多粒化的粗糙集代数

孔庆钊[1,2] 韦增欣[3]
(华东理工大学理学院 上海 200237)[1] (集美大学理学院 厦门 361021)[2]
(广西大学数学与信息学院 南宁 530004)[3]

摘 要 众所周知,一个粗糙集代数是由一个集合代数加上一对近似算子构成的。一方面,在公理化的方法下对经典的多粒化粗糙集代数系统进行了讨论,可知经典的粗糙集代数没有很好的性质;另一方面,给出了单调等价关系的定义,并给出了基于单调等价关系的多粒化近似算子的概念,在此基础上讨论了粗糙集代数的性质,并得到了诸多结果。

关键词 多粒化,粗糙集代数,单调的等价关系,近似算子
中图法分类号 TP182 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.2.015

Rough Set Algebra of Multi-granulation

KONG Qing-zhao[1,2] WEI Zeng-xin[3]
(College of Science, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)[1]
(College of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)[2]
(College of Mathematics and Information, Guangxi University, Nanning 530004, China)[3]

Abstract It is well known that a rough set algebra is a set algebra with added dual pair of rough approximation operators. On the one hand, we discussed the classical rough set algebra of multi-granulation by axiomatic approach. It is shown that the classical rough set algebra does not possess good properties. On the other hand, we defined the concept of monotone equivalence relations. Moreover, multi-granulation approximation operators based on monotone equivalence relations were defined. We discussed the properties of the rough set algebra based on monotone equivalence relations and got many excellent results.

Keywords Multi-granulation, Rough set algebra, Monotone equivalence relation, Approximation operators

粗糙集理论作为一种用于数据分析的理论,自从被波兰数学家 Pawlak 引入以来便引起了诸多学者的广泛关注。粗糙集理论已经被广泛并成功地应用在数据挖掘、模糊识别、理疗诊断、股票分析和水文气象等领域。

在 Pawlak 粗糙集理论中,最基本的概念是从近似空间导出的上近似算子和下近似算子。这两种算子一般是用两种方法来定义的:结构性方法和公理性方法。构造性方法是以论域上的二元关系邻域系统和 Boolean 代数等作为基本概念构造性地定义近似算子、以便导出和研究粗糙集代数系统[1-7]。而公理性方法是以满足某些公理的近似算子作为基本的概念来定义二元关系的,使得由二元关系通过构造性方法定义的近似算子及粗糙集代数系统刚好是给定的近似算子和粗糙集代数系统[8-12]。由于粗糙集理论中的上、下近似算子、拓扑空间中的闭包算子和内部算子、模态逻辑学中的可能性算子和必然性算子[13,14]、Dempster-Shafer 证据理论中的似然函数和信任函数都有着密切的联系[15,16],因此粗糙集的数学结构通过公理性方法得到了更为深入的了解。

姚一豫用公理性方法给出了诸多经典的粗糙集代数系统并进行了讨论[12]。各种模糊粗糙近似算子和粗糙模糊近似算子被吴伟志用公理化的方法给出刻画和研究[17,18]。与此同时,模糊粗糙集代数也得到了定义和讨论[19]。

另一方面,由于经典的 Pawlak 粗糙集是单粒化的,使得粗糙集理论在实际应用中受到了很大的限制。因此,钱宇华提出了多粒化的粗糙集理论[20,21]。多粒化粗糙集理论一经提出便吸引了从事粗糙集理论研究的众多学者们的关注,并得到了许多漂亮的结果[22-24]。本文尝试用公理性的方法建立并探讨多粒化意义下的粗糙集代数系统,得到了一些有意义的结果。

1 预备知识

设$(U,\mathbb{R})$是一个近似空间,其中,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是一个非空有限集;$\mathbb{R}=\{R_1,R_2,\cdots,R_m\}$是等价关系的集合。

设$R\subseteq\mathbb{R}$,记$[x]_R=\{y\mid(x,y)\in R\}$,同时,记$U/R=\{[x]_R\mid x\in U\}$。

定义 1[25] 设$(U,\mathbb{R})$是一个近似空间,$R\subseteq\mathbb{R}$,对任意的$X\subseteq U$,称

到稿日期:2015-05-12 返修日期:2015-06-21 本文受国家自然科学基金(11161003,11261006,61472463,61402064),福建省教育厅科技项目(JA15281)资助。

