

基于局部比值法的强弦图带权控制集问题的线性时间算法

张修军^{1,2} 吴 璞¹ 杨 洪^{1,2} 邵泽辉^{1,2}

(成都学院(成都大学)信息科学与工程学院 成都 610106)¹

(成都学院(成都大学)模式识别与智能信息处理四川省高校重点实验室 成都 610106)²

摘 要 一个无向图 $G=(V,E)$ 的顶点子集 $D\subseteq V$ 是控制集,当且仅当任意一个顶点 $v\in V-D$ 至少与一个顶点 $u\in D$ 相邻。图 G 中的顶点数最少的控制集称为最小控制集,带权控制集问题是求解给定的顶点带权的无向图 G 的权最小的控制集。结合强弦图的性质,给出基于局部比值法的线性时间算法来求解强弦图带非负权的控制集问题,同时给出了算法复杂度的证明。

关键词 局部比值法,强弦图,带权控制集,线性时间算法

中图分类号 TP393 文献标识码 A

Linear-time Algorithm for Weighted Domination Problem of Strongly Chordal Graph Based on Local Ratio Method

ZHANG Xiu-jun^{1,2} WU Pu¹ YANG Hong^{1,2} SHAO Ze-hui^{1,2}

(School of Information Science and Engineering, Chengdu University, Chengdu 610106, China)¹

(Key Laboratory of Pattern Recognition and Intelligent Information Processing, Institutions of Higher Education of Sichuan Province, Chengdu University, Chengdu 610106, China)²

Abstract In an undirected graph $G=(V,E)$, $D\subseteq V$ is dominating set if and only if any vertex $v\in V-D$ adjacent to at least one vertex $u\in D$. The minimum weight dominating set problem consists of finding a dominating set of a graph G with minimum weight. By applying with the properties of strongly chordal graph, a linear-time algorithm based on local ratio method for the minimum weight dominating set problem on strongly chordal graph was proposed. We also provided the proof of the time complexity of the proposed algorithm.

Keywords Local ratio method, Strongly chordal graph, Weighted dominating set, Linear time algorithm

1 引言

本文讨论的图为无向连通图 $G=(V,E)$,其中 V 为顶点集; E 为边集,即不同顶点构成的无序对。如果 $S\subseteq V$, S 的顶点导出子图 $G[S]$ 定义为 $G(S)=(S,E(S))$,当 $E(S)=\{\{x,y\}\in E|x,y\in S\}$ 。一个无向图称为弦图,当图中任意长度大于 3 的圈都至少包含一个弦,即不存在一个导出 $k(k\geq 4)$ 圈。一个无向图是弦图当且仅当它有一个完美消除序列。文献 [1] 对完美消除序列做了详细的定义。所谓完美消除序列,就是一个有 n 个顶点的无向图 $G=(V,E)$,存在一个 $\infty:\{1,2,\dots,n\}\leftrightarrow V$ 的双射,即有一个顶点序 $\infty:\{v_{i_1},v_{i_2},\dots,v_{i_n}\}$,按这个顶点序删除图 G 中的 v_i 点那么图的余下部分原来与 v_i 相邻的所有点都能构成一个团。一个图存在一个强消除序列 $[v_1,v_2,\dots,v_n]$,那么这个图为强弦图。强消除序列应该满足以下两个条件 [2]:

- 1) 如果 $i < j < k$ 且 $v_i v_j, v_i v_k \in E$, 则 $v_j v_k \in E$;
- 2) 如果 $i < j < k < l$ 且 $v_i v_k, v_i v_l, v_j v_k \in E$, 则 $v_j v_l \in E$ 。

根据条件 1) 可以找出一个完美消除序列。因此每一个

强消除序列都是一个完美消除序列,且每一个强弦图都是弦图。判定一个图是否是强弦图是线性时间的,对于一个有 n 个顶点和 m 条边的图 G ,判定这个图是强弦图并找出一个时间复杂度为 $O(n+m)$ 的强消除序列 [3]。

