11 设 (U, R) 是一个近似空间, $R_1, R_2, \dots, R_s$ 是具有最大元的等价关系, 则 $(F(U), \cap, \cup, \sim, \overline{\overline{PR_{\sum_{i=1}^s R_i}}}, \overline{\overline{PR_{\sum_{i=1}^s R_i}}})$

构成模糊粗糙集代数。

结束语 经典的 Pawlak 粗糙集代数系统已经讨论得比较清楚, 理论比较完善。徐伟华等在文献[18]中讨论了多粒化的模糊粗糙集的有关理论和性质, 并得到了许多有意义的结果。而本文则在徐伟华等人工作的基础上进一步讨论了多粒化的模糊粗糙集代数系统。为了得到更为满意的性质, 我们引入具有最小(大)元的等价关系, 讨论了基于具有最小(大)元等价关系的多粒化模糊粗糙集代数系统的性质, 得到了诸多漂亮的结论, 丰富和完善了相关的理论。

参考文献

[1] Boixader D, Jacas J, Recasens J. Upper and lower approximations of fuzzy sets [J]. International Journal of General Sys-

tems, 2000, 29: 555-568

- [2] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 1990, 17: 191-209
- [3] Inuiguchi M. Generalizations of rough sets; from crisp to fuzzy cases[C]//Tsumoto S, Slowinski R, Komorowski J, et al., eds. RSCTC 2004. 2004, 3066: 26-37
- [4] Mi J S, Leung Y, Wu W Z. An uncertainty measure in partition-based fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 2005, 34: 77-90
- [5] Mi J S, Zhang W X. An axiomatic characterization of a fuzzy generalization of rough sets[J]. Information Sciences, 2004, 160: 235-249
- [6] Pei D W, Xu Z B. Rough set models on two universes[J]. International Journal of General Systems, 2004, 33: 569-581
- [7] Slowinski R, Vanderpooten D. A generalized definition of rough approximations based on similarity[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2000, 12: 331-336
- [8] Comer S. An algebraic approach to the approximation of information[J]. Fundamenta Informaticae, 1991, 14: 492-502
- [9] Lin T Y, Liu Q. Rough approximate operators; axiomatic rough set theory[C]// Ziarko W., ed. Rough sets, Fuzzy sets and Knowledge Discovery. Springer, Berlin, 1994: 256-260
- [10] Pomykala J A. Approximation operations in approximation space [J]. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics, 1987, 35: 653-662
- [11] Yao Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universes[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15: 291-317
- [12] Yao Y Y. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets[J]. Information Sciences, 1998, 109: 21-47
- [13] Wu W Z, Mi J S, Zhang W X. Generalized fuzzy rough sets[J]. Information Sciences, 2003, 151: 263-282
- [14] Qian Y H, Liang J Y, Yao Y Y, et al. MGRS: A multi-granulation rough set[J]. Information Sciences, 2010, 180: 949-970
- [15] Qian Y H, Liang J Y, Wei W. Pessimistic rough decision[C]// 2nd International Workshop on Rough Sets Theory. Zhoushan, 2010: 19-21
- [16] Qian Y H, Liang J Y, Yao Y Y, et al. Incomplete multigranulation rough set[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A, 2010, 20: 420-430
- [17] She Y H, He X L. On the structure of the multigranulation rough set model[J]. Knowledge-based Systems, 2012, 36: 81-92
- [18] Xu W H, Wang Q R, Zhang X T. Multi-granulation fuzzy rough sets in a fuzzy tolerance approximation space[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2011, 13(4): 246-259
- [19] Zhang W X, Wu W Z, Liang J Y, et al. The theory and method of rough set[M]. Beijing: Science Press, 2011 (in Chinese)

张文修, 吴伟志, 梁吉业, 等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001

(上接第 205 页)

[13] Yuan Ye, Wang Guo-ren. Answering probabilistic reachability queries over uncertain graphs[J]. Chinese Journal of Computers, 2010, 33(8): 1378-1386

[14] Hu Yu-long, Wen Zhong-hua, Chang Qing, et al. Method of Get State Accessibility of Non-Cyclic in Non-Determinate Plan[J]. Computer Simulation, 2012, 29(5): 114-117 (in Chinese)

胡雨隆, 文中华, 常青, 等. 不确定规划中状态非循环可达关系的求解方法[J]. 计算机仿真, 2012, 29(5): 114-117

[15] Zhang Shuo, Gao Hong, Li Jian-zhong, et al. Efficient Query Processing on Uncertain Graph Databases[J]. Chinese Journal of Computers, 2009, 32(10): 2066-2079 (in Chinese)

张硕, 高宏, 李建中, 等. 不确定图数据库中高效查询处理[J]. 计算机学报, 2009, 32(10): 2066-2079