一种模糊 Hopfield 网络的学习算法及性质

曾水玲[1,2] 杨静宇[1] 徐蔚鸿[1,2,3]

(吉首大学数学与计算机科学学院 吉首 416000)[1] (南京理工大学计算机科学与技术学院 南京 210094)[2]

(长沙理工大学计算机和通信工程学院 长沙 410077)[3]

摘 要 现基于 T_L-模 Max-T_L 模糊 Hopfield 网络(Max-T_L FHNN)提出了一种有效的学习算法。对任意给定的模式集合,该学习算法总能找到使该模式集合成为 Max-T_L FHNN 的平衡点集合的所有连接权矩阵中的最大者。任意给定的模式集合都能作为 Max-T FHNN 网络的平衡点集合且能使 Max-T_L FHNN 对任意输入在一步内就进入稳定状态,同时该网络对训练模式的摄动具有好的鲁棒性。

关键词 模糊 Hopfield 网络,平衡点,学习算法,稳定性,鲁棒性

中图法分类号 TP183 **文献标识码** A

Learning Algorithm and Properties on a Class of Fuzzy Hopfield Networks

ZENG Shui-ling[1,2] YANG Jing-yu[1] XU Wei-hong[1,2,3]

(College of Mathematics and Computer Science, Jishou University, Jishou 416000, China)[1]

(College of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)[2]

(College of Computer and Communications Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410077, China)[3]

Abstract In this paper, an efficient learning algorithm was proposed for a class of fuzzy Hopfield networks (Max-T FHNNs) based on T-norms. For any given set of patterns, the learning algorithm can find the maximum of all connection weight matrices that can make the set become a set of the equilibrium points of the Max-T FHNN when T is a left-continuous T-norm. This maximal matrix is idempotent matrix