一个无向图 $G=(V,E)$ 有一个控制集 $D\subseteq V$ 当且仅当任意一个顶点 $v\in V-D$ 至少与一个顶点 $u\in D$ 相邻,即 v 被 u 控制。图 G 中的顶点数最少的控制集被称为最小控制集,其顶点个数被称为控制数 $\gamma(G)$ 。带权控制集问题是求解给定顶点带权的无向图 G 的权最小的控制集,一般情况下要求权值非负。给定一个无向图 $G=(V,E)$ 的最小带权控制集实例 (G,ω) , ω 为一个顶点集到非负实数的一个映射, $\omega:V\rightarrow\mathbb{R}^+$ 表示每个顶点有一个非负的权值 $\omega(v)$ 。为方便表述: $(u,v)\in E$ 表示 u 与 v 两个点相邻。对于一个顶点 $u\in V$, v 的所有相邻点表示为 $N(v)=\{u\in V|(u,v)\in E\}$,即 v 的开邻域, $N[v]=N(v)\cup\{v\}$ 即 v 的闭邻域。若一个集合 $D(D\subseteq V)$ 是一个控制集,那么最小权控制集可以用一个整数线性规划进行描述:

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^n \omega(v_i) x_i$$

本文受国家自然科学基金项目(61309015),成都学院(成都大学)模式识别与智能信息处理四川省高校重点实验室开放基金项目,成都大学·龙泉驿区汽车创意设计试点区项目(2015-CX00-00010-ZF)资助。

张修军(1973-),男,硕士,副教授,主要研究方向为图论及智能计算,E-mail: woodszhang@cdu.edu.cn;吴 璞(1997-),男,主要研究方向为图论,E-mail: puwu1997@126.com(通信作者);杨 洪(1972-),男,博士,讲师,主要研究方向为图论及智能计算,E-mail: yanghong01@cdu.edu.cn;邵泽辉(1978-),男,博士,教授,主要研究方向为图论及智能计算,E-mail: zshao@cdu.edu.cn。

Subject to $\sum_{\substack{v_j \in N[v_i] \\ x_j \in \{0,1\}}} x_j \geq 1, \forall v_i \in V$

图的控制集问题是图论的重要理论问题之一。最小权控制集问题和最小权独立控制集问题对于强弦图来说存在多项式时间算法^[4,8],而这些问题对于弦图来说都是 NP-hard^[5-6]的。强弦图的各种控制集算法得到了广泛的研究^[7-14],同时 Faber 还给出了基于松弛对偶方法强弦图的线性时间算法^[10]。本文给出基于局部比值法的强弦图带权控制集问题的线性时间算法。

2 强弦图带权控制集问题的线性时间算法

局部比值法在近似算法早期就已经出现, Garey 的装箱问题^[15]、Gavril 的无权顶点覆盖问题^[16]、Rosenkrantz 的商旅问题^[17]都采用了类似的想法。1981年, BarYehuda 和 Even^[18]在研究顶点覆盖和集合覆盖问题时,明确提出了局部比值法。由于局部比值法是近似算法的一种有效的方法,因此应用非常广泛。局部比值法通常需要为所求解的问题创建一个权函数,在这个权函数下求解出可行解。

引理 1^[19] 假设求最小值问题 $\min \{c(x) | x \in R\}$ 的权函数 $c(\cdot)$ 可分解为 $c(\cdot) = c_1(\cdot) + c_2(\cdot)$ 。若 $x \in \Omega$ 是关于权函数 $c_1(\cdot)$ 和 $c_2(\cdot)$ 的一个 r -近似解,则 x 也是关于权函数 $c(\cdot)$ 的一个 r -近似解。当 $r=1$ 时, x 就是精确解。

算法根据强弦图的强消除序列 v_1, \dots, v_n , 从 v_1 到 v_n 遍历进行局部比值及减权操作,然后在从最后得到的权为 0 的顶点中选择一些点作为最小带权控制集。本文结合强弦图的性质,给出基于局部比值法的线性时间算法来求解强弦图带非负权的控制集问题,该算法可在线性时间内得到精确解。

为了阐述方便,先对一些变量定义进行说明:集合 D 用于保存最小控制集; $G[N[v_i]]$ 表示 v_i 的闭邻域的点的导出子图;集合 \mathcal{G} 保存 $G[N[v_i]]$; $G[\cdot]$ 表示 \mathcal{G} 中某一个导出子图。

