

基于“逻辑与”算子的双量化多粒度粗糙集模型

陈华峰¹ 沈玉玲¹ 龙建武^{1,2} 瞿先平^{1,2}

(重庆电讯职业学院基础部 重庆 402247)¹ (重庆理工大学计算机科学与工程学院 重庆 400054)²

摘要 在多粒度近似空间中,将刻画相对量化信息的变精度粗糙集和描述绝对量化信息的程度粗糙集通过“逻辑与”算子结合起来,建立了基于“逻辑与”算子的双量化多粒度粗糙集模型,并分别从乐观和悲观双量化多粒度粗糙集的角度对模型的一些数学性质进行了讨论。该模型对多粒度近似空间中的相对量化信息和绝对量化信息同时进行了描述,在处理带噪声的数据方面有一定的应用价值,丰富了基于粗糙集理论的知识发现的理论基础。

关键词 变精度粗糙集,程度粗糙集,多粒度粗糙集,逻辑与,双量化

中图法分类号 TP181 **文献标识码** A

Double Quantitative Multi-granulation Rough Set Model Based on “Logical Conjunction” Operator

CHEN Hua-feng¹ SHEN Yu-ling¹ LONG Jian-wu^{1,2} QU Xian-ping^{1,2}

(Department of Foundation, Chongqing Telecommunication Polytechnic College, Chongqing 402247, China)¹

(College of Computer Science and Engineering, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)²

Abstract In this study, the double quantitative multi-granulation rough set model based on logical conjunction operator was proposed in multi-granulation approximate space. The variable precision rough set which is characterized by relative quantitative information and graded rough which describes absolute quantitative information were combined to set double quantitative multi-granulation rough set model based on logical conjunction operator. Some mathematical properties of the investigated rough set model were researched in the viewpoints of optimistic and pessimistic. The constructed model describes relative quantitative information and absolute quantitative information at the same time in an approximate space. It is useful to process noisy data and provides more abundant theoretical principle for knowledge discovery based on rough set theory.

Keywords Variable precision rough set, Graded rough set, Multi-granulation rough set, Logical conjunction; Double quantitative

1 引言

粗糙集理论作为一种高效的研究不确定性的数学理论,最早由波兰数学家 Pawlak^[3]于20世纪80年代提出。其理论基础是基于等价关系所构成的对论域的划分,然后利用集合间的包含关系定义一对近似集,再根据已有的知识来近似地逼近未知的概念。该理论将人的智能体现在对事物、行为、感知等的分类能力上,而不确定性正好可以归属到对近似集所刻画的边界域中,其已被广泛应用于机器学习、医疗诊断、数据挖掘等诸多领域。然而,随着理论研究和工程应用的不断深入,经典粗糙集模型表现出了明显的不足,其因缺乏近似空间的定量信息从而不能有效处理数据噪声。因此,对粗糙集进行量化模型的构建与研究具有极其重要的意义^[10],而变精度粗糙集^[11-12]和程度粗糙集^[8-9]分别从相对量化信息和绝对量化信息入手对粗糙集进行了改进,在将变精度粗糙集与程度粗糙集结合研究方面已经取得了部分成果^[2,13-15]。从粒计算的角度来看,这些扩展的粗糙集模型的本质仍然是在单

一粒度空间中定义的,目标概念的近似集仍是由一个二元关系所诱导的粒度空间中的信息粒来近似表示的。钱宇华等^[4-5]在对决策分析的相关研究中指出,多个决策者之间的关系有可能是相互独立的,因而需要采用多个二元关系来进行目标的近似逼近,并针对性地提出了多粒度粗糙集模型的概念。在多粒度粗糙集与量化粗糙集模型结合研究方面,窦慧丽等提出了可变精度多粒度粗糙集模型^[1],吴远志等^[7]则研究了程度多粒度粗糙集,在此基础上沈家兰等对可变程度多粒度粗糙集进行了讨论^[6]。徐怡等^[16]则在弥补乐观多粒度粗糙集模型较为宽松、悲观多粒度粗糙集模型较为严格的缺点的基础上,为使粗糙集理论能从多粒度计算的角度对名义型和数值型并存的混合型数据进行处理,将邻域多粒度粗糙集模型与可变粒度粗糙集模型相结合,提出了基于邻域的可变粒度粗糙集模型。