孔庆钊(1978-),男,博士,讲师,主要研究方向为人工智能与优化,E-mail:kongqingzhao@163.com(通信作者);**韦增欣**(1962-),男,博士,教授,主要研究方向为运筹与管理。

$$\underline{R}(X)=\{x\in U\mid[x]_R\subseteq X\}$$

$$\overline{R}(X)=\{x\in U\mid[x]_R\cap X\neq\emptyset\}$$

分别为 X 的关于等价关系 R 的 Pawlak 下近似和上近似。

定义 2 设$(U,\mathbb{R})$是一个近似空间,称集合 $X_1,X_2,\cdots,X_s\subseteq U$ 为单调的,如果能对这 s 个集合重新排序得到 $X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_s}$,使得 $X_{i_1}\subseteq X_{i_2}\subseteq\cdots\subseteq X_{i_s}$。

定义 3 设$(U,\mathbb{R})$是一个近似空间,$R_1,R_2,\cdots,R_s\subseteq\mathbb{R}$ 是等价关系,对 $\forall x\in U$,如果 s 个集合$[x]_{R_1},[x]_{R_2},\cdots,[x]_{R_s}$是单调的,则称 $R_1,R_2,\cdots,R_s$ 为单调的等价关系。

定义 4[20,21] 设$(U,\mathbb{R})$是一个近似空间,$R_1,R_2,\cdots,R_s\subseteq\mathbb{R}$ 是等价关系,对 $\forall X\subseteq U$,分别称

$$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)=\{x\mid\bigvee_{i=1}^{s}([x]_{R_i}\subseteq X)\}$$

$$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)=\{x\mid\bigwedge_{i=1}^{s}([x]_{R_i}\cap X\neq\emptyset)\}$$

为 X 的关于等价关系 $R_1,R_2,\cdots,R_s$ 的乐观多粒化下近似和上近似。分别称$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$ 和$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$ 为 2^U 上的关于等价关系 $R_1,R_2,\cdots,R_s$ 的乐观多粒化下近似算子和上近似算子。

$$\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)=\{x\mid\bigwedge_{i=1}^{s}([x]_{R_i}\subseteq X)\}$$

$$\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)=\{x\mid\bigvee_{i=1}^{s}([x]_{R_i}\cap X\neq\emptyset)\}$$

分别被称为 X 的关于等价关系 $R_1,R_2,\cdots,R_s$ 的悲观多粒化下近似和上近似。分别称$\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$ 和$\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$ 为 2^U 上的关于等价关系 $R_1,R_2,\cdots,R_s$ 的悲观多粒化下近似算子和上近似算子。

定义 5[25] 算子 $L,H:2^U\to 2^U$ 称为对偶的,如果 $\forall X\subseteq U$,其满足:

$(L_0)\ LX=\sim H\sim X$

$(H_0)\ HX=\sim L\sim X$

定义 6[25] 设 $L,H:2^U\to 2^U$ 是一对对偶算子,如果 L 满足公理(L_1)和(L_2),或者等价地,H 满足公理(H_1)和(H_2),则系统$(2^U,\cap,\cup,\sim,L,H)$称为一个粗糙集代数,L,H 称为近似算子。

其中,对 $\forall X,Y\subseteq U$,有

$(L_1)\ LU=U$

$(L_2)\ L(X\cap Y)=LX\cap LY$

$(H_1)\ H\emptyset=\emptyset$

$(H_2)\ H(X\cup Y)=HX\cup HY$

2 基于等价关系的多粒化粗糙集代数

2.1 基于等价关系的乐观多粒化粗糙集代数

定理 1[20] 设$(U,\mathbb{R})$是一个近似空间,$R_1,R_2,\cdots,R_s$ 是等价关系,对 $\forall X,Y\subseteq U$,有

(1)$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(U)=\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(U)=U$

(2)$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\emptyset)=\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\emptyset)=\emptyset$

(3)$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\subseteq X\subseteq\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)$

(4)$X\subseteq Y\Rightarrow\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\subseteq\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y)$

(5)$X\subseteq Y\Rightarrow\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\subseteq\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y)$

(6)$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X\cap Y)\subseteq\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\cap\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y)$

(7)$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X\cup Y)\supseteq\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\cup\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y)$

(8)$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\sim X)=\sim\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)$

(9)$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\sim X)=\sim\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)$

(10)$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))=\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)$

(11)$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))=\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)$

由定理 1 不难发现,若 $R_1,R_2,\cdots,R_s$ 是等价关系,则系统$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i},\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i})$不构成粗糙集代数。