算法的具体说明如下:首先按图的强消除序列循环遍历所有顶点,每遍历一个顶点就查出这个顶点闭邻域的最小权值,然后将这个顶点闭邻域的所有点的权值减去这个最小权值,同时将 $G[N[v_i]]$ 保存在 \mathcal{G} 中。以此循环会得到一个有若干顶点权值为 0 的图及列表 \mathcal{G} 。接着按强消除序列的逆序查找可以用的权值为 0 的点放到控制集 D 中。查找要求是这个 0 不能同时出现在两个以上的 $G[\cdot]$ 中。

算法 1(强弦图带权控制集问题的线性时间算法)

1. 输入:一个含 n 个点的带权强弦图的问题实例 (G, w) , 其中强消除序列为 v_1, \dots, v_n
2. $\text{minValue} = 0$;
3. $D \leftarrow \emptyset$;
4. $\mathcal{G} \leftarrow \emptyset$;
5. for $i_1 = 1, \dots, n$ do
6. $\text{minValue} = N[v_{i_1}]$ 中的最小权值;
7. if $\text{minValue} > 0$ then
8. $w_i = w_i - \text{minValue}, v_i \in N[v_{i_1}]$;
9. add $G[N[v_{i_1}]]$ to \mathcal{G} ;
10. end if
11. end for
12. for $i = n, \dots, 1$ do
13. if $w_i = 0$ 且存在一个 $G[N[\cdot]] \in \mathcal{G}$, 使得 $|G[N[\cdot]] \cap (D \cup \{v_i\})| \geq 2$ then

14. continue;
15. else
16. add v_i to D ;
17. end if
18. end for
19. 输出: D

定理 1 算法 1 可在线性时间内求解强弦图最小带权控制集的精确解。

证明:首先通过算法 1 中第 1-11 行可将目标函数进行如下分解:

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{v_j \in N[v_i]} \delta_i x_j + \sum_{i=1}^n w_i^{n+1} x_i$$

其中 $w_i^1 = w_i$;

$$w_i^{j+1} = \begin{cases} w_i^j, & v_i \notin N[v_j] \\ w_i^j - \delta_j, & v_i \in N[v_j] \end{cases}$$

$$\delta_{j+1} = \min_{v_i \in N[v_{j+1}]} w_i^{j+1}, j \leq n, (w_i^{j+1} \geq w_i^{j+2}, j < j_2)$$

则有 w_i^j 表示程序运行到第 j 行中 $i=j$ 时 w_i 的值。显然,对 $\forall i, j$ 都有 $w_i^j \geq 0$, 因此对 $\forall i$ 有 $\delta_i \geq 0$ 。

设 $t = \{i | \delta_i > 0\}$, $T = \{v_i | i \in t\}$ 。现构造如下 $n+1$ 个顶点赋权图: G_1, G_2, \dots, G_{n+1} , 对 $\forall i$ 有 $G_i \cong G$ 。

$$i \leq n \text{ 时}, g(G_i, v_j) = \begin{cases} 0, & v_j \notin N[v_i] \\ \delta_i, & v_j \in N[v_i] \end{cases}$$

$i = n+1$ 时, $g(G_i, v_j) = w_j^{n+1}$, 即 $g(G_i, v_j)$ 表示 G_i 中顶点 v_j 的权值。

记 $f_i(D)$ 为控制集 D 在 G_i 中的顶点权之和, $f(D)$ 为控制集 D 在 G 中的顶点权之和, 则有

$$f_i(D) = \sum_{j=1}^n g(G_i, v_j) x_j = \sum_{v_j \in N[v_i]} \delta_i x_j, i \leq n$$

则有 $f(D) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(D)$ 。记 M_i 为 G_i 的最小控制集的最小权值。

因此对 G 的一个权最小控制集 D , 有 $f(D) \geq \sum_{i=1}^n M_i$ 。

由引理 1 得, 若某一控制集 D 同时是 G_1, G_2, \dots, G_{n+1} 的权最小控制集, 则 D 为 G 的权最小控制集。

首先 $i=1, \dots, n, M_i = \delta_i$ 且 $M_{n+1} = 0$, 控制集 D 为 $G_i (i=1, \dots, n)$ 权最小控制集 $\Leftrightarrow \forall i \in t$ 有 $|N[v_i] \cap D| < 2$ 。

