

压缩感知优化问题的等价表示及其目标罚函数方法

孟志青 徐蕾艳 蒋敏 沈瑞
(浙江工业大学经贸管理学院 杭州 310023)

摘要 首先定义了压缩感知优化问题的一个等价表示问题,证明了等价表示问题的最优解也是压缩感知优化问题的最优解。然后定义了它的一个具有 2 阶以上的光滑性的目标罚函数,给出了一个迭代求解算法,证明了所提算法的收敛性定理。定理表明,可以通过求解目标罚函数来获得压缩感知优化问题的近似最优解,该方法为研究和解决实际的压缩感知问题提供了一个新的工具。

关键词 压缩感知,等价表示,稀疏优化,目标罚函数

中图分类号 TP391.4 文献标识码 A

Equivalent Representation of Compressed Sensing Optimization Problem and Its Penalty Function Method

MENG Zhi-qing XU Lei-yan JIANG Min SHEN Rui

(College of Economics and Management, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract Firstly, the definition of an equivalent representation for compressed sensing optimization problem was given. It is proved that an optimal solution to the equivalent representation problem is an optimal solution to compressed sensing problem. Then an objective penalty function was defined, which has more than 2 order of smoothness, and its iterative algorithm was given. The convergence of the algorithm was proved. By solving the objective penalty function, the approximate optimal solution of compressed sensing optimization problem can be obtained. This method provides a new tool for us to study and solve the actual compressed sensing.

Keywords Compressive sensing, Equivalent representation, Sparse optimization, Object penalty function

1 引言

压缩感知理论源于信号处理和图像处理研究,目前在信号、图像、定位、故障诊断、大数据分析等领域有广泛应用。Candès 和 Tao 为解决信号压缩问题提出了压缩感知优化问题的正则化表示,这一思想被广泛地应用于随后的压缩感知问题的研究中^[2-4]。压缩感知问题也推动了稀疏优化的广泛研究^[5-6]。正则化思想是将压缩感知优化问题从 0 模转化成 1 模或 p 模范数问题,因为 0 模问题无法直接求解(NP-hard 问题),正则化方法提供了一种解决压缩感知问题的重要途径。

近年来,压缩感知问题的求解方法大多局限在正则化表示这一思路,主要思路有如下几种:1)利用罚函数的正则化表示,如文献^[7-8];2)利用 p 模构造新的正则表示,如文献^[9-10];3)利用光滑逼近 0 模函数的正则表示,这样可以提高 1 模表示的光滑性,采用收敛更快的算法,如文献^[11-12]。还有其它表示方法。

研究者针对不同的正则表示法提出了不同的算法,有关压缩感知优化算法主要有活动集方法、迭代投影算法、凸规划法、交替方向法和增广拉格朗日法等^[2-5]。这些算法用于解决不同的压缩感知问题, $p(0 < p \leq 1)$ 模正则化表示由于受到光滑性限制,除了采用进化计算方法外,在设计算法时需要考虑光滑化问题。由于 p 模问题仅在一定条件下可以得到 0 模问题的最优解,因此 p 模问题在应用时不一定有效,需要寻

找更好的求解方法。为此,本文提出了一种压缩感知 0 模问题的新表示,它等价于 0 模问题,同时提出了一种目标罚函数方法来求解这种新的问题。

罚函数是求解约束优化的一种重要方法,它是将约束优化问题转化成无约束优化题的方法,对于简化约束优化问题起到关键作用。其由于使用简单、便于掌握,受到许多工程优化研究者和应用者的青睐。压缩感知的 p 模问题的正则化表示本质上可以看做是一种精确罚函数的形式。罚函数有 2 次、低阶、精确等多种形式,Meng 等于 2013 年发展了一种新的精确目标罚函数求解约束优化问题方法^[13],Zheng 等于 2016 年提出了一种 M 目标罚函数来求解不等式约束优化问题^[14],特别是大 M 罚参数进行求解时比传统的罚函数方法具有更好的稳定性。鉴于此思想,本文在提出一个 0 模等价新问题的基础上,定义一种 M 目标罚函数优化问题,并给出了相应的求解算法,在不需要文献^[14]证明算法收敛的条件下,证明了所提出的算法收敛性。本文的创新点:1)给出了一种新的 0 模问题等价表示;2)提出了一种求解压缩感知问题的目标罚函数方法,通过求解无约束罚函数问题得到原来压缩感知优化问题的近似解。本文为解决压缩感知问题供给了一种新的思路和方法。