2.2 基于等价关系的悲观多粒化粗糙集代数

定理 2[21] 设$(U,\mathbb{R})$是一个近似空间,$R_1,R_2,\cdots,R_s$ 是等价关系,对 $\forall X,Y\subseteq U$,有

(1)$\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(U)=\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(U)=U$

(2)$\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\emptyset)=\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\emptyset)=\emptyset$

(3)$\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\subseteq X\subseteq\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)$

(4)$X\subseteq Y\Rightarrow\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\subseteq\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y)$

(5)$X\subseteq Y\Rightarrow\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\subseteq\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y)$

(6)$\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X\cap Y)=\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\cap\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y)$

(7)$\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X\cup Y)=\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\cup\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y)$

(8) $\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\sim X)=\sim\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)$

(9)$\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\sim X)=\sim\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)$

(10)$\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))=\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)$

(11) $\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))=\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)$

定理 3 $(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i},\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i})$构成粗糙集代数。

证明:由定理 2 和定义 6 可得。

定理 4 $(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i},\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i})$构成粗糙集代数。

证明:首先,根据定理 2,有

(1)$\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\sim X))=\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\sim\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))$
$=\sim\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))$

(2)$\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\sim X))$
$=\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\sim\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))$
$=\sim\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))$

因此,$\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$ 和$\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$是一对对偶算子。

其次,根据定理 2,可得

(3)$\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(U))=\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(U)=U$

(4)$\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\emptyset))=\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\emptyset)=\emptyset$

(5)$\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X\cap Y))$

$=\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\cap\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y))$

$=\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))\cap\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y))$

(6)$\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X\cup Y))$

$=\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\cup\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y))$

$=\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))\cup\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y))$

由定义 6,可知定理 4 成立。

不妨设$\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\ \underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\cdots\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$是$n(\geqslant 2)$个悲观多粒化下近似算子的复合,而$\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\ \overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\cdots\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$是$n(\geqslant 2)$个悲观多粒化上近似算子的复合。

于是,仿照定理 4 的证明,有下面的定理 5 成立。

定理 5 (2^U,$\cap$,$\cup$,$\sim$,$\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\ \underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\cdots\underline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$,$\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\ \overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\cdots\overline{PM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$) 构成粗糙集代数。

3 基于单调等价关系的多粒化粗糙集代数

3.1 基于单调等价关系的乐观多粒化粗糙集代数

定理 6 设$(U,\mathbb{R})$是一个近似空间,$R_1,R_2,\cdots,R_s$是单调的等价关系,对$\forall X,Y\subseteq U$,有

(1)$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X\cap Y)=\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\cap\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y)$

(2)$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X\cup Y)=\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)\cup\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(Y)$

证明:为了叙述方便且不失一般性,只对两个单调等价关系的情形(即$s=2$)给予证明。

(1) "$\subseteq$"关系由定理 1 显然可得。

对$\forall x\in\underline{OM}_{R_1+R_2}(X)\cap\underline{OM}_{R_1+R_2}(Y)$(不妨设$[x]_{R_1}\subseteq[x]_{R_2}$)

$\Rightarrow x\in\underline{OM}_{R_1+R_2}(X)$且$x\in\underline{OM}_{R_1+R_2}(Y)$

$\Rightarrow[x]_{R_1}\subseteq X$或者$[x]_{R_2}\subseteq X$成立,并且$[x]_{R_1}\subseteq Y$或者$[x]_{R_2}\subseteq Y$成立

$\Rightarrow[x]_{R_1}\subseteq X$且$[x]_{R_1}\subseteq Y$

$\Rightarrow[x]_{R_1}\subseteq X\cap Y$

$\Rightarrow x\in\underline{OM}_{R_1+R_2}(X\cap Y)$

因此,"$\supseteq$"关系得证。

(2)"$\supseteq$"关系由定理 1 显然可得。

对$\forall x\in\overline{OM}_{R_1+R_2}(X\cup Y)$(不妨设$[x]_{R_1}\subseteq[x]_{R_2}$)

$\Rightarrow[x]_{R_1}\cap(X\cup Y)\neq\emptyset$且$[x]_{R_2}\cap(X\cup Y)\neq\emptyset$

$\Rightarrow[x]_{R_1}\cap(X\cup Y)\neq\emptyset$

$\Rightarrow[x]_{R_1}\cap X\neq\emptyset$或者$[x]_{R_1}\cap Y\neq\emptyset$

$\Rightarrow x\in\overline{OM}_{R_1+R_2}(X)$或者$x\in\overline{OM}_{R_1+R_2}(Y)$

$\Rightarrow x\in\overline{OM}_{R_1+R_2}(X)\cup\overline{OM}_{R_1+R_2}(Y)$

因此,"$\subseteq$"关系得证。

定理 7 (2^U,$\cap$,$\cup$,$\sim$,$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$,$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$)构成粗糙集代数。