本文正是在这些研究的基础上,在多粒度近似空间中将变精度粗糙集与程度粗糙集这两种各具优点的粗糙集模型通过“逻辑与”算子相结合并进行研究,建立基于“逻辑与”算子

本文受国家自然科学基金项目(61502065),重庆市委基础科学与前沿技术研究(重点)项目(cstc2015jcyjBX0127),重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500922, KJ1605201)资助。

陈华峰(1977—),男,硕士,讲师,主要研究方向为不确定性推理、粗糙集理论与应用, E-mail: 13527418641@163.com(通信作者);沈玉玲(1989—),女,硕士,讲师,主要研究方向为微分几何及其应用;龙建武(1984—),男,博士,副教授,主要研究方向为图形处理与机器视觉;瞿先平(1986—),女,讲师,主要研究方向为最优化理论、计算机图像图形学。

的双量化多粒度粗糙集模型。与传统粗糙集模型相比,该模型同时考虑了相对量化信息和绝对量化信息,本文在建立模型后对其基本的数学性质进行了系统性的研究。

2 预备知识

本节将简要介绍变精度粗糙集模型、程度粗糙集模型和多粒度粗糙集模型的相关基本知识,为讨论基于“逻辑与”算子的双量化多粒度粗糙集模型提供必要的理论基础。设四元组 $S=(U, AT, V, F)$ 为一个信息系统,其中 $U=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为论域且是非空有限对象集, $AT=\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 为属性集, V 为有限值域, $F=\{f|U \rightarrow V_{a_i}, a_i \in AT\}$ 是对象关于属性的关系集。对任意的 $A \subseteq AT$, 可以得到一个不可分辨关系, 即 $IND(A)=\{(x, y) \in U \times U: \forall a \in A, a(x)=a(y)\}$, 则 U 中关于属性 A 的所有与 x 具有不可分辨关系 $IND(A)$ 的对象的集合为 $[x]_A=\{y \in U: (x, y) \in IND(A)\}$, 即为 x 关于属性集 A 的等价类。

2.1 变精度粗糙集模型^[11-12]

设 S 为一个信息系统, 对任意的 $X \subseteq U, A \subseteq AT$, $c([x]_A, X)=1-|[x]_A \cap X|/|[x]_A|$ 称为等价类 $[x]_A$ 关于集合 X 的错误分类率, 其中 $|\cdot|$ 表示集合的势。设 β 为 0 到 1 的实数, 为可调错误分类水平, $1-\beta$ 为精度。集合 $\overline{A_\beta}X=\{x \in U: c([x]_A, X) < 1-\beta\}$ 和 $\underline{A_\beta}X=\{x \in U: c([x]_A, X) \leq \beta\}$ 分别为 X 的精度为 $1-\beta$ 的关于属性 A 的上、下近似集。若 $\overline{A_\beta}X \neq \underline{A_\beta}X$, 则称 X 在精度 $1-\beta$ 下是关于 A 粗糙的, 否则称 X 是关于 A 精确的。而 $\overline{A_\beta}X$ 是“关于 X 的错误分类率小于 $1-\beta$ 的等价类”的所有元素并集, $\underline{A_\beta}X$ 是“关于 X 的错误分类率不大于 β 的等价类”的所有元素的并集。在变精度粗糙集模型中参数 β 的取值范围一般为 $[0, 0.5)$, 也可以将参数 β 的取值范围限定在 $(0.5, 1]$, 这两种情况具有很强的对称性, 因此一般情况下只需研究其中一部分, 而另一部分可以类似地得到^[14], 本文中 $\beta \in [0, 0.5)$ 。

2.2 程度粗糙集模型^[9, 12]

