矩阵前主子式的三角分解改进

苏 尔

（浙江传媒学院新媒体学院　杭州 310018）

摘　要　采用部分主元素的 Gauss 消去法一般不能得到矩阵的各阶前主子式。讨论围绕逐步约化的细分每小步，对一个经过若干行置换后的 A_0 最后实现三角分解，并且依顺序求出 A_0 各阶前主子式。主要内容是对带有行交换三角形化的通常约化方法实现改进，并以代数表示式结合矩阵乘积运算的递推方法，归纳证明最后约化结果式子为矩阵 L-U 三角分解的实现依据。逐步约化步骤的同时得到原有矩阵 A_0 的各阶前主子式。

关键词　行置换，逐步约化，三角分解，前主子式，矩阵运算

中图法分类号　O241.6　　　**文献标识码**　A

Matrix Triangular Decomposition Improvement of Pre Order Principal Sub Determinant

SU Er

(College of New Media, Zhejiang Institute of Media and Communications, Hangzhou 310018, China)

Abstract　Using Gauss elimination method with part main elements is generally not got all principal sub determinants of matrix. This article discussed around gradual reduction with each step-by-step subdivision, final triangular decomposition was performed on matrix A_0 by row permutation after a number of row replacement, and each pre order principal sub determinant of A_0 was found out orderly. Main purpose of the article is to achieve improvement for usually triangle reduction method by row permutation, with a recursive method for algebraic representation, to bind matrix product operation, and it inductively proves that final reduction result is in accordance with the realization of the L-U triangular decomposition to matrix. And at the same time with the process of gradual reduction, we got all pre order principal sub determinants of original matrix A_0.

Keywords　Row permutation, Gradual reduction, Triangular decomposition, Pre order principal sub determinant, Matrix operation

1　问题背景

非奇异矩阵有一种稳定的消去过程，称为带有行交换的三角形化或者部分选主元素的 Gauss 消去法，两者本质上一致。在三角形化约化过程中，若在原有矩阵各阶前主子矩阵都非奇异的充要条件下，稳定的消去过程直到最后三角形化都不会发生中断，并且带有行交换的三角分解是唯一的[1]。我们希望不仅保证 A_0 的三角形化过程稳定，而且还能额外得到 A_0 的各阶顺序主子式[2]。已经知道，对于求标准特征值问题的一种有力解法就是先计算矩阵各阶的顺序主子式值，根据主子式符号确定某个区间中特征根的个数，然后用二分法隔离区间确定所需要的特征值[3]。因此，针对这类问题的必要条件，对通常三角形化约化方法的算法改进具有实际意义。只用部分主元素的 Gauss 消去法一般不能得到原有矩阵 A_0 的各阶前主子式，然而本文讨论的改进约化过程能得到原有矩阵 A_0 的全部前主子式值，因此这个方法具有实际意义。围绕如何求出 A_0 的各阶前主子式值，对一个经过若干行置换后的 A_0 最后实现三角分解，本文的主要内容是实现对通常三角形化的约化方法的改进，在逐步约化过程时得到原有矩阵 A_0 的各阶前主子式值，并以代数表示式结合矩阵运算的递推方法，归纳证明最后约化结果为三角分解。改进方法的约化过程是逐步按行实现上三角化的，使每行的下三角部分非零元素逐个依次消元，且消元因子的绝对值模不能大于 1，逐步按行约化消元，该过程中原有矩阵 A_0 各阶前主子式的绝对值始终不变，并将逐步按行约化中的行交换发生次数作为主子式符号改变的记号。

2　基本思路和约化实现

逐步约化的演算思路细节：不失一般性，约化过程从第 r 步讨论。将第 r 步细分为 r 小步，每一小步引进一个 0，这个步骤的关键在于能够保证：第 r 步约化过程结束的同时就可以计算 A_0 的前 $r+1$ 阶主子式 p_{r+1}，本文将在第 4 节论述如何得到主子式结果。现在，不妨假设约化步骤已进行了 $r=1, r=2$ 步，已从 A_0 约化到 A_2，此时的矩阵形式 $A_2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，二步约化步骤实现了对 A_0 前 3 行

苏　尔（1969－），女，硕士生，讲师，主要研究方向为矩阵代数，E-mail：se072002@aliyun.com。

的改变,第 4 行到第 n 行从未变动。当 $r=3$ 时,约化过程细分成 3 小步,对 A_2 的前 4 行进行改变,第 5 行到第 n 行不变动。细分的 3 小步的具体步骤如下。当 $i=1$ 时,若 $|a_{41}|>|a_{11}|$,先行交换[4,1],计算 $\frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}=m_{41}$,得到稳定矩阵 M_{41},再对行交换后 A_2 的第 4 行元素进行改变:用乘子 $-m_{41}$ 去乘第 1 行的对应元素 $j=1,\cdots,n$,然后将其分别加到第 4 行对应元素上覆盖,从而达到对 $a_{41}^{(1)}$ 的消元目的,用矩阵运算表示,即

$$A_3^{(1)}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\-m_{41}&0&0&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}I_{41}A_2=\begin{bmatrix}a_{11}^{(1)}&a_{12}^{(1)}&\cdots&\cdots&\cdots&a_{1n}^{(1)}\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&\cdots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&a_{34}&\cdots&a_{3n}\\0&-m_{41}a_{12}^{(1)}+a_{42}^{(1)}&-m_{41}a_{13}^{(1)}+a_{43}^{(1)}&-m_{41}a_{14}^{(1)}+a_{44}^{(1)}&\cdots&-m_{41}a_{1n}^{(1)}+a_{4n}^{(1)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix};$$

当 $i=2$ 时,若 $|-m_{41}a_{12}^{(1)}+a_{42}^{(1)}|>|a_{22}|$,先行交换[4,2],计算 $\frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}=m_{42}$,得到稳定矩阵 M_{42},再对行交换后 $A_3^{(1)}$ 的第 4 行元素进行改变:用乘子 $-m_{42}$ 去乘第 2 行的对应元素 $j=2,\cdots,n$,然后将其分别加到第 4 行对应元素上覆盖,对 $a_{42}^{(2)}$ 消元,即

$$A_3^{(2)}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\0&-m_{42}&0&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}I_{42}A_3^{(1)}=\begin{bmatrix}a_{11}^{(1)}&a_{12}^{(1)}&\cdots&\cdots&\cdots&a_{1n}^{(1)}\\0&a_{22}^{(2)}&a_{23}^{(2)}&\cdots&\cdots&a_{2n}^{(2)}\\0&0&a_{33}&a_{34}&\cdots&a_{3n}\\0&0&-m_{42}a_{23}^{(2)}+a_{43}^{(2)}&-m_{42}a_{24}^{(2)}+a_{44}^{(2)}&\cdots&-m_{42}a_{2n}^{(2)}+a_{4n}^{(2)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix};$$