2 等价表示及其目标罚函数方法

设变量 $x \in R^n$, $m \times n$ 矩阵 A , 向量 $b \in R^m$, P_0 压缩感知问题:

本文受国家自然科学基金项目(11271329)资助。

孟志青(1962—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为供应链管理、非线性优化理论、机器学习、数据挖掘;徐蕾艳(1982—),女,博士生,主要研究方向为非线性优化理论、机器学习、数据挖掘;蒋敏(1976—),女,教授,博士生导师,主要研究方向为供应链管理、非线性优化理论、机器学习、数据挖掘;沈瑞(1969—),女,博士,讲师,主要研究方向为供应链管理、非线性优化理论、机器学习、数据挖掘。

$$\min_x \|x\|_0, \text{ s. t. } Ax=b$$

学术界几乎都采用如下表示(正则化 P_1 问题)^[2]:

$$\min_x \|Ax-b\| + \lambda \|x\|_1$$

或者(正则化 P_p 问题)

$$\min_x \|Ax-b\| + \lambda \|x\|_p$$

其中,参数 $\lambda, p > 0$ 。

下面给出问题 P_0 的另一种优化问题 D_0 表示:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} f(x,y) &= \sum_{i=1}^n y_i \\ \text{s. t. } Ax &= b, x_i(1-y_i) = 0 \\ y_i^2 - y_i &= 0, i=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

定理 1 (1)若问题 D_0 存在可行解,则问题 P_0 也存在可行解。

(2)若 (x^*, y^*) 是问题 D_0 的最优解,则 x^* 是问题 P_0 的最优解,且 $\|x^*\|_0 = \sum_{i=1}^n y_i^*$ 。

证明:(1)显然成立。(2)假如 x^* 不是问题 P_0 的最优解,则存在一个 $x'(Ax'=b)$ 使得:

$$\|x'\|_0 < \|x^*\|_0$$

x' 非零元素个数小于 x^* 非零元素个数,对于 $i=1,2,\dots,n$,若 $x_i' \neq 0$,设 $y_i' = 1$,否则 $y_i' = 0$;若 $x_i^* \neq 0$,设 $y_i^* = 1$,否则 $y_i^* = 0$,显然有:

$$\begin{aligned} f(x',y') &= \sum_{i=1}^n y_i' < f(x^*,y^*) = \sum_{i=1}^n y_i^* \\ x_i'(1-y_i') &= 0, y_i'^2 - y_i' = 0, i=1,2,\dots,n. \end{aligned}$$

(x^*, y^*) 不是问题 D_0 的最优解。矛盾。

定理 1 说明通过求解问题 D_0 的最优解可以得到压缩感知问题 P_0 的最优解。反之,若 x^* 是问题 P_0 的最优解,且 $x_i^* \neq 0$,令 $y_i^* = 1$,否则,令 $y_i^* = 0$,得到 (x^*, y^*) 是问题 D_0 的最优解。因此,问题 P_0 与问题 D_0 在本质上是等价的。

设 $A_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}), j=1,2,\dots,m$,定义一种目标罚函数问题 $D_0(M)$:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} F(x,y,M) &= (\sum_{i=1}^n y_i - M)^2 + \\ &M^2 \sum_{j=1}^m (A_j x - b_j)^2 + M^2 \sum_{i=1}^n [x_i^2(1-y_i)^2 \\ &+ (y_i^2 - y_i)^2] \end{aligned}$$

上述形式与文献[14](目标罚函数为 $\max\{\sum_{i=1}^n y_i - M, 0\}^2$)中的不等式目标罚函数要求不同。

定理 2 设 (x^*, y^*) 是问题 D_0 的最优解,给定 M 小于 0,设 (x_M^*, y_M^*) 是问题 $D_0(M)$ 的最优解,如果 (x_M^*, y_M^*) 是问题 D_0 的可行解,则 (x_M^*, y_M^*) 是问题 D_0 的最优解。

证明:根据已知,有:

$$\begin{aligned} F(x_M^*, y_M^*, M) &= (\sum_{i=1}^n y_M^* - M)^2 \\ &\leq F(x^*, y^*, M) = (\sum_{i=1}^n y_i^* - M)^2 \end{aligned}$$