设 S 为一个信息系统, 对任意的 $X \subseteq U, A \subseteq AT, k \in N$ 为非负整数, 集合 $\overline{A_k}X=\{x \in U: |[x]_A \cap X| > k\}$ 和 $\underline{A_k}X=\{x \in U: |[x]_A| - |[x]_A \cap X| \leq k\}$ 分别为 X 的程度为 k 的关于 A 的上、下近似集, 若 $\overline{A_k}X \neq \underline{A_k}X$, 则称 X 在程度 k 时是关于 A 粗糙的, 否则称其是关于 A 精确的。其中, $\overline{A_k}X$ 是“属于 X 的元素个数多于 k 个等价类”的并集, $\underline{A_k}X$ 是“最多只有 k 个元素不属于 X 的等价类”的集合。

2.3 多粒度粗糙集模型^[4-5]

在粒计算数据分析的方法中, 采用一族不可分辨关系来进行目标概念的近似逼近, 即为多粒度粗糙集模型, 其形式上包括乐观多粒度粗糙集和悲观多粒度粗糙集。

设 S 为一个信息系统, $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq AT$, 对于任意的 $X \subseteq U$, X 的乐观多粒度下近似算子 $\sum_{i=1}^m A_i^O(X)$ 与上近似算子 $\sum_{i=1}^m A_i^O(X)$ 的定义分别为:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m A_i^O(X) &= \{x \in U: [x]_{A_1} \subseteq X \vee \dots \vee [x]_{A_m} \subseteq X\} \\ \sum_{i=1}^m A_i^O(X) &= \sim \sum_{i=1}^m A_i^O(\sim X) \end{aligned}$$

其中, $\sim X$ 表示 X 的补集, 当上、下近似集不等时, 称集合 X 关于粒度 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 是乐观粗糙的。从定义中可以看出,

当某个对象属于乐观多粒度下近似时要求该对象至少有一个粒度上的等价类包含在目标概念中。与乐观多粒度粗糙集相对应的悲观多粒度粗糙集的定义如下:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m A_i^P(X) &= \{x \in U: [x]_{A_1} \subseteq X \wedge \dots \wedge [x]_{A_m} \subseteq X\} \\ \sum_{i=1}^m A_i^P(X) &= \sim \sum_{i=1}^m A_i^P(\sim X) \end{aligned}$$

由该定义可知, 当某个对象属于悲观多粒度下近似集时, 要求该对象在所有粒度上的等价类都包含在目标概念中, 因此悲观多粒度下近似的要求比乐观多粒度下近似的要求更为严格。

3 基于“逻辑与”算子的双量化多粒度粗糙集模型

本节在多粒度近似空间中通过“逻辑与”算子, 将刻画相对量化信息的变精度粗糙集模型和描述绝对量化信息的程度粗糙集模型结合起来, 建立一个基于“逻辑与”算子的双量化多粒度粗糙集模型, 并对该模型的一些基本性质进行了讨论。接下来将分别对乐观双量化多粒度粗糙集模型和双悲观量化多粒度粗糙集模型进行讨论。

3.1 乐观逻辑与双量化多粒度粗糙集模型

定义 1 设 S 为一个信息系统, 若 $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq AT$, $\beta \in [0, 1], k \in N$ 为非负整数, 对任意的 $X \subseteq U$, X 基于“逻辑与”算子的乐观双量化多粒度下近似算子和上近似算子的定义分别如下:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) &= \{x \in U: \bigvee_{j=1}^m (c([x]_{A_j}, X) \leq \beta) \wedge \bigvee_{l=1}^m (|[x]_{A_l}| - |[x]_{A_l} \cap X| \leq k)\} \\ \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) &= \sim \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(\sim X) \end{aligned}$$

称序偶 $(\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X), \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X))$ 为集合 X 依精度为 β 且程度为 k 的乐观逻辑与双量化多粒度粗糙集, 由下近似的定义可知, 当某个对象 x 属于逻辑与乐观双量化多粒度的下近似集时, 要求 x 至少有一个粒度使得 $c([x]_{A_j}, X) \leq \beta$, 且同时存在一个粒度使得 $|[x]_{A_l}| - |[x]_{A_l} \cap X| \leq k$, 其中粒度 A_j 和 A_l 可以相同也可以不同。