当 $i=3$ 时,若 $|-m_{42}a_{23}^{(2)}+a_{43}^{(2)}|>|a_{33}|$,先行交换[4,3],计算 $\frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}}=m_{43}$,得到稳定矩阵 M_{43},再对行交换后 $A_3^{(2)}$ 的第 4 行元素进行改变:用乘子 $-m_{43}$ 去乘第 3 行的对应元素 $j=3,\cdots,n$,然后将其分别加到第 4 行对应元素上覆盖,对 $a_{43}^{(3)}$ 消元,即

$$A_3=A_3^{(3)}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\0&0&-m_{43}&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}I_{43}A_3^{(2)}=\begin{bmatrix}a_{11}^{(1)}&a_{12}^{(1)}&\cdots&\cdots&\cdots&a_{1n}^{(1)}\\0&a_{22}^{(2)}&a_{23}^{(2)}&\cdots&\cdots&a_{2n}^{(2)}\\0&0&a_{33}^{(3)}&a_{34}^{(3)}&\cdots&a_{3n}^{(3)}\\0&0&0&-m_{43}a_{34}^{(3)}+a_{44}^{(3)}&\cdots&-m_{43}a_{3n}^{(3)}+a_{4n}^{(3)}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}。$$

这时完成第 $r=3$ 步的 3 小步约化,至此得到 A_3。该约化过程是对 A_2 第 4 行的每个下三角位置引进一个零元素事实,将 3 小步合写为一式,矩阵形式为:

$$A_3=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\0&0&-m_{43}&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}I_{43}\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\0&-m_{42}&0&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}I_{42}\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\-m_{41}&0&0&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}I_{41}A_2=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\0&0&-m_{43}&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}I_{43}\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\0&-m_{42}&0&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}I_{43}I_{43}I_{42}$$

$$\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\-m_{41}&0&0&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}I_{42}I_{43}I_{43}I_{42}I_{41}A_2=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\&&-m_{43}&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&-m_{42}&\ddots&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&&&\\-m_{41}&\ddots&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}I_{43}I_{42}I_{41}A_2=M_{43}\widetilde{M}_{42}\widetilde{M}_{41}$$

$$I_{43}I_{42}I_{41}A_2=\begin{bmatrix}1&&&&&\\-m_{41}&1&&&&\\m_{41}m_{42}&-m_{42}&1&&&\\-m_{41}m_{42}m_{43}&m_{42}m_{43}&-m_{43}&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{bmatrix}I_{43}I_{42}I_{41}A_2\cdots(\Delta)$$

其中,记 $\widetilde{M}_{42}=I_{43}M_{42}I_{43}$,$\widetilde{M}_{41}=I_{43}I_{42}M_{41}I_{42}I_{43}$,由这些稳定矩阵的乘积结果,得到单位下三角矩阵。将 $M_{43}\widetilde{M}_{42}\widetilde{M}_{41}$ 记作 $N^{(3)}$,显然 $N^{(3)}$ 仍为单位下三角阵,(Δ)式写为:$A_3=N^{(3)}I_{43}I_{42}I_{41}A_2$。为讨论简便,假定前面每小步都有行交换,即这里的 I_{43},I_{42},I_{41} 都是对换阵。前面类似,当 $r=1,2$ 时,同样有 $A_1=N^{(1)}I_{21}A_0$,$A_2=N^{(2)}I_{32}I_{31}A_1$,这里的 I_{32},I_{31},I_{21}

也指对换阵，$N^{(2)}$，$N^{(1)}$ 为单位下三角阵，其矩阵形式分别为：$\begin{bmatrix}1&&&\\-m_{31}&1&&\\m_{31}m_{32}&-m_{32}&1&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&&&\\-m_{21}&1&&\\&&1&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}$。综合前面发生的所有矩阵乘积式子，当 $r=3$ 时，有：$A_3=N^{(3)}I_{43}I_{42}I_{41}A_2=N^{(3)}I_{43}I_{42}I_{41}N^{(2)}I_{32}I_{31}A_1=N^{(3)}I_{43}I_{42}I_{41}N^{(2)}I_{32}I_{31}N^{(1)}I_{21}A_0$。每步如此约化，往后类推直到第 $r=n-1$ 步，即在已有的 A_{n-2} 上继续约化，同样将其细分为 $n-1$ 小步：$A_{n-2}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&\cdots&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&\cdots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&a_{34}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots\\0&\cdots&\cdots&0&a_{n-1n-1}&a_{n-1n}\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&\cdots&a_{nn-1}&a_{nn}\end{bmatrix}$，从 $i=1$ 开始，直到 $i=n-1$ 小步约化结束，得到 $A_{n-1}=A_{n-1}^{(n-1)}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\0&1&&&&\\\cdots&0&\ddots&&&\\\vdots&&\ddots&\ddots&&\\\cdots&\cdots&&\ddots&1&\\0&\cdots&0&\cdots&-m_{n,n-1}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}^{(1)}&a_{12}^{(1)}&\cdots&\cdots&\cdots&a_{1n}^{(1)}\\0&a_{22}^{(2)}&a_{23}^{(2)}&\cdots&\cdots&a_{2n}^{(2)}\\0&0&a_{33}^{(3)}&a_{34}^{(3)}&\cdots&a_{3n}^{(3)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0&a_{n-1,n-1}^{(n-1)}&a_{n-1,n}^{(n-1)}\\0&0&\cdots&0&a_{n,n-1}^{(n-1)}&a_{n,n}^{(n-1)}\end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix}a_{11}^{(1)}&a_{12}^{(1)}&\cdots&\cdots&\cdots&a_{1n}^{(1)}\\0&a_{22}^{(2)}&a_{23}^{(2)}&\cdots&\cdots&a_{2n}^{(2)}\\&0&a_{33}^{(3)}&a_{34}^{(3)}&\cdots&a_{3n}^{(3)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0&a_{n-1,n-1}^{(n-1)}&a_{n-1,n}^{(n-1)}\\0&0&\cdots&0&0&-m_{n,n-1}a_{n-1,n}^{(n-1)}+a_{nn}^{(n-1)}\end{bmatrix}$，这是第 $r=n-1$ 步的约化结果，可见 A_{n-1} 已为上三角阵，全部约化至此结束。当 $r=n-1$ 步时，对 $i=1,\cdots,n-1$ 小步，综合得到矩阵乘积式子：

$$A_{n-1}^{(n-1)}=\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&\\&&&1&\\0&\cdots&0&-m_{n,n-1}&1\end{bmatrix}I_{n,n-1}\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&\\&&&1&\\0&\cdots&-m_{n,n-2}&0&1\end{bmatrix}\cdots I_{n3}\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&\\&&&\ddots&\\0&-m_{n2}&0&\cdots&1\end{bmatrix}I_{n2}\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&\\&&&\ddots&\\-m_{n1}&0&\cdots&\cdots&1\end{bmatrix}I_{n1}\ A_{n-2}=$$

$$\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&\\&&&1&\\0&\cdots&0&-m_{n,n-1}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&\\&&-m_{n,n-2}&1&\\0&\cdots&0&0&1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&-m_{n2}&1&\\&0&&\ddots\\0&\cdots&\cdots\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\-m_{n1}&\ddots&&\\0&&1&\\\vdots&&&\ddots\\0&\cdots\cdots\cdots&&1\end{bmatrix}I_{n,n-1}\cdots I_{n1}A_{n-2}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\*&1&&&&\\&*&\vdots&&&\\\vdots&&\ddots&1&&\\&\vdots&&*&1&\\*&*&\cdots\cdots&&*&1\end{bmatrix}I_{n,n-1}\cdots I_{n1}A_{n-2}$$