因为 $M < 0, \sum_{i=1}^n y_M^* \geq 0, \sum_{i=1}^n y_i^* \geq 0$,有: $\sum_{i=1}^n y_M^* \leq \sum_{i=1}^n y_i^*$ 。

由于 (x^*, y^*) 是问题 D_0 的最优解,得 $\sum_{i=1}^n y_M^* \geq \sum_{i=1}^n y_i^*$,因此 (x_M^*, y_M^*) 是问题 D_0 的最优解。

算法 1

- Step1 设 $(x^1, y^1), M_1 < 0, N > 1$ 和 $k=1$;
- Step2 以 (x^k, y^k) 为起始点计算优化问题 $\min_{x,y} F(x,y, M_k)$,若得最优解 (x^{k+1}, y^{k+1}) ;
- Step3 若 (x^{k+1}, y^{k+1}) 是问题 D_0 的可行解,则 (x^{k+1}, y^{k+1}) 是问题 D_0 的最优解。否则,令 $M_{k+1} = NM_k, k=k+1$,转 Step2。

文献[14]的算法收敛的条件较多,本文不需要其他条件,下面证明算法收敛性定理。

定理 3 若问题 D_0 存在可行解,假设 $\{(x^k, y^k)\}$ 是由算法 1 产生的序列,那么有以下结论。

(1)若 $\{(x^k, y^k)\}$ 是有限序列,即在第 k 步终止,则 $\{(x^k, y^k)\}$ 是问题 D_0 的最优解。

(2)若 $\{(x^k, y^k)\}$ 是无限序列,假设存在某个 k' 使得对所有 $k > k'$ 都有 $f(x^{k+1}, y^{k+1}) > M_k$,则 $\{(x^k, y^k)\}$ 的每个收敛聚点 (x^*, y^*) 是问题 D_0 的最优解,否则,问题 D_0 无最优解。

证明:(1)根据定理 2 可知结论成立。

(2)假设存在某个 k' 使得对所有 $k > k'$ 都有 $f(x^{k+1}, y^{k+1}) > M_k$,设 (x', y') 是问题 D_0 的一个可行解,因为 (x^{k+1}, y^{k+1}) 是

$\min_{(x,y)} F(x,y, M_k)$ 的最优解,那么有 $(\sum_{i=1}^n y_i^{k+1} - M_k)^2 \leq F(x^{k+1}, y^{k+1}, M_k) \leq F(x', y', M_k) = (\sum_{i=1}^n y_i' - M_k)^2$,则有 $\sum_{i=1}^n y_i^{k+1} - M_k \leq \sum_{i=1}^n y_i' - M_k$ (当 $k > k'$),因此,可得序列 $\{\sum_{i=1}^n y_i^{k+1}\}$ 是有界的,并且有 $F(x^{k+1}, y^{k+1}, M_k) \leq (\sum_{i=1}^n y_i' - M_k)^2$,设:

$$C(x^{k+1}, y^{k+1}) = \sum_{j=1}^m (A_j^T x^{k+1} - b_j)^2 + \sum_{i=1}^n [(x_i^{k+1})^2(1 - y_i^{k+1})^2 + ((y_i^{k+1})^2 - y_i^{k+1})^2]$$

有:

$$M_k^2 C(x^{k+1}, y^{k+1}) \leq (\sum_{i=1}^n y_i' - M_k)^2 - (\sum_{i=1}^n y_i^{k+1} - M_k)^2$$

即得:

$$\begin{aligned} C(x^{k+1}, y^{k+1}) &\leq \frac{1}{M_k^2} [(\sum_{i=1}^n y_i')^2 - 2M_k \sum_{i=1}^n y_i' - (\sum_{i=1}^n y_i^{k+1})^2 \\ &+ 2M_k \sum_{i=1}^n y_i^{k+1}] \end{aligned}$$

由上式得知序列 $\{(x^{k+1}, y^{k+1})\}$ 是有界的,不妨设 $(x^{k+1}, y^{k+1}) \rightarrow (x^*, y^*)$ (当 $k \rightarrow +\infty$),根据上式令 $k \rightarrow +\infty$,有 $C(x^*, y^*) = 0$,得 (x^*, y^*) 是问题 D_0 的可行解,由 $\sum_{i=1}^n y_i^{k+1} \leq \sum_{i=1}^n y_i'$ 得 $\sum_{i=1}^n y_i^* \leq \sum_{i=1}^n y_i'$, (x^*, y^*) 是问题 D_0 的最优解。