以下将证明算法 1 中第 12-19 行得到的集合 D 为 $G_i (i=1, \dots, n)$ 权最小控制集。

首先证 D 为 $G_i (i=1, \dots, n)$ 的控制集。因为 $G_i \cong G$, 所以, 该问题等价于证 D 为 G 的控制集。

由算法中第 1-11 行得, 对 $\forall v_i, \exists v_j \in N[v_i]$ 有 $w_j^{n+1} = 0$ (这里的 v_j 特指 $w_j^j = \delta_i$ 的 v_j)。

记 $t_i = \{j | v_j \in N[v_i] \text{ 且 } j \in t\}$;

证明 $\forall h \in t_j$ 有 $h \leq i$ 。

因为对 $\forall v_{h'} \in N[v_j], h' > i$ 有 $w_j^{h'} = 0 \Rightarrow 0 \leq w_{h'}^{h'} \leq w_j^{h'} = 0 \Rightarrow w_{h'}^{h'} = 0 \Rightarrow \delta_{h'} = 0 \Rightarrow h' \notin t$, 从而得证。

因为 v_i 和 v_j 相邻, 对 $\forall v_i$, ①若 $v_j \in D$, 则 v_i 被控制; ② $v_j \notin D$ 。

由算法 1 中第 13-15 行得:

因为 $v_j \notin D$, 所以 $\exists G[N[v_m]] \in \mathcal{G}$, 从而有 $v_j \in D, j' > j$, 使得 $v_j, v_{j'} \in G[N[v_m]] \Leftrightarrow \exists j' > j, h \in t$, 有 $v_j, v_h \in E(G), v_j, v_h \in E(G)$ 。

因为 $j' > j, h \leq i, v_h, v_{j'}, v_h, v_j \in E(G), v_i, v_j \in E(G)$, 如图 1 所示。

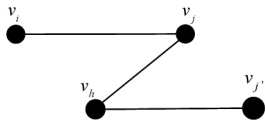


图 1 v_i, v_j, v_h, v_j' 关系图

由强弦图的定义得 $v_i, v_j \in E(G)$, 所以 v_i 也被控制。因此, D 为控制集。

再由算法 1 中第 13—15 行得: 不存在 $i \in t$, 有 $|N[v_i] \cap D| \geq 2$, 因此 D 为 G_1, G_2, \dots, G_n 的权最小控制集, 显然 D 为 G_{n+1} 的权最小控制集。

3 算法分析及示例

为了能更详细地说明算法的运行过程, 以顶点数为 8 的带非负权强弦图为例进行阐述。算法运行过程为两个步骤。第一步为局部比值顶点的权循环遍历减少的过程, 如图 2 所示。

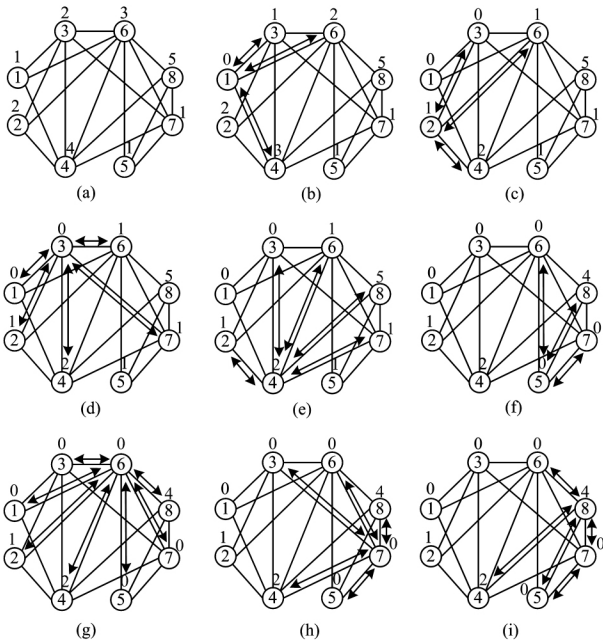


图 2 顶点权值遍历减少过程图

图 2 中顶点圆圈内部数字为顶点的序号, 序号 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 也是此强弦图的强消除序列, 顶点圆圈外部为顶点的权值。顶点局部比值由顶点序号从小到大进行。

(1) v_1 与 v_3, v_4, v_6 顶点相邻, 那么从 v_1 的闭邻域 $N[v_1]$ 中(即 v_1, v_3, v_4, v_6)找最小权值, 这个最小权值为 1。然后用这个最小权值 1 减去 $N[v_1]$ 中所有点的权值, 结果如图 2(b) 所示。同时, 需要将 $N[v_1]$ 顶点的导出子图 $G[N[v_1]]$ 保存在列表 \mathcal{G} 中。