根据定义 1 所定义的近似算子, 我们可以给出乐观逻辑与双量化多粒度粗糙集的各个粗糙区域。由于程度粗糙集的下近似集并非一定包含于上近似集, 因此分别定义正域、负域、上边界域、下边界域为:

$$\begin{aligned} (1) Pos(X)_{\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O} &= \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \cap \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \\ (2) Neg(X)_{\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O} &= \sim (\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \cup \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X)) \\ (3) Ubn(X)_{\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O} &= \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) - \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \\ (4) Lbn(X)_{\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O} &= \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) - \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \\ (5) Bn(X)_{\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O} &= \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \Delta \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \end{aligned}$$

本文将粗糙集区域形式进行简写, 如正域简记为 $Pos(X)_{\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O}$ 。其中“ Δ ”表示集合的对称差运算, 因此:

$$Bn(X)_{\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O} = Lbn(X)_{\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O} \cup Ubn(X)_{\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O}$$

接下来将对乐观逻辑与双量化多粒度粗糙集模型的性质进行研究。

定理 1 设 S 为一个信息系统, 若 $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq AT$, $\beta \in [0, 1], k \in N$ 为非负整数, 对于任意的 $X \subseteq U$, 关于 X 的乐观逻辑与双量化上近似集有:

$$\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) = \{x \in U : \bigwedge_{j=1}^m (c([x]_{A_j}, X) < 1 - \beta) \vee \bigwedge_{l=1}^m (|[x]_{A_l} \cap X| > k)\}$$

证明: 由定义 1 知:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) &= \sim \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(\sim X) \\ &= \sim \{x \in U : \bigvee_{j=1}^m (c([x]_{A_j}, \sim X) \leq \beta) \wedge \bigvee_{l=1}^m (|[x]_{A_l} \cap \sim X| \leq k)\} \\ &= \{x \in U : \bigwedge_{j=1}^m (c([x]_{A_j}, \sim X) > \beta) \vee \bigwedge_{l=1}^m (|[x]_{A_l} \cap \sim X| > k)\} \\ &= \{x \in U : \bigwedge_{j=1}^m (1 - \frac{|[x]_{A_j} \cap \sim X|}{|[x]_{A_j}|} > \beta) \vee \bigwedge_{l=1}^m (|[x]_{A_l} \cap \sim X| > k)\} \\ &= \{x \in U : \bigwedge_{j=1}^m (\frac{|[x]_{A_j} \cap X|}{|[x]_{A_j}|} > \beta) \vee \bigwedge_{l=1}^m (|[x]_{A_l} \cap X| > k)\} \\ &= \{x \in U : \bigwedge_{j=1}^m (c([x]_{A_j}, X) < 1 - \beta) \vee \bigwedge_{l=1}^m (|[x]_{A_l} \cap X| > k)\} \end{aligned}$$

由定理 1 可知, 当对象 x 属于乐观逻辑与双量化多粒度上近似集时, 所有粒度满足 $c([x]_{A_j}, X) < 1 - \beta$ 或者对所有的粒度有 $|[x]_{A_l} \cap X| > k$ 成立。

定理 2 设 S 为一个信息系统, 若 $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq AT$, $\beta \in [0, 0.5], k \in N$ 为非负整数, 对于任意的 $X, Y \subseteq U$, 乐观逻辑与双量化近似算子有如下性质成立。

- (1) $\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(U) = U$
- (2) $\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(\emptyset) = \emptyset$
- (3) $\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X \cap Y) \subseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \cap \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(Y)$
- (4) $\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X \cup Y) \supseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \cup \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(Y)$
- (5) $\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X \cap Y) \subseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \cap \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(Y)$
- (6) $\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X \cup Y) \supseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \cup \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(Y)$
- (7) 若 $k_1 \leq k_2$ 且 $k_1, k_2 \in N$, 则

$$\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_1}^O(X) \subseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_2}^O(X)$$

$$\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_2}^O(X) \subseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_1}^O(X)$$