假设不存在某个 k' 使得对所有 $k > k'$ 都有 $f(x^{k+1}, y^{k+1}) > M_k$,由于 $k \rightarrow +\infty, M_k \rightarrow -\infty$,则 $f(x^{k+1}, y^{k+1}) \rightarrow -\infty$,即问题 D_0 无最优解。证毕。

定理 2 和定理 3 说明,对于给定的大 M ,求解 $\min_{(x,y)} F(x,y, M_k)$ 的最优解可以得到问题 P_0 的近似最优解。求 $F(x,y, M)$ 的二阶导数:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = M^2 (\sum_{j=1}^m a_{ji}^2 + (1-y_i)^2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2} = 2 + 2M^2 (x_i^2 + 6y_i^2 - 6y_i + 1)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y_i} = 4M^2 x_i (y_i - 1)$$

显然,当 (x,y) 是问题 D_0 的可行解时, $^2 F(x,y, M)$ 是正定的。罚函数 $F(x,y, M)$ 具有 2 阶光滑,因此,可以采用具有超线性收敛速度的牛顿算法或拟牛顿算法求解 $\min_{(x,y)} F(x,y, M_k)$ 。下面给出一个算例来说明算法的使用过程。

算例:给出一个简单 0 模问题算法 1 的使用过程:

$$\min \|x\|_0$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

显然存在一个最优解: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0)$,它的等价表示:

- [4] FARBER M. Applications of LP duality to problems involving independence and domination[D]. Rutgers University, 1982.
- [5] BOOTH K S, JOHNSON J H. Dominating sets in chordal graphs[J]. SIAM Journal on Computing, 1982, 11(1): 191-199.
- [6] FARBER M. Independent domination in chordal graphs[J]. Operations Research Letters, 1982, 1(4): 134-138.
- [7] BROIN M W, LOWE T J. A dynamic programming algorithm for covering problems with (greedy) totally balanced constraint matrices[J]. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 1986, 7(3): 348-357.
- [8] CHANG G J. Labeling algorithms for domination problems in sun-free chordal graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 1988, 22(1): 21-34.
- [9] CHANG G J, NEMHAUSER G L. The k-domination and k-stability problems on sun-free chordal graphs[J]. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 1984, 5(3): 332-345.
- [10] CHANG G J, NEMHAUSER G L. Covering, packing and generalized perfection[J]. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 1985, 6(1): 109-132.
- [11] Farber M. Domination, independent domination, and duality in strongly chordal graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 1984, 7(2): 115-130.
- [12] HOFFMAN A J, KOLEN A W J, Sakarovitch M. Totally-balanced and greedy matrices[J]. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 1985, 6(4): 721-730.
- [13] KRATSCHE D. Finding dominating cliques efficiently, in strongly chordal graphs and undirected path graphs[J]. Discrete Mathematics, 1990, 86(1-3): 225-238.
- [14] WIMER T V. Linear algorithms for the dominating cycle problems in series-parallel graphs, 2-trees and Halin graphs[J]. Congressus Numerantium, 1987, 56.
- [15] GAREY M R, GRAHAM R L, ULLMAN J D. Worst-Case Analysis of Memory Allocation Algorithms[C]// ACM Symposium on Theory of Computing. Denver, Colorado, USA, 1972: 93-94.
- [16] GAREY M R, JOHNSON D S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness[M]. W. H. Freeman and Company Ltd, 1979.
- [17] ROSENKRANTZ D J, STEARNS R E, LEWIS P M. An analysis of several heuristics for the traveling salesman problem[J]. Siam Journal on Computing, 1977, 6(3): 563-581.
- [18] BAR-YEHUDA R, EVEN S. A linear-time approximation algorithm for the weighted vertex cover problem[J]. Journal of Algorithms, 1981, 2(2): 198-203.
- [19] 堵丁柱. 近似算法的设计与分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.