(2) v_2 的闭邻域 $N[v_2]$ 中的权值最小, 也就是图 2(b) 中 v_2, v_3, v_4 和 v_6 的最小权值, 这时为 1。然后用这个最小权值 1 减去 $N[v_2]$ 中所有点的权值, 结果如图 2(c) 所示。同时, 再将 $N[v_2]$ 顶点的导出子图 $G[N[v_2]]$ 保存在列表 \mathcal{G} 中。

(3) v_3 的闭邻域 $N[v_3]$ 中的权值最小, 也就是图 2(c) 中 v_1, v_2, v_3, v_4 和 v_6, v_7 的最小权值, 因为这时最小权值为 0, 所以不需要用这个 0 减 $N[v_3]$ 中所有点的权值, 也不用将 $G[N[v_3]]$ 保存在 \mathcal{G} 中。依次类推, 得到图 2(i) 状态。通过循环局部比值减少闭邻域中的权值后, 发现图 2(i) 的权值为 0 的点为 v_1, v_3, v_5 和 v_6, v_7 。同时, 保存在列表 \mathcal{G} 中的闭邻域的导出子图包括: $G[N[v_1]], G[N[v_2]], G[N[v_5]]$ 。

图 3(a) 为 $G[N[v_1]]$, 图 3(b) 为 $G[N[v_2]]$, 图 3(c) 为 $G[N[v_5]]$ 。图 3 中标记的权值均为局部比值最后的结果值。根据 \mathcal{G} 中保存的导出子图产生的时机, 可以推论出所有 0 权值点都在 \mathcal{G} 中保存的导出子图中。

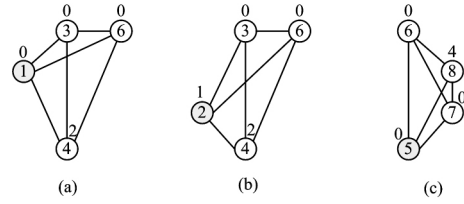


图 3 保存在 \mathcal{G} 中的顶点导出子图

接下来解释算法的第二部分即如何选控制集, 此时按顶点序号从大到小遍历, 即强消除序列的逆序进行。控制集 D 为空, 且只有 $G[N[v_1]], G[N[v_2]], G[N[v_5]]$ 保存在列表 \mathcal{G} 中。通过循环找到第一个权值为 0 的点 v_7 , $|G[N[v_5]] \cap (D \cup \{v_7\})| = 1$ (见图 3(c)), $|G[N[v_2]] \cap (D \cup \{v_7\})| = 0$ (见图 3(b)) 和 $|G[N[v_1]] \cap (D \cup \{v_7\})| = 0$ (见图 3(a)) 都满足小于 2 的条件, 于是 $D = \{v_7\}$ 。然后找到 v_6 权值为 0, 因为 $|G[N[v_5]] \cap (D \cup \{v_6\})| = 2$ (见图 3(c)), 不满足条件, 则跳过 v_6 ; 同理跳过 v_5 ; 再找到 v_3 的权值为 0, 因为 $|G[N[v_5]] \cap (D \cup \{v_3\})| = 1, |G[N[v_2]] \cap (D \cup \{v_3\})| = 1$ 和 $|G[N[v_1]] \cap (D \cup \{v_3\})| = 1$ 都满足条件, 所以将 v_3 加入控制集中, 所以 $D = \{v_7, v_3\}$; 程序查找到 v_1 的权值为 0, 因为 $|G[N[v_1]] \cap (D \cup \{v_1\})| = 2$, 不满足条件, 程序跳过 v_2 直到程序结束。最后得到最小权控制集为 $D = \{v_7, v_3\}$, 控制集的权为 3。当然本例还有其他最有控制集权也为 3, 比如 $D = \{v_6\}$, 因为本算法只考虑最小权值, 所以并不需要考虑控制集顶点数最小的情况。

通过程序的两次循环, 第一次顶点序从小到大进行局部比值, $N[v_i]$ 中所有的顶点权值都减去本闭邻域中的最小权值; 第二次顶点序从大到小, 从每一个保存在列表 \mathcal{G} 的 $G[N[v_i]]$ 中只选出一个权为 0 的顶点即可找到最小带权控制集 D 。