将式子等号最右边的矩阵记作 $N^{(n-1)}$，矩阵乘积式子写为：$A_{n-1}=N^{(n-1)}I_{n,n-1}\cdots I_{n1}A_{n-2}$。现在对全部 $r=1,\cdots,n-1$ 步及前面细分小步的所有约化步骤进行整合，最后约化结果写成下面一个矩阵乘积式子，记作⊠：$A_{n-1}=N^{(n-1)}I_{nn-1}\cdots I_{n1}A_{n-2}=N^{(n-1)}I_{nn-1}\cdots I_{n1}N^{(n-2)}I_{n-1n-2}\cdots I_{n-11}A_{n-3}=\cdots=N^{(n-1)}I_{nn-1}\cdots I_{n1}N^{(n-2)}I_{n-1n-2}\cdots I_{n-11}\cdots N^{(1)}I_{21}A_0$。本文为简便讨论，这里不失一般，不妨假设式子⊠中所有 I_{ij} $(i>j)$ $(i=2,\cdots,n;j=1,\cdots,n-1)$ 都指单位阵第 i 行与第 j 行交换后得到的对换阵。事实上，⊠中所有 $N^{(r)}$，$r=1,\cdots,n-1$ 都是具如此形式 $\begin{bmatrix}1&&&&\\*&\ddots&&&\\\vdots&\ddots&1&&\\\vdots&&*&\ddots&\\*&\cdots&\cdots&*&1\end{bmatrix}$ 的单位下三角阵，且矩阵 $N^{(r)}$ 有一个共同特点，它是稳定矩阵的乘积，更为重要地，其列向量 $l_i^{(r)}$ 具有特殊性质。为便于后面直接使用列向量的性质，在此先描述 $N^{(r)}$ 的这种列向量性质，又有与之相关平行对应的另一种列向量 $h_i^{(r)}$，我们也一起给出其定义性质的描述。记 $N^{(r)}$ 的列向量为 $l_i^{(r)}$，$i=1,\cdots,n$，$r=1,\cdots,n-1$，那么 $N^{(r)}=I+l_1^{(r)}e_1^{\mathrm{T}}+\cdots+l_r^{(r)}e_r^{\mathrm{T}}$。$l_i^{(r)}=[\overbrace{0,\cdots,0}^{i个},l_{i+1,i}^{(r)},\cdots l_{r+1,i}^{(r)},\overbrace{0,\cdots,0}^{n-r-1个}]^{\mathrm{T}}$，且 $|l_{j,i}^{(r)}|\leqslant1$，$j=i+1,\cdots,r+1$，$i=1,\cdots,r$；其余 $l_i^{(r)}=e_i$，$i=r+1,\cdots,n$。并且有：$e_{r+2}^{\mathrm{T}}l_i^{(r)}=0$，$e_{r+3}^{\mathrm{T}}l_i^{(r)}=0$，$\cdots$，$e_n^{\mathrm{T}}l_i^{(r)}=0$；$e_j^{\mathrm{T}}l_i^{(r)}=0$，$j\leqslant i$，$i=1,\cdots,r$。为了后面将使用到与 $l_i^{(r)}$ 平行对应的另一种向量，在此先定义描述这一种向量。将它记作 $h_i^{(r)}=[\overbrace{0,\cdots,0}^{i个},h_{i+1,i}^{(r)},\cdots,h_{n,i}^{(r)}]^{\mathrm{T}}$，其中 $i=1,\cdots,n-1$；$r=1,\cdots,n-1$。其形状类似 Gauss 向量，但是这一种向量与 Gauss 向量有很大区别：其分量元素不一定满足 $|h_{j,i}^{(r)}|\leqslant1$，$j=i+1,\cdots,n$。

3 证明约化结果式子实现原始矩阵的三角分解

在 A_0 非奇异下，经过前面 $n-1$ 步约化步骤且矩阵各阶前主子式都不为零的充分必要条件下，得到最后的约化结果式子⊠。我们试图求证最后约化结果式子确切实现了原始矩阵 A_0 的 L-U 分解[4]。前面已知最后一步得到了 A_{n-1} 上三角阵，现在进而讨论式子⊠中出现的表达式 $N^{(n-1)}I_{nn-1}\cdots I_{n1}N^{(n-2)}I_{n-1n-2}\cdots I_{n-11}\cdots N^{(3)}I_{43}I_{42}I_{41}N^{(2)}I_{32}I_{31}N^{(1)}I_{21}$ 是否为单位下三角阵。回到⊠中，记 $N=N^{(n-1)}I_{nn-1}\cdots I_{n1}N^{(n-2)}I_{n-1n-2}\cdots I_{n-11}\cdots N^{(3)}I_{43}I_{42}I_{41}N^{(2)}I_{32}I_{31}N^{(1)}I_{21}$。因为 $N^{(i)}$ 都是单位下三角阵，所以 N 非奇异。现在将式子⊠写成：$A_{n-1}=NA_0=\underbrace{NI_{21}I_{31}I_{32}I_{41}I_{42}I_{43}\cdots I_{n1}\cdots I_{nn-1}}_{记为\widetilde{N}}\underbrace{I_{nn-1}\cdots I_{n1}\cdots I_{43}I_{42}I_{41}I_{32}I_{31}I_{21}A_0}_{记为\widetilde{A}_0}$，式子⊠又可写为：$A_{n-1}=\widetilde{N}\widetilde{A}_0\Leftrightarrow\widetilde{A}_0=\widetilde{N}^{-1}A_{n-1}$，其中 $\widetilde{N}=NI_{21}I_{31}I_{32}I_{41}I_{42}I_{43}\cdots I_{n1}\cdots I_{nn-1}$，$\widetilde{A}_0=I_{nn-1}\cdots I_{n1}\cdots I_{43}I_{42}I_{41}I_{32}I_{31}I_{21}A_0$，事实上，容易推导，对于矩阵乘积有此等式成立：

$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} I_{21}I_{31}I_{32}I_{41}I_{42}I_{43}\cdots I_{n1}\cdots I_{m-1}=I$，因此不妨推测：假设 N 有如此矩阵形式：$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ & & & 1 & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & * & \ddots & \vdots \\ 1 & * & & \cdots & * \end{bmatrix}$，那么 $\widetilde{N}=NI_{21}I_{31}I_{32}I_{41}I_{42}I_{43}\cdots I_{n1}\cdots I_{m-1}$ 的形式就与 I 类似，而且推演，$\widetilde{N}$ 就应该是形如：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ * & 1 & & & & \\ & * & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ & \vdots & \ddots & * & 1 & 0 \\ * & & \cdots & & * & 1 \end{bmatrix}$ 的单位下三角阵，从而 $\widetilde{N}^{-1}$ 也是单位下三角阵了。