(上接第 98 页)

$$\min y_1 + y_2 + y_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_i(1 - y_i) = 0, y_i(1 - y_i) = 0, i = 1, 2, 3$$

定义罚函数优化:

$$\min_{x,y} F(x, y, M) = \left(\sum_{i=1}^3 y_i - M \right)^2 + M^2 (x_1 + x_2 + x_3 - 2)^2 + M^2 \sum_{i=1}^3 [x_i^2 (1 - y_i)^2 + (y_i^2 - y_i)^2]$$

使用 Matlab 计算结果如下:

第 1 步 设一个初始点 $(x_1, x_2, x_3) = (20, 20, 20)$, $(y_1, y_2, y_3) = (20, 20, 20)$, $M_1 = -10$, $N = 10$, 计算 $\min_{x,y} F(x, y, M_1)$, 得近似解 $(x_1, x_2, x_3) = (1.9974, 0.0008, 0.0008)$, $(y_1, y_2, y_3) = (0.9781, -0.0851, -0.0851)$ 。

第 2 步 设 $M_2 = -100$, 计算 $\min_{x,y} F(x, y, M_2)$, 得近似解 $(x_1, x_2, x_3) = (2.0000, 0.0000, 0.0000)$, $(y_1, y_2, y_3) = (0.9998, -0.0010, -0.0010)$ 。

第 3 步 设 $M_3 = -1000$, 计算 $\min_{x,y} F(x, y, M_3)$, 得近似解 $(x_1, x_2, x_3) = (2.0000, 0.0000, 0.0000)$, $(y_1, y_2, y_3) = (1.0000, 0.0000, 0.0000)$ 。

结束语 本文提出了压缩感知问题的一种新的等价表示和一个对应的目标罚函数算法, 证明了该算法的收敛性。该目标罚函数具有 2 阶光滑, 可以使用超线性收敛算法计算无约束罚优化问题, 如牛顿算法。

该算法的计算有效性在实际压缩感知问题中的应用和改进是下一步的研究内容, 另外可以在新的等价表示问题上提出新的罚函数和算法以研究。本文的思路为研究压缩感知问题开辟了一个新的途径, 为研究稀疏优化问题提供了新的思路。

参考文献

- [1] CANDÉS E, TAO T. Near optimal signal recovery from random

projections: Universal encoding strategies[J]. IEEE Trans Info. Theory, 2006, 52(12): 5406-5425.

- [2] 文再文, 印卧涛, 刘歆, 等. 压缩感知和稀疏优化简介[J]. 运筹学报, 2012, 16(3): 49-65.
- [3] 邵文泽, 韦志辉. 压缩感知基本理论: 回顾与展望[J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(1): 1-12.
- [4] 宋长明, 惠庆磊. 压缩感知中图像重构的模型综述[J]. 中原工学院学报, 2016, 27(4): 80-84.
- [5] 陶卿, 高乾坤, 姜纪远, 等. 稀疏学习优化问题的求解综述[J]. 软件学报, 2013, 24(11): 2498-2507.
- [6] 于春梅. 稀疏优化算法综述[J]. 计算机工程与应用, 2014, 50(11): 210-217.
- [7] 兰美辉. 基于惩罚似然优化模型的本体稀疏向量计算算法[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2015, 35(4): 51-55.
- [8] 张海, 梁勇, 徐宗本, 等. 基于 SCAD 罚函数的有噪压缩感知[J]. 数学学报, 2013, 56(5): 767-776.
- [9] WANG Y, WANG J J, XU Z B. Restricted p-isometry properties of nonconvex block-sparse compressed sensing[J]. Signal Processing, 2014, 104: 188-196.
- [10] ZHU Y, WU J, YU G H. A Fast Proximal Point Algorithm for l_1 -Minimization Problem Mincompressed Sensing[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 270: 777-784.
- [11] 文婷婷, 马兆楠, 裴炳. 基于拟牛顿法的压缩感知重构零范数平滑算法[J]. 计算机应用, 2015, 35(S2): 17-19, 23.
- [12] 杜卓明, 李洪安, 康宝生, 等. 二阶收敛的光滑正则化压缩感知信号重构方法[J]. 中国图象图形学报, 2016, 21(4): 490-498.
- [13] MENG Z Q, DANG C Y, JIANG M, et al. Exactness and Algorithm of an Objective Penalty Function[J]. Journal Global Optimization, 2013, 56: 691-711.
- [14] HENG Y, MENG Z Q, SHEN R. An M-Objective Penalty Function Algorithm Under Big Penalty Parameters[J]. J Syst Sci Complex, 2016, 29: 455-471.