结束语 局部比值法起源于近似算法, 在强弦图性质的支持下, 其近似性能比 $r=1$, 因此可以获得精确解。设输入图的顶点数为 n , 算法 1 的第 2—4 行在常数时间 $O(1)$ 内初始化变量, 第 5—11 行在 $O(n)$ 时间内将图的权值分解, 第 12—18 行在线性时间 $O(n)$ 内挑选满足第 13 行要求的权值为 0 的顶点子集, 该顶点子集将作为最小控制集返回。因此, 算法总的运行时间复杂度为 $O(n)$ 。对于一个给定的图, 可以利用文献[3]的算法在 $O(n+m)$ 的时间复杂度判定是否为强弦图, 同时找出此图的强消除序列。然后再利用本文基于局部比值的线性时间算法即可计算出非负权图的最小带权控制集。本算法较基于松弛对偶方法强弦图的线性时间算法更易于理解和操作。

参考文献

[1] ROSE D J, TARJAN R E. Algorithmic Aspects of Vertex Elimination on Directed Graphs[J]. Siam Journal on Computing, 1975, 34(1): 245-254.
 [2] FARBER M. Characterizations of strongly chordal graphs[J]. Discrete Mathematics, 1983, 43(2/3): 173-189.
 [3] UEHARA R. Linear Time Algorithms on Chordal Bipartite and Strongly Chordal Graphs[M]// Automata, Languages and Programming. Springer Berlin Heidelberg, 2002: 993-1004.

- [4] FARBER M. Applications of LP duality to problems involving independence and domination[D]. Rutgers University, 1982.
- [5] BOOTH K S, JOHNSON J H. Dominating sets in chordal graphs[J]. SIAM Journal on Computing, 1982, 11(1): 191-199.
- [6] FARBER M. Independent domination in chordal graphs[J]. Operations Research Letters, 1982, 1(4): 134-138.
- [7] BROIN M W, LOWE T J. A dynamic programming algorithm for covering problems with (greedy) totally balanced constraint matrices[J]. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 1986, 7(3): 348-357.
- [8] CHANG G J. Labeling algorithms for domination problems in sun-free chordal graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 1988, 22(1): 21-34.
- [9] CHANG G J, NEMHAUSER G L. The k-domination and k-stability problems on sun-free chordal graphs[J]. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 1984, 5(3): 332-345.
- [10] CHANG G J, NEMHAUSER G L. Covering, packing and generalized perfection[J]. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 1985, 6(1): 109-132.
- [11] Farber M. Domination, independent domination, and duality in strongly chordal graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 1984, 7(2): 115-130.
- [12] HOFFMAN A J, KOLEN A W J, Sakarovitch M. Totally-balanced and greedy matrices[J]. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 1985, 6(4): 721-730.
- [13] KRATTSCH D. Finding dominating cliques efficiently, in strongly chordal graphs and undirected path graphs[J]. Discrete Mathematics, 1990, 86(1-3): 225-238.
- [14] WIMER T V. Linear algorithms for the dominating cycle problems in series-parallel graphs, 2-trees and Halin graphs[J]. Congressus Numerantium, 1987, 56.
- [15] GAREY M R, GRAHAM R L, ULLMAN J D. Worst-Case Analysis of Memory Allocation Algorithms[C]// ACM Symposium on Theory of Computing. Denver, Colorado, USA, 1972: 93-94.
- [16] GAREY M R, JOHNSON D S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness[M]. W. H. Freeman and Company Ltd, 1979.
- [17] ROSENKRANTZ D J, STEARNS R E, LEWIS P M. An analysis of several heuristics for the traveling salesman problem[J]. Siam Journal on Computing, 1977, 6(3): 563-581.
- [18] BAR-YEHUDA R, EVEN S. A linear-time approximation algorithm for the weighted vertex cover problem[J]. Journal of Algorithms, 1981, 2(2): 198-203.
- [19] 堵丁柱. 近似算法的设计与分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.