式子¤中 $\widetilde{A}_0=\widetilde{N}^{-1}A_{n-1}$，已知 $\widetilde{A}_0$ 非奇异，得到 A_{n-1} 上三角阵，上面假设所得 $\widetilde{N}^{-1}$ 是单位下三角阵符合 L-U 分解的存在定理[4]。接下来需要解决的问题就是证明 N 具有如上面假设的矩阵形式，使得约化式子能以满足对原始矩阵 A_0 的 L-U 分解。也即证明，式子¤中 $N=N^{(n-1)}I_{m-1}\cdots I_{n1}N^{(n-2)}I_{n-1n-2}\cdots I_{n-11}\cdots N^{(3)}I_{43}I_{42}I_{41}N^{(2)}I_{32}I_{31}N^{(1)}I_{21}$ 的矩阵形如：$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ & & & 1 & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & * & & \vdots \\ 1 & * & & \cdots & * \end{bmatrix}$。考察式子¤中 N 的特点：从 $N^{(n-1)}I_{m-1}\cdots I_{n1}$ 开始从左往右依次运算，逐步进行矩阵右乘 $N^{(r)}I_{r+1,r}\cdots I_{r+1,1}$，直到最后右乘 $N^{(1)}I_{21}$ 为止。下面考察式子¤中的 N，讨论将矩阵形式结合代数表示式，以递推实施对矩阵的右乘运算，最后用数学归纳法证明 N 的矩阵形式假设正确。当 $r=n-1$ 时，考察因子 $N^{(n-1)}I_{n,n-1}\cdots I_{n1}$ 的矩阵形式为：$\begin{bmatrix} 0 & & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & & * \\ * & 1 & \ddots & & & \\ & * & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \\ & \cdots & & * & 1 & * \end{bmatrix}$，记为①式，写成代数表示式为：①式 $=(e_2+l_2^{(n-1)})e_1^{\mathrm{T}}+(e_3+l_3^{(n-1)})e_2^{\mathrm{T}}+(e_4+l_4^{(n-1)})e_3^{\mathrm{T}}+\cdots+(e_{n-2}+l_{n-2}^{(n-1)})e_{n-3}^{\mathrm{T}}+(e_{n-1}+l_{n-1}^{(n-1)})e_{n-2}^{\mathrm{T}}+e_ne_{n-1}^{\mathrm{T}}+(e_1+l_1^{(n-1)})e_n^{\mathrm{T}}$

当 $r=n-2$ 时，考察因子 $N^{(n-2)}I_{n-1,n-2}\cdots I_{n-1,1}$ 的矩阵形式，然后写成代数表示式，为：$(e_2+l_2^{(n-2)})e_1^{\mathrm{T}}+(e_3+l_3^{(n-2)})e_2^{\mathrm{T}}+\cdots+(e_{n-2}+l_{n-2}^{(n-2)})e_{n-3}^{\mathrm{T}}+e_{n-1}e_{n-2}^{\mathrm{T}}+(e_1+l_1^{(n-2)})e_{n-1}^{\mathrm{T}}+e_ne_n^{\mathrm{T}}$。从而推演，当 $r=n-(k+1)$ 时，因子 $N^{(n-k-1)}I_{n-k,n-k-1}\cdots I_{n-k,1}$ 的代数表示式应为：

$(e_2+l_2^{(n-k-1)})e_1^{\mathrm{T}}+(e_3+l_3^{(n-k-1)})e_2^{\mathrm{T}}+\cdots+(e_{n-k-1}+l_{n-k-1}^{(n-k-1)})e_{n-k-2}^{\mathrm{T}}+e_{n-k}e_{n-k-1}^{\mathrm{T}}+(e_1+l_1^{(n-k-1)})e_{n-k}^{\mathrm{T}}+e_{n-k+1}e_{n-k+1}^{\mathrm{T}}+\cdots+e_ne_n^{\mathrm{T}}$。当 $r=n-2$ 时：从①式开始，将 $N^{(n-2)}I_{n-1,n-2}\cdots I_{n-1,1}$ 对①式进行矩阵右乘，得到：$N^{(n-1)}I_{n,n-1}\cdots I_{n1}N^{(n-2)}I_{n-1,n-2}\cdots I_{n-1,1}$，记为②式 $=[(e_3+l_3^{(n-1)})+e_3^{\mathrm{T}}l_2^{(n-2)}(e_4+l_4^{(n-1)})+\cdots+e_{n-2}^{\mathrm{T}}l_2^{(n-2)}(e_{n-1}+l_{n-1}^{(n-1)})]e_1^{\mathrm{T}}+[(e_4+l_4^{(n-1)})+e_4^{\mathrm{T}}l_3^{(n-2)}(e_5+l_5^{(n-1)})+\cdots+e_{n-2}^{\mathrm{T}}l_3^{(n-2)}(e_{n-1}+l_{n-1}^{(n-1)})]e_2^{\mathrm{T}}+\cdots+[(e_{n-2}+l_{n-2}^{(n-1)})+e_{n-2}^{\mathrm{T}}l_{n-3}^{(n-2)}(e_{n-1}+l_{n-1}^{(n-1)})]e_{n-4}^{\mathrm{T}}+(e_{n-1}+l_{n-1}^{(n-1)})e_{n-3}^{\mathrm{T}}+e_ne_{n-2}^{\mathrm{T}}+[(e_2+l_2^{(n-1)})+e_2^{\mathrm{T}}l_1^{(n-2)}(e_3+l_3^{(n-1)})+e_3^{\mathrm{T}}l_1^{(n-2)}(e_4+l_4^{(n-1)})+\cdots+e_{n-2}^{\mathrm{T}}l_1^{(n-2)}(e_{n-1}+l_{n-1}^{(n-1)})]e_{n-1}^{\mathrm{T}}+(e_1+l_1^{(n-1)})e_n^{\mathrm{T}}$。为书写简洁，下面式子中使用前面第二段已定义描述的二种列向量 $l_i^{(r)}$ 和 $h_i^{(r)}$，令 $h_i^{(n-1)}=l_i^{(n-1)}$，$i=1,2,\cdots,n-1$。令 $h_i^{(n-2)}=l_i^{(n-1)}+e_i^{\mathrm{T}}l_{i-1}^{(n-2)}(e_{i+1}+l_{i+1}^{(n-1)})+\cdots+e_{n-2}^{\mathrm{T}}l_{i-1}^{(n-2)}(e_{n-1}+l_{n-1}^{(n-1)})$，其中 $i=2,3,4,\cdots,n-2$；$h_i^{(n-2)}=l_i^{(n-1)}(i=1,n-1)$。将①式简写为：$(e_2+h_2^{(n-1)})e_1^{\mathrm{T}}+(e_3+h_3^{(n-1)})e_2^{\mathrm{T}}+(e_4+h_4^{(n-1)})e_3^{\mathrm{T}}+\cdots+(e_{n-2}+h_{n-2}^{(n-1)})e_{n-3}^{\mathrm{T}}+(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-1)})e_{n-2}^{\mathrm{T}}+e_ne_{n-1}^{\mathrm{T}}+(e_1+h_1^{(n-1)})e_n^{\mathrm{T}}$。将②式简写为：$(e_3+h_3^{(n-2)})e_1^{\mathrm{T}}+(e_4+h_4^{(n-2)})e_2^{\mathrm{T}}+\cdots+(e_{n-2}+h_{n-2}^{(n-2)})e_{n-4}^{\mathrm{T}}+(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-2)})e_{n-3}^{\mathrm{T}}+e_ne_{n-2}^{\mathrm{T}}+(e_2+Dh_2^{(n-2)})Fe_{n-1}^{\mathrm{T}}+(e_1+h_1^{(n-2)})e_n^{\mathrm{T}}$。继续以代数表示式逐步递推实施矩阵右乘运算，可以推演，当 $r=n-k$ 时，有 (k) 式简写为：$(e_{k+1}+h_{k+1}^{(n-k)})e_1^{\mathrm{T}}+(e_{k+2}+h_{k+2}^{(n-k)})e_2^{\mathrm{T}}+(e_{k+3}+h_{k+3}^{(n-k)})e_3^{\mathrm{T}}+\cdots+(e_{n-2}+h_{n-2}^{(n-k)})e_{n-k-2}^{\mathrm{T}}+(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-k)})e_{n-k-1}^{\mathrm{T}}+e_ne_{n-k}^{\mathrm{T}}+(e_k+h_k^{(n-k)})e_{n-k+1}^{\mathrm{T}}+(e_{k-1}+h_{k-1}^{(n-k)})e_{n-k+2}^{\mathrm{T}}+\cdots+(e_1+h_1^{(n-k)})e_n^{\mathrm{T}}$。递推运算的最后一步，当 $r=1$ 时矩阵右乘形成了 N 的矩阵形式。下面采用数学归纳法证明 N 的假设正确。对 w 用归纳法：当 $w=1$，$w=2$，即 $r=n-1$，$r=n-2$ 时，已知，如①式，②式矩阵形式成立。假设当 $w=k$，即 $r=n-k$ 时，已知有 (k) 式矩阵形式成立，那么：现在证明当 $w=k+1$，即 $r=n-k-1$ 时，有下面 $(k+1)$ 式依然成立。当 $r=n-k-1$ 时，对 (k) 式实施矩阵右乘，详细考察：