- (8) 若 $\beta_1 \leq \beta_2$ 且 $\beta_1, \beta_2 \in [0, 0.5]$, 则

$$\sum_{i=1}^m A_{i\beta_1\wedge k}^O(X) \subseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta_2\wedge k}^O(X)$$

$$\sum_{i=1}^m A_{i\beta_2\wedge k}^O(X) \subseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta_1\wedge k}^O(X)$$

证明: 性质(1)和(2)由定义 1 易证。

关于性质(3), 对于任意的 $x \in \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X \cap Y)$, 由定义 1 可知存在粒度 A_j 和 A_l 使得 $c([x]_{A_j}, X \cap Y) \leq \beta$ 且 $|[x]_{A_l} \cap (X \cap Y)| \leq k$, 其中 A_j 与 A_l 无关。又因为对任意的

$X, Y \subseteq U$, 有 $c([x]_{A_j}, X) \leq c([x]_{A_j}, X \cap Y) \leq \beta$ 且 $|[x]_{A_l} \cap (X \cap Y)| \leq k$, 即有 $x \in \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X)$, 同理可得 $x \in \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(Y)$ 。因此 $x \in \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \cap \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(Y)$, 即 $\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X \cap Y) \subseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \cap \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(Y)$ 。

对于(4), 任取 $x \in (\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \cup \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(Y))$, 若 $x \in \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X)$ 有 $c([x]_{A_j}, X) \leq \beta$ 且 $|[x]_{A_l} \cap X| \leq k$, 而 $c([x]_{A_j}, X \cup Y) \leq c([x]_{A_j}, X) \leq \beta$, 且 $|[x]_{A_l} \cap (X \cup Y)| \leq |[x]_{A_l} \cap X| \leq k$, 则有 $x \in \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X \cup Y)$ 。

当 $x \in \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(Y)$, 同理可得 $x \in \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X \cup Y)$, 因此 $\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X \cup Y) \supseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(X) \cup \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^O(Y)$ 。

对于性质(5)和(6), 由定义 1 可知, 上下近似算子之间存在对偶性, 因此其证明过程可由性质(3)和(4)导出。

对于性质(7), 不妨任取 $x \in \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_1}^O(X)$, 由定义 1 知存在粒度 A_j 和 A_l , 使 $c([x]_{A_j}, X) \leq \beta$ 且 $|[x]_{A_l} \cap X| \leq k_1$, 又因 $k_1 \leq k_2$, 故 $|[x]_{A_l} \cap X| \leq k_2$, 则 $x \in \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_2}^O(X)$, 也即 $\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_1}^O(X) \subseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_2}^O(X)$ 。那么可以得到 $\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_1}^O(\sim X) \subseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_2}^O(\sim X)$, 那么 $\sim \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_1}^O(\sim X) \supseteq \sim \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_2}^O(\sim X)$, 由定义 1 可知 $\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_2}^O(X) \subseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k_1}^O(X)$ 。

关于性质(8), 对于任意的 $x \in \sum_{i=1}^m A_{i\beta_1\wedge k}^O(X)$, 有 $c([x]_{A_j}, X) \leq \beta_1$ 且 $|[x]_{A_l} \cap X| \leq k$, 而 $\beta_1 \leq \beta_2$, 则 $c([x]_{A_j}, X) \leq \beta_1 \leq \beta_2$, 因此有 $x \in \sum_{i=1}^m A_{i\beta_2\wedge k}^O(X)$, 即 $\sum_{i=1}^m A_{i\beta_1\wedge k}^O(X) \subseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta_2\wedge k}^O(X)$ 。与性质(7)类似, 利用对偶性可得 $\sum_{i=1}^m A_{i\beta_2\wedge k}^O(X) \subseteq \sum_{i=1}^m A_{i\beta_1\wedge k}^O(X)$ 。