证明:由定理 1、定理 6 和定义 6 可得。

不妨设$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\ \underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\cdots\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$是$n(\geqslant 2)$个乐观多粒化下近似算子的复合,而$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\ \overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\cdots\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$是$n(\geqslant 2)$个乐观多粒化上近似算子的复合。

仿照定理 5 的证明,有下面的定理成立。

定理 8 (2^U,$\cap$,$\cup$,$\sim$,$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\ \underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\cdots\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$,$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\ \overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\cdots\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$) 构成粗糙集代数。

3.2 基于单调等价关系的乐观和悲观多粒化粗糙集代数

定理 9 设$(U,\mathbb{R})$是一个近似空间,$R_1,R_2,\cdots,R_s$是单调的等价关系,对$\forall X,Y\subseteq U$,有

(1)$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))=\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)$

(2) $\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))=\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X)$

证明:为了叙述方便且不失一般性,只对两个单调等价关系的情形(即$s=2$)给予证明。

(1)由定理 1,显然有

$\underline{OM}_{R_1+R_2}(X)\subseteq\overline{OM}_{R_1+R_2}(\underline{OM}_{R_1+R_2}(X))$

对$\forall x\in\overline{OM}_{R_1+R_2}(\underline{OM}_{R_1+R_2}(X))$(不妨设$[x]_{R_1}\subseteq[x]_{R_2}$)

$\Rightarrow[x]_{R_1}\cap\underline{OM}_{R_1+R_2}(X)\neq\emptyset$且$[x]_{R_2}\cap\underline{OM}_{R_1+R_2}(X)\neq\emptyset$

$\Rightarrow[x]_{R_1}\cap\underline{OM}_{R_1+R_2}(X)\neq\emptyset$

$\Rightarrow\exists y\in[x]_{R_1}$,使得$y\in\underline{OM}_{R_1+R_2}(X)$

$\Rightarrow[y]_{R_1}\subseteq X$或者$[y]_{R_2}\subseteq X$(因为$[y]_{R_1}=[x]_{R_1}$,$[y]_{R_2}=[x]_{R_2}$)

$\Rightarrow[x]_{R_1}\subseteq X$或者$[x]_{R_2}\subseteq X$

$\Rightarrow x\in\underline{OM}_{R_1+R_2}(X)$

$\Rightarrow\overline{OM}_{R_1+R_2}(\underline{OM}_{R_1+R_2}(X))\subseteq\underline{OM}_{R_1+R_2}(X)$

(2)仿照(1)的证明可得。

定理 10 (2^U,$\cap$,$\cup$,$\sim$,$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$,$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$) 构成粗糙集代数。

证明:首先,根据定理 1,有

(1)$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\sim X))$

$=\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\sim\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))$

$=\sim\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))$

(2)$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\sim X))$

$=\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\sim\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))$

$=\sim\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X))$

因此,$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$和$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}$是一对对偶算子。

其次,根据定理 1 和定理 9,可得

(3)$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(U))=\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(U)=U$;

(4)$\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\emptyset))=\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\emptyset)=\emptyset$;

(5)$\overline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(\underline{OM}_{\sum_{i=1}^{s}R_i}(X\cap Y))$

$=\underline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(X\cap Y)$

$=\underline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(X)\cap\underline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(Y)$

$=\overline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(\underline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(X))\cap\overline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(\underline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(Y))$

(6) $\underline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(\overline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(X\cup Y))$

$=\overline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(X\cup Y)$

$=\overline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(X)\cup\overline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(Y)$

$=\underline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(\overline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(X))\cup\underline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(\overline{OM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(Y))$

定理 11 设$(U,\mathbb{R})$是一个近似空间,$R_1,R_2,\cdots,R_s$是单调的等价关系,对$\forall X,Y\subseteq U$,有

(1) $\overline{PM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(\underline{PM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(X))=\underline{PM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(X)$

(2) $\underline{PM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(\overline{PM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(X))=\overline{PM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}}(X)$

证明:仿照定理 9 的证明可得。

定理 12 $(2^U,\cap,\cup,\sim,\overline{PM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}},\underline{PM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}},\underline{PM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}},\overline{PM_{\sum_{i=1}^{s}R_i}})$构成粗糙集代数。