$(k+1)$ 式 $=(k)$ 式 $*N^{(n-k-1)}I_{n-k,n-k-1}\cdots I_{n-k,1}=(k)$ 式 $*[(e_2+l_2^{(n-k-1)})e_1^{\mathrm{T}}+(e_3+l_3^{(n-k-1)})e_2^{\mathrm{T}}+\cdots+(e_{n-k-1}+l_{n-k-1}^{(n-k-1)})e_{n-k-2}^{\mathrm{T}}+e_{n-k}e_{n-k-1}^{\mathrm{T}}+(e_1+l_1^{(n-k-1)})e_{n-k}^{\mathrm{T}}+e_{n-k+1}e_{n-k+1}^{\mathrm{T}}+\cdots+e_ne_n^{\mathrm{T}}]=\{(e_{k+1}+h_{k+1}^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm{T}}}\}+\{(e_{k+2}+h_{k+2}^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm{T}}}+e_2^{\mathrm{T}}l_1^{(n-k-1)}(e_{k+2}+h_{k+2}^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm{T}}}\}+\{e_3^{\mathrm{T}}l_2^{(n-k-1)}(e_{k+3}+h_{k+3}^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm{T}}}+(e_{k+3}+h_{k+3}^{(n-k)})\underline{e_2^{\mathrm{T}}}+e_3^{\mathrm{T}}l_1^{(n-k-1)}(e_{k+3}+h_{k+3}^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm{T}}}\}+\cdots+\{e_{n-k-2}^{\mathrm{T}}l_2^{(n-k-1)}(e_{n-2}+h_{n-2}^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm{T}}}+e_{n-k-2}^{\mathrm{T}}l_3^{(n-k-1)}(e_{n-2}+h_{n-2}^{(n-k)})\underline{e_2^{\mathrm{T}}}+\cdots+(e_{n-2}+h_{n-2}^{(n-k)})\underline{e_{n-k-3}^{\mathrm{T}}}+e_{n-k-2}^{\mathrm{T}}l_1^{(n-k-1)}(e_{n-2}+h_{n-2}^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm{T}}}\}+\{e_{n-k-1}^{\mathrm{T}}l_2^{(n-k-1)}(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm{T}}}+e_{n-k-1}^{\mathrm{T}}l_3^{(n-k-1)}(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-k)})\underline{e_2^{\mathrm{T}}}+\cdots+(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-k)})\underline{e_{n-k-2}^{\mathrm{T}}}+e_{n-k-1}^{\mathrm{T}}l_1^{(n-k-1)}(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm{T}}}\}+\{e_{n-k}^{\mathrm{T}}l_2^{(n-k-1)}e_n\underline{e_1^{\mathrm{T}}}+e_{n-k}^{\mathrm{T}}l_3^{(n-k-1)}e_n\underline{e_2^{\mathrm{T}}}+\cdots+e_{n-k}^{\mathrm{T}}l_{n-k-1}^{(n-k-1)}e_n\underline{e_{n-k-2}^{\mathrm{T}}}+e_n\underline{e_{n-k-1}^{\mathrm{T}}}+e_{n-k}^{\mathrm{T}}l_1^{(n-k-1)}e_n\underline{e_{n-k}^{\mathrm{T}}}\}+\{e_{n-k+1}^{\mathrm{T}}l_2^{(n-k-1)}(e_k+h_k^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm{T}}}+e_{n-k+1}^{\mathrm{T}}l_3^{(n-k-1)}(e_k+h_k^{(n-k)})\underline{e_2^{\mathrm{T}}}+\cdots+e_{n-k+1}^{\mathrm{T}}l_{n-k-1}^{(n-k-1)}(e_k+h_k^{(n-k)})\underline{e_{n-k-2}^{\mathrm{T}}}+e_{n-k+1}^{\mathrm{T}}l_1^{(n-k-1)}(e_k+h_k^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm{T}}}+(e_k+h_k^{(n-k)})\underline{e_{n-k+1}^{\mathrm{T}}}\}+\{e_{n-k+2}^{\mathrm{T}}l_2^{(n-k-1)}(e_{k-1}+h_{k-1}^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm{T}}}+e_{n-k+2}^{\mathrm{T}}l_3^{(n-k-1)}(e_{k-1}+h_{k-1}^{(n-k)})\underline{e_2^{\mathrm{T}}}+\cdots+e_{n-k+2}^{\mathrm{T}}l_{n-k-1}^{(n-k-1)}(e_{k-1}+h_{k-1}^{(n-k)})\underline{e_{n-k-2}^{\mathrm{T}}}+e_{n-k+2}^{\mathrm{T}}l_1^{(n-k-1)}(e_{k-1}+h_{k-1}^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm{T}}}+(e_{k-1}+h_{k-1}^{(n-k)})\underline{e_{n-k+2}^{\mathrm{T}}}\}+\cdots+\{e_n^{\mathrm{T}}l_2^{(n-k-1)}(e_1+h_1^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm{T}}}+e_n^{\mathrm{T}}l_3^{(n-k-1)}(e_1+h_1^{(n-k)})\underline{e_2^{\mathrm{T}}}+\cdots+e_n^{\mathrm{T}}l_{n-k-1}^{(n-k-1)}(e_1+h_1^{(n-k)})\underline{e_{n-k-2}^{\mathrm{T}}}+e_n^{\mathrm{T}}l_1^{(n-k-1)}(e_1+h_1^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm{T}}}+(e_1+h_1^{(n-k)})\underline{e_n^{\mathrm{T}}}\}$。利用前面第二段已描述的列向量 $l_i^{(r)}$，$h_i^{(r)}$ 的性质特点，按照上式中各 e_i^{T} $(i=1,\cdots,n)$ 列向量位置上的代数式子，现在分别进行化简，各自整理得到各 e_i^{T} 列向量位置上的向量内容如下：