3.2 悲观逻辑与双量化多粒度粗糙集模型

与 3.1 节中的研究方法类似, 我们将对悲观逻辑与双量化多粒度粗糙集模型进行讨论。

定义 2 设 S 为一个信息系统, 若 $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq AT$, $\beta \in [0, 1], k \in N$ 为非负整数, 对于任意的 $X \subseteq U$, 则 X 基于“逻辑与”算子的悲观双量化多粒度下近似算子和上近似算子的定义分别为:

$$\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^P(X) = \{x \in U : \bigwedge_{j=1}^m (c([x]_{A_j}, X) \leq \beta) \wedge \bigwedge_{l=1}^m (|[x]_{A_l} \cap X| \leq k)\}$$

$$\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^P(X) = \sim \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^P(\sim X)$$

称序偶 $(\sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^P(X), \sum_{i=1}^m A_{i\beta\wedge k}^P(X))$ 为集合 X 依精度为 β 且程度为 k 的悲观双量化多粒度粗糙集, 由下近似的定义可知, 当某个对象 x 属于逻辑与悲观双量化多粒度下近似集时, 要求 x 对所有的粒度有 $c([x]_{A_j}, X) \leq \beta$, 且 $|[x]_{A_l} \cap X| \leq k$, 即对于任意的 $A_j, A_l \subseteq AT, j, l = 1, 2, \dots, m$ 满足条件。该模型的其他粗糙集区域定义方法与 3.1 节类似。

定理 3 设 S 为一个信息系统,若 $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq AT$, $\beta \in [0, 1], k$ 为非负整数,对于任意的 $X \subseteq U$,关于 X 的悲观逻辑与双量化上近似集有:

$$\overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(X) = \{x \in U : \bigvee_{j=1}^m (c([x]_{A_j}, X) < 1 - \beta) \vee \bigvee_{l=1}^m (|[x]_{A_l} \cap X| > k)\}$$

证明:由定义 2 并结合定理 1 的证明过程易证。

由定理 3 可知,对象 x 属于悲观逻辑与双量化多粒度上近似集时,意味着至少存在一个粒度 A_j 使得 $c([x]_{A_j}, X) < 1 - \beta$,且至少存在一个粒度 A_l 使得 $|[x]_{A_l} \cap X| > k$ 成立,其中粒度 A_j 和 A_l 无关。

定理 4 设 S 为一个信息系统,若 $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq AT$, $\beta \in [0, 1], k \in N$ 为非负整数,对于任意的 $X, Y \subseteq U$,乐观逻辑与双量化近似算子有如下性质成立。

$$(1) \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(U) = U$$

$$(2) \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(\emptyset) = \emptyset$$

$$(3) \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(X \cap Y) \subseteq \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(X) \cap \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(Y)$$

$$(4) \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(X \cup Y) \supseteq \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(X) \cup \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(Y)$$

$$(5) \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(X \cap Y) \subseteq \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(X) \cap \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(Y)$$

$$(6) \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(X \cup Y) \supseteq \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(X) \cup \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k}^p}(Y)$$

(7) 若 $k_1 \leq k_2$ 且 $k_1, k_2 \in N$, 则:

$$\overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k_1}^p}(X) \subseteq \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k_2}^p}(X)$$

$$\overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k_2}^p}(X) \subseteq \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta \wedge k_1}^p}(X)$$

(8) 若 $\beta_1 \leq \beta_2$ 且 $\beta_1, \beta_2 \in [0, 0.5]$, 则:

$$\overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta_1 \wedge k}^p}(X) \subseteq \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta_2 \wedge k}^p}(X), \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta_2 \wedge k}^p}(X) \subseteq \overline{\sum_{i=1}^m A_{i\beta_1 \wedge k}^p}(X)$$

证明:可结合定义 2 和定理 2 的证明过程。

结束语 在多粒度近似空间中,本文通过“逻辑与”算子将变精度粗糙集和程度粗糙集结合起来,建立了逻辑与双量化多粒度粗糙集模型,并分别从乐观逻辑与双量化多粒度粗糙集和悲观逻辑与双量化多粒度粗糙集的角度对模型进行了研究,对所建立的粗糙集模型的基本数学性质进行了深入的讨论。该模型作为一种推广的粗糙集模型,可用于误差允许范围内的粗糙集建模等问题。