证明:根据定理 2 和定理 11,仿照定理 10 的证明可得。

结束语 经典的 Pawlak 粗糙集代数系统已经讨论得比较清楚,理论比较完善。而本文则在前人工作的基础上进一步讨论了多粒化的粗糙集代数系统。为了得到更为满意的性质,我们引入了单调等价关系,讨论了基于单调等价关系的多粒化粗糙集代数的性质,得到了诸多漂亮的结论,丰富和完善了相关的理论。

参考文献

[1] Boixader D, Jacas J, Recasens J. Upper and lower approximations of fuzzy sets [J]. International Journal of General Systems, 2000, 29(4): 555-568

[2] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 1990, 17(2/3): 191-209

[3] Inuiguchi M. Generalizations of rough sets: from crisp to fuzzy cases[C]// Tsumoto S, Slowinski R, Komorowski J, et al., eds. Rough Sets and Current Trends in Computing. 2004: 26-37

[4] Mi J S, Leung Y, Wu W Z. An uncertainty measure in partition-based fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 2005, 34(1): 77-90

[5] Mi J S, Zhang W X. An axiomatic characterization of a fuzzy generalization of rough sets[J]. Information Sciences, 2004, 160(1-4): 235-249

[6] Pei D W, Xu Z B. Rough set models on two universes[J]. International Journal of General Systems, 2004, 33(5): 569-581

[7] Slowinski R, Vanderpooten D. A generalized definition of rough approximations based on similarity[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2000, 12(2): 331-336

[8] Comer S. An algebraic approach to the approximation of information[J]. Foundamenta Informaticae, 1991, 14(14): 492-502

[9] Lin T Y, Liu Q. Rough approximate operators: axiomatic rough set theory[C]// Ziarko W, ed. Rough sets, Fuzzy sets and Konwledge Discovery. Springer, Berlin, 1994: 256-260

[10] Pomykala J A. Approximation operations in approximation space [J]. Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Mathematics, 1987, 35(1): 653-662

[11] Yao Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universes[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15(4): 291-317

[12] Yao Y Y. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets[J]. Information Sciences, 1998, 109(1-4): 21-47

[13] Vakarelov D. A model logic for similarity relations in Pawlak knowledge representation systems[J]. Foundamenta Informaticae, 1991, 15: 61-79

[14] Wiweger R. On topology rough sets[J]. Bulletin of Polish Academy of Sciences: Mathematics, 1989, 37: 89-93

[15] Wu W Z, Leung Y, Zhang W X. Connections between rough set theory and Dempster-Shafer theory of evidence[J]. International Journal of General Systems, 2002, 31(4): 405-430

[16] Yao Y Y, Lingras P J. Interpretations of belief functions in the theory of roughs[J]. Information Sciences, 1998, 104(1/2): 81-106

[17] Wu W Z, Mi J S, Zhang W X. Generalized fuzzy rough sets[J]. Information Sciences, 2003, 151(3): 263-282

[18] Wu W Z, Zhang W X, Xu Z B. Characterizating Rough Fuzzy Sets in Constructive and Axiomatic Approaches [J]. Chinese Journal of Computers, 2004, 27(2): 197-203 (in Chinese)
吴伟志,张文修,徐宗本,等. 粗糙模糊集的构造与公理化方法[J]. 计算机学报, 2004, 27(1): 197-203

[19] Xu Y H. Fuzzy rough set algebras [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21(2): 121-128 (in Chinese)
徐优红. 模糊粗糙集代数[J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(2): 121-128

[20] Qian Y H, Liang J Y, Yao Y Y, et al. MGRS: A multi-granulation rough set[J]. Information Sciences, 2010, 180(6): 949-970

[21] Qian Y H, Liang J Y, Wei W. Pessimistic rough decision[C]// 2nd International Workshop on Rough Sets Theory. Zhoushan, 2010: 19-21

[22] Qian Y H, Liang J Y, Yao Y Y, et al. Incomplete multigranulation rough set[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A, 2010, 40(2): 420-431

[23] She Y H, He X L. On the structure of the multigranulation rough set model[J]. Knowledge-based Systems, 2012, 36(6): 81-92

[24] Xu W H, Wang Q R, Zhang X T. Multi-granulation fuzzy rough sets in a fuzzy tolerance approximation space[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2011, 13(4): 246-259

[25] Zhang W X, Wu W Z, Liang J Y, et al. The theory and method of rough sets [M]. Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese)
张文修,吴伟志,梁吉业,等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京:科学出版社, 2001