$$(e_{k+2}+h_{k+2}^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm T}}+e_3^{\mathrm T}l_2^{(n-k-1)}(e_{k+3}+h_{k+3}^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm T}}+\cdots+e_{n-k-2}^{\mathrm T}l_2^{(n-k-1)}(e_{n-2}+h_{n-2}^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm T}}+e_{n-k-1}^{\mathrm T}l_2^{(n-k-1)}(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm T}}+e_{n-k}^{\mathrm T}l_2^{(n-k-1)}e_n\underline{e_1^{\mathrm T}}+\underbrace{e_{n-k+1}^{\mathrm T}l_2^{(n-k-1)}}_{0}(e_k+h_k^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm T}}+\underbrace{e_{n-k+2}^{\mathrm T}l_2^{(n-k-1)}}_{0}(e_{k-1}+h_{k-1}^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm T}}+\cdots+\underbrace{e_n^{\mathrm T}l_2^{(n-k-1)}}_{0}(e_1+h_1^{(n-k)})\underline{e_1^{\mathrm T}}=[e_{k+2}+\underbrace{h_{k+2}^{(n-k)}+e_3^{\mathrm T}l_2^{(n-k-1)}(e_{k+3}+h_{k+3}^{(n-k)})+\cdots+e_{n-k-2}^{\mathrm T}l_2^{(n-k-1)}(e_{n-2}+h_{n-2}^{(n-k)})+e_{n-k-1}^{\mathrm T}l_2^{(n-k-1)}(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-k)})+e_{n-k}^{\mathrm T}l_2^{(n-k-1)}e_n}_{\text{令}h_{k+2}^{(n-k-1)}}]e_1^{\mathrm T}=(e_{k+2}+h_{k+2}^{(n-k-1)})\underline{e_1^{\mathrm T}};$$

$$(e_{k+3}+h_{k+3}^{(n-k)})\underline{e_2^{\mathrm T}}+\cdots+e_{n-k-2}^{\mathrm T}l_3^{(n-k-1)}(e_{n-2}+h_{n-2}^{(n-k)})\underline{e_2^{\mathrm T}}+e_{n-k-1}^{\mathrm T}l_3^{(n-k-1)}(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-k)})\underline{e_2^{\mathrm T}}+e_{n-k}^{\mathrm T}l_3^{(n-k-1)}e_n\underline{e_2^{\mathrm T}}+\underbrace{e_{n-k+1}^{\mathrm T}l_3^{(n-k-1)}}_{0}(e_k+h_k^{(n-k)})\underline{e_2^{\mathrm T}}+\underbrace{e_{n-k+2}^{\mathrm T}l_3^{(n-k-1)}}_{0}(e_{k-1}+h_{k-1}^{(n-k)})\underline{e_2^{\mathrm T}}+\cdots+\underbrace{e_n^{\mathrm T}l_3^{(n-k-1)}}_{0}(e_1+h_1^{(n-k)})\underline{e_2^{\mathrm T}}=[e_{k+3}+\underbrace{h_{k+3}^{(n-k)}+\cdots+e_{n-k-2}^{\mathrm T}l_3^{(n-k-1)}(e_{n-2}+h_{n-2}^{(n-k)})+e_{n-k-1}^{\mathrm T}l_3^{(n-k-1)}(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-k)})+e_{n-k}^{\mathrm T}l_3^{(n-k-1)}e_n}_{\text{令}h_{k+3}^{(n-k-1)}}]\underline{e_2^{\mathrm T}}=(e_{k+3}+h_{k+3}^{(n-k-1)})\underline{e_2^{\mathrm T}};\cdots;$$

$$(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-k)})\underline{e_{n-k-2}^{\mathrm T}}+e_{n-k}^{\mathrm T}l_{n-k-1}^{(n-k-1)}e_n\underline{e_{n-k-2}^{\mathrm T}}+\underbrace{e_{n-k+1}^{\mathrm T}l_{n-k-1}^{(n-k-1)}}_{0}(e_k+h_k^{(n-k)})\underline{e_{n-k-2}^{\mathrm T}}+\underbrace{e_{n-k+2}^{\mathrm T}l_{n-k-1}^{(n-k-1)}}_{0}(e_{k-1}+h_{k-1}^{(n-k)})\underline{e_{n-k-2}^{\mathrm T}}+\cdots+\underbrace{e_n^{\mathrm T}l_{n-k-1}^{(n-k-1)}}_{0}(e_1+h_1^{(n-k)})\underline{e_{n-k-2}^{\mathrm T}}=(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-k-1)})\underline{e_{n-k-2}^{\mathrm T}}\ (\text{令 }h_{n-1}^{(n-k-1)}=h_{n-1}^{(n-k)}+e_{n-k}^{\mathrm T}l_{n-k-1}^{(n-k-1)}e_n);$$

$$e_n\underline{e_{n-k-1}^{\mathrm T}}=e_n\underline{e_{n-k-1}^{\mathrm T}};$$

$$(e_{k+1}+h_{k+1}^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm T}}+e_2^{\mathrm T}l_1^{(n-k-1)}(e_{k+2}+h_{k+2}^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm T}}+e_3^{\mathrm T}l_1^{(n-k-1)}(e_{k+3}+h_{k+3}^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm T}}+\cdots+e_{n-k-2}^{\mathrm T}l_1^{(n-k-1)}(e_{n-2}+h_{n-2}^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm T}}+e_{n-k-1}^{\mathrm T}l_1^{(n-k-1)}(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm T}}+e_{n-k}^{\mathrm T}l_1^{(n-k-1)}e_n\underline{e_{n-k}^{\mathrm T}}+\underbrace{e_{n-k+1}^{\mathrm T}l_1^{(n-k-1)}}_{0}(e_k+h_k^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm T}}+\underbrace{e_{n-k+2}^{\mathrm T}l_1^{(n-k-1)}}_{0}(e_{k-1}+h_{k-1}^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm T}}+\cdots+\underbrace{e_n^{\mathrm T}l_1^{(n-k-1)}}_{0}(e_1+h_1^{(n-k)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm T}}=(e_{k+1}+h_{k+1}^{(n-k-1)})\underline{e_{n-k}^{\mathrm T}}\ (\text{令 }h_{k+1}^{(n-k-1)}=h_{k+1}^{(n-k)}+e_2^{\mathrm T}l_1^{(n-k-1)}(e_{k+2}+h_{k+2}^{(n-k)})+\cdots+e_{n-k}^{\mathrm T}l_1^{(n-k-1)}e_n);$$