(上接第 98 页)

$$\min y_1 + y_2 + y_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_i(1 - y_i) = 0, y_i(1 - y_i) = 0, i = 1, 2, 3$$

定义罚函数优化:

$$\min_{x,y} F(x, y, M) = \left(\sum_{i=1}^3 y_i - M \right)^2 + M^2 (x_1 + x_2 + x_3 - 2)^2 + M^2 \sum_{i=1}^3 [x_i^2(1 - y_i)^2 + (y_i^2 - y_i)^2]$$

使用 Matlab 计算结果如下:

第 1 步 设一个初始点 $(x_1, x_2, x_3) = (20, 20, 20)$, $(y_1, y_2, y_3) = (20, 20, 20)$, $M_1 = -10$, $N = 10$, 计算 $\min_{x,y} F(x, y, M_1)$, 得近似解 $(x_1, x_2, x_3) = (1.9974, 0.0008, 0.0008)$, $(y_1, y_2, y_3) = (0.9781, -0.0851, -0.0851)$ 。

第 2 步 设 $M_2 = -100$, 计算 $\min_{x,y} F(x, y, M_2)$, 得近似解 $(x_1, x_2, x_3) = (2.0000, 0.0000, 0.0000)$, $(y_1, y_2, y_3) = (0.9998, -0.0010, -0.0010)$ 。

第 3 步 设 $M_3 = -1000$, 计算 $\min_{x,y} F(x, y, M_3)$, 得近似解 $(x_1, x_2, x_3) = (2.0000, 0.0000, 0.0000)$, $(y_1, y_2, y_3) = (1.0000, 0.0000, 0.0000)$ 。

结束语 本文提出了压缩感知问题的一种新的等价表示和一个对应的目标罚函数算法, 证明了该算法的收敛性。该目标罚函数具有 2 阶光滑, 可以使用超线性收敛算法计算无约束罚优化问题, 如牛顿算法。

该算法的计算有效性在实际压缩感知问题中的应用和改进是下一步的研究内容, 另外可以在新的等价表示问题上提出新的罚函数和算法以研究。本文的思路为研究压缩感知问题开辟了一个新的途径, 为研究稀疏优化问题提供了新的思路。

参 考 文 献

- [1] CANDÉS E, TAO T. Near optimal signal recovery from random

projections: Universal encoding strategies[J]. IEEE Trans Info. Theory, 2006, 52(12): 5406-5425.

- [2] 文再文, 印卧涛, 刘歆, 等. 压缩感知和稀疏优化简介[J]. 运筹学报, 2012, 16(3): 49-65.
- [3] 邵文泽, 韦志辉. 压缩感知基本理论: 回顾与展望[J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(1): 1-12.
- [4] 宋长明, 惠庆磊. 压缩感知中图像重构的模型综述[J]. 中原工学院学报, 2016, 27(4): 80-84.
- [5] 陶卿, 高乾坤, 姜纪远, 等. 稀疏学习优化问题的求解综述[J]. 软件学报, 2013, 24(11): 2498-2507.
- [6] 于春梅. 稀疏优化算法综述[J]. 计算机工程与应用, 2014, 50(11): 210-217.
- [7] 兰美辉. 基于惩罚似然优化模型的本体稀疏向量计算算法[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2015, 35(4): 51-55.
- [8] 张海, 梁勇, 徐宗本, 等. 基于 SCAD 罚函数的有噪压缩感知[J]. 数学学报, 2013, 56(5): 767-776.
- [9] WANG Y, WANG J J, XU Z B. Restricted p-isometry properties of nonconvex block-sparse compressed sensing[J]. Signal Processing, 2014, 104: 188-196.
- [10] ZHU Y, WU J, YU G H. A Fast Proximal Point Algorithm for l_1 -Minimization Problem Mincompressed Sensing[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 270: 777-784.
- [11] 文婷婷, 马兆楠, 裴炳. 基于拟牛顿法的压缩感知重构零范数平滑算法[J]. 计算机应用, 2015, 35(S2): 17-19, 23.
- [12] 杜卓明, 李洪安, 康宝生, 等. 二阶收敛的光滑正则化压缩感知信号重构方法[J]. 中国图象图形学报, 2016, 21(4): 490-498.
- [13] MENG Z Q, DANG C Y, JIANG M, et al. Exactness and Algorithm of an Objective Penalty Function[J]. Journal Global Optimization, 2013, 56: 691-711.
- [14] HENG Y, MENG Z Q, SHEN R. An M-Objective Penalty Function Algorithm Under Big Penalty Parameters[J]. J Syst Sci Complex, 2016, 29: 455-471.