参考文献

- [1] 窦慧莉,吴陈,杨习贝,等. 可变精度多粒度粗糙集模型[J]. 江苏科技大学学报(自然科学版),2012,26(1):65-69.
- [2] 胡猛,徐伟华. 序信息系统中基于“逻辑且”和“逻辑或”的双量化粗糙模糊集[J]. 计算机科学,2016,43(1):98-102.
- [3] PAWLAK Z. Rough Sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,11(5):341-356.
- [4] QIAN Y H, LIANG J Y, YAO Y Y, et al. MGRS: A multi-dgranulation rough set [J]. Information Sciences, 2010, 180 (6): 949-970.
- [5] QIAN Y H, LIANG J Y, DANG C Y. Incomplete multi-granulation rough set [J]. IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics Part A, 2010, 40(2):420-431.
- [6] 沈家兰,汪小燕,申元霞,等. 可变程度多粒度粗糙集[J]. 小型微型计算机系统,2016,37(5):1012-1016.
- [7] 吴志远,钟培华,胡建根. 程度多粒度粗糙集[J]. 模糊系统与数学,2014,28(3):165-172.
- [8] XU W H, LIU S H, WANG Q R. The First Type of Grade Rough Set Based on Rough Membership Function [C] // Seventh International Conference System and Knowledge Discovery (FSKD2010). 2010:1922-1926.
- [9] YAO Y Y, LIN T Y. Generalization of rough sets using modal logics [J]. Intelligent Automatic and Soft Computing, 1996, 2: 103-120.
- [10] YAO Y Y, DENG X F. Quantitative rough sets based on subsethood measures [J]. Information Sciences, 2014, 267: 306-322.
- [11] ZIARKO W. Variable precision rough set model [J]. Journal of Computer and System Sciences, 1993, 46(1): 39-59.
- [12] 张文修,吴伟志,梁吉业,等. 粗糙集理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [13] ZHANG X Y, MO Z W, XIONG F, et al. Comparative study of variable precision rough set model and graded rough set model [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53(2012): 104-116.
- [14] 张贤勇,熊方,莫志文. 精度与程度的逻辑或粗糙集模型[J]. 模式识别与人工智能, 2009, 17(9): 151-155.
- [15] ZHANG X Y, MIAO D Q. Two basic double-quantitative rough set models of precision and grade and their investigation using granular computing [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54: 1130-1148.
- [16] 徐怡,杨宏健,纪霞,等. 基于邻域的可变粒度粗糙集模型[J]. 小型微型计算机系统, 2016, 37(7): 1513-1517.
- [17] TARSKI A. Lattice-theoretic fixpoint theorem and its application [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1955(5): 285-309.
- [18] BÄDTER F. Terminological cycles in a description logic with existential restrictions [C] // Proc. of IJCAI-03. Morgan Kaufmann Publishers, 2003: 325-330.
- [19] KURTONINA N, DE RIJKE M. Expressive of concept expression in first-order description logics [J]. Artificial Intelligence, 1999, 107(2): 303-333.
- [20] BRNADT S, MODEL J. Subsumption in w. r. t. hybrid TBoxes [M] // Ulrich Furbach. KI, Volume 3698 of Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2005: 34-48.
- [9] KONTCHAKOV R, WOLTER F, ZAKHARASHEV M. Logic-based ontology comparison and module extraction with an application to DL-Lite [J]. Artificial Intelligence, 2010, 174(15): 1093-1141.
- [10] 聂登国,康旺强,曹发生,等. 描述逻辑的包含推理及其保守扩充 [J]. 计算机研究与发展, 2015, 52(1): 221-228.
- [11] 聂登国,余泉,张维,等. 描述逻辑的保守扩充 [J]. 计算机科学, 2016, 43(6A): 83-86.
- [12] 王驹,陈光喜,余泉. 描述逻辑的二阶线性推理机制 [J]. 软件学报, 2017, 28(2): 216-233.

(上接第 140 页)