$$(e_k+h_k^{(n-k)})\underline{e_{n-k+1}^{\mathrm T}}=(e_k+h_k^{(n-k-1)})\underline{e_{n-k+1}^{\mathrm T}}\ (\text{令 }h_k^{(n-k-1)}=h_k^{(n-k)});\ (e_{k-1}+h_{k-1}^{(n-k)})\underline{e_{n-k+2}^{\mathrm T}}=(e_{k-1}+h_{k-1}^{(n-k-1)})\underline{e_{n-k+2}^{\mathrm T}}\ (\text{令 }h_{k-1}^{(n-k-1)}=h_{k-1}^{(n-k)});\cdots;(e_1+h_1^{(n-k)})\underline{e_n^{\mathrm T}}=(e_1+h_1^{(n-k-1)})\underline{e_n^{\mathrm T}}\ (\text{令 }h_1^{(n-k-1)}=h_1^{(n-k)})。$$

以上各向量位置上对各自向量内容加法运算，汇总所有向量位置的向量内容最后写成一个式子，得到：

$$(k+1)\text{式}=(e_{k+2}+h_{k+2}^{(n-k-1)})e_1^{\mathrm T}+(e_{k+3}+h_{k+3}^{(n-k-1)})e_2^{\mathrm T}+\cdots+(e_{n-1}+h_{n-1}^{(n-k-1)})e_{n-k-2}^{\mathrm T}+e_ne_{n-k-1}^{\mathrm T}+(e_{k+1}+h_{k+1}^{(n-k-1)})e_{n-k}^{\mathrm T}+(e_k+h_k^{(n-k-1)})e_{n-k+1}^{\mathrm T}+(e_{k-1}+h_{k-1}^{(n-k-1)})e_{n-k+2}^{\mathrm T}+\cdots+(e_1+h_1^{(n-k-1)})e_n^{\mathrm T}。$$

此式就是当 $r=n-k-1$ 时实施矩阵右乘运算的推演式子。即当 $w=k+1$ 时，矩阵形式仍然成立，归纳法结论证毕。因此当 $w=n-1$ 时，就有递推推演的式子，即 $r=1$ 时，$(n-1)$式必然成立：

$$(n-1)\text{式}=e_ne_1^{\mathrm T}+(e_{n-1}+h_{n-1}^{(1)})e_2^{\mathrm T}+(e_{n-2}+h_{n-2}^{(1)})e_3^{\mathrm T}+\cdots+(e_1+h_1^{(1)})e_n^{\mathrm T}$$

此式就是¤中 $N=N^{(n-1)}I_{nn-1}\cdots I_{n1}N^{(n-2)}I_{n-1n-2}\cdots I_{n-11}\cdots N^{(3)}I_{43}I_{42}I_{41}N^{(2)}I_{32}I_{31}N^{(1)}I_{21}$ 的代数表示式，由代数表示式不难写出 N 的矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}0 & \cdots & & 0 & 1\\ & & & 1 & *\\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \\ & \ddots & \ddots & & \vdots\\ 0 & 1 & * & \ddots & \\ 1 & * & & \cdots & *\end{bmatrix}$$

，现已证明 N 的假设正确。

从而证实最后约化结果式子¤中 $\widetilde{N}=NI_{21}I_{31}I_{32}I_{41}I_{42}I_{43}\cdots I_{n1}\cdots I_{nn-1}$ 就是单位下三角阵，验证本段开始所述，即矩阵乘积式子 $\widetilde{A}_0=\widetilde{N}^{-1}A_{n-1}$ 就是对原始矩阵 A_0 最后实现 L-U 三角分解的依据结论。

4 给出原始矩阵 A_0 的各阶前主子式

事实上，第二段约化中间结果按子矩阵 $A_r^{(r+1,r+1)}$ 出现的先后顺序，第 r 步同时得到了原始矩阵 A_0 的 $r+1$ 阶前主子式 $|A_0^{(r+1,r+1)}|$ 的值。第 r 步的中间结果矩阵因 $r+1$ 阶主子矩阵已经上三角化因而易得行列式，其与原始矩阵的前主子式具有相同绝对值，再由第 r 步约化每小步行交换实际次数，以确定主子式的符号改变。

5 数值例子

例 假设 4 位十进数字，原始矩阵 $A_0=\begin{bmatrix}0.7321 & 0.4135 & 0.3126 & 0.5163\\ 0.2317 & 0.6123 & 0.4137 & 0.6696\\ 0.4283 & 0.8176 & 0.4257 & 0.8312\\ 0.8653 & 0.2165 & 0.8265 & 0.7123\end{bmatrix}$ 实现 L-U 分解，给出各阶前主子式。

解：从原始矩阵 A_0 开始，约化步骤共 3 步：

$$A_1^{(1)}=M_{21}A_0=\begin{bmatrix}0.7321 & 0.4135 & 0.3126 & 0.5163\\ 0 & 0.4814 & 0.3148 & 0.5062\\ 0.4283 & 0.8176 & 0.4257 & 0.8312\\ 0.8653 & 0.2165 & 0.8265 & 0.7123\end{bmatrix},$$

$$A_2^{(1)}=M_{31}A_1=\begin{bmatrix}0.7321 & 0.4135 & 0.3126 & 0.5163\\ 0 & 0.4814 & 0.3148 & 0.5062\\ 0 & 0.5757 & 0.2428 & 0.5292\\ 0.8653 & 0.2165 & 0.8265 & 0.7123\end{bmatrix},$$

$$A_2^{(2)}=M_{32}I_{32}A_2^{(1)}=\begin{bmatrix}0.7321 & 0.4135 & 0.3126 & 0.5163\\ 0 & 0.5757 & 0.2428 & 0.5292\\ 0 & 0 & 0.1118 & 0.0637\\ 0.8653 & 0.2165 & 0.8265 & 0.7123\end{bmatrix},$$

$$A_3^{(1)}=M_{41}I_{41}A_2=\begin{bmatrix}0.8653 & 0.2165 & 0.8265 & 0.7123\\ 0 & 0.5757 & 0.2428 & 0.5292\\ 0 & 0 & 0.1118 & 0.0637\\ 0 & 0.2303 & -0.3867 & -0.0864\end{bmatrix},$$

$$A_3^{(2)}=M_{42}A_3^{(1)}=\begin{bmatrix}0.8653 & 0.2165 & 0.8265 & 0.7123\\ 0 & 0.5757 & 0.2428 & 0.5292\\ 0 & 0 & 0.1118 & 0.0637\\ 0 & 0 & -0.4838 & -0.2981\end{bmatrix},$$

$$A_3=M_{43}I_{43}A_3^{(2)}=\begin{bmatrix}0.8653 & 0.2165 & 0.8265 & 0.7123\\ 0 & 0.5757 & 0.2428 & 0.5292\\ 0 & 0 & -0.4838 & -0.2981\\ 0 & 0 & 0 & -0.0051\end{bmatrix}。$$

得到最后约化结果为上三角阵 A_3，$A_3=M_{43}I_{43}M_{42}M_{41}$

$I_{41}\ M_{32}\ I_{32}\ M_{31}\ M_{21}\ A_0 = \underbrace{M_{43}I_{43}M_{42}I_{43}I_{43}M_{41}I_{43}}_{记N^{(3)}}\ I_{43}\ I_{41}\ \underbrace{M_{32}I_{32}M_{31}I_{32}}_{记N^{(2)}}I_{32}\ \underbrace{M_{21}}_{记N^{(1)}}A_0$,

由记号,A_3 简写为:$A_3 = N^{(3)}\ I_{43}\ I_{41}\ N^{(2)}\ I_{32}\ N^{(1)}\ A_0 = NA_0 = NI_{32}I_{41}I_{43}I_{43}I_{41}I_{32}A_0$,由此得到,最后约化结果☒:$A_3=\widetilde{N}\widetilde{A}_0 \Leftrightarrow \widetilde{A}_0=\widetilde{N}^{-1}A_3$($\widetilde{N}=N^{(3)}I_{43}I_{41}N^{(2)}I_{32}N^{(1)}I_{32}I_{41}I_{43}$, $\widetilde{A}_0=I_{43}I_{41}I_{32}A_0$)。

分别求出上述约化步骤中所有乘子:$m_{21}=\dfrac{0.2317}{0.7321}=0.3165$;$m_{31}=\dfrac{0.4283}{0.7321}=0.5850$;$m_{32}=\dfrac{0.4814}{0.5757}=0.8362$;$m_{41}=\dfrac{0.7321}{0.8653}=0.8461$;$m_{42}=\dfrac{0.2303}{0.5757}=0.4000$;$m_{43}=\dfrac{0.1118}{-0.4838}=-0.2311$。数值代入,

$$N^{(3)}=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-m_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&-m_{42}&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\-m_{41}&&1&\\&&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\-m_{41}&-m_{42}&1&\\m_{41}m_{43}&m_{42}m_{43}&-m_{43}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\-0.8461&-0.4&1&\\-0.1955&-0.0924&0.2311&1\end{bmatrix};$$

$$N^{(2)}=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&-m_{32}&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\-m_{31}&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\-m_{31}&1&&\\m_{31}m_{32}&-m_{32}&1&\\&&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\-0.5850&1&&\\0.4892&-0.8362&1&\\&&&1\end{bmatrix};\quad N^{(1)}=M_{21}=\begin{bmatrix}1&&&\\-m_{21}&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1&&&\\-0.3165&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\Rightarrow N=N^{(3)}I_{43}I_{41}N^{(2)}I_{32}N^{(1)}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&-0.4&0&-0.8461\\0.2311&-0.0924&1&-0.1955\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-0.5850&0&1&0\\0.4892&1&-0.8362&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-0.3165&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\-0.5850&0&1&0\\1.2340&0&-0.4&-0.8461\\0.7744&1&-0.9286&-0.1955\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-0.3165&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\-0.5850&0&1&0\\1.2340&0&-0.4&-0.8461\\0.4579&1&-0.9286&-0.1955\end{bmatrix}\Rightarrow\widetilde{N}=NI_{32}I_{41}I_{43}=$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-0.5850&0\\-0.8461&-0.4&1.2340&0\\-0.1955&-0.9286&0.4579&1\end{bmatrix}$$

对 $\widetilde{N}$ 的第 2 列×(0.5850)加到第 3 列上,初等列变换得到:

$$\widetilde{\widetilde{N}}=\widetilde{N}P_{23}(0.5850)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-0.8461&-0.4&1&0\\-0.1955&-0.9286&-0.0853&1\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\widetilde{N}}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0.8461&0.4&1&0\\0.2677&0.9627&0.0853&1\end{bmatrix}$$。同样地,也对 $\widetilde{A}_0$ 实施初等行变换,将 $\widetilde{A}_0$ 的第 3 行×(−0.5850)加到第 2 行上,得到:

$\widetilde{\widetilde{A}}_0=P_{23}^{-1}(0.5850)\widetilde{A}_0=P_{23}(-0.5850)\widetilde{A}_0=P_{23}(-0.5850)I_{43}I_{41}I_{32}A_0=$

$$P_{23}(-0.5850)\begin{bmatrix}0.8653&0.2165&0.8265&0.7123\\0.4283&0.8176&0.4257&0.8312\\0.7321&0.4135&0.3126&0.5163\\0.2317&0.6123&0.4137&0.6696\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}0.8653&0.2165&0.8265&0.7123\\0&0.5757&0.2428&0.5292\\0.7321&0.4135&0.3126&0.5163\\0.2317&0.6123&0.4137&0.6696\end{bmatrix}。$$

因此,为满足矩阵分解规则,约化结果式子需要适当的初等变换,最终呈现矩阵的三角分解表示依据。

如上,约化结果式子只要稍作变形,就可得到等价式子:$A_3=\widetilde{N}\widetilde{A}_0=\widetilde{N}P_{23}(0.5850)P_{23}^{-1}(0.5850)\widetilde{A}_0=\widetilde{\widetilde{N}}\widetilde{\widetilde{A}}_0$,$\Leftrightarrow\widetilde{\widetilde{A}}_0=\widetilde{\widetilde{N}}^{-1}A_3$,此式还原了矩阵三角分解的存在,指出了原始矩阵 A_0 实质形成 L-U 分解的构造实现。最后给出原始矩阵 A_0 的各阶前主子式:

$|A_0^{(1,1)}|=0.7321$;$|A_0^{(2,2)}|=0.7321\times0.4814=0.3524$;$|A_0^{(3,3)}|=(-1)^1\times0.7321\times0.5757\times0.1118=-0.0471$;$|A_0|=|A_0^{(4,4)}|=(-1)^3\times0.8653\times0.5757\times(-0.4838)\times(-0.0051)=-0.0012$。

参 考 文 献

[1] 孙潚.数值线代数讲义[M].天津:南开大学出版社,1987:131-136.

[2] 威尔金森 J H.代数特征值问题[M].石钟慈,邓健新,译.北京:科学出版社,1987:247-249.

[3] 曹志浩,张玉德,李瑞遐.矩阵计算和方程求根[M].北京:人民教育出版社,1981:139-146.

[4] 格罗布 G H,万罗安 C F.矩阵计算[M].廉庆荣,邓健新,刘秀兰,译.大连:大连理工大学出版社,1988:54-57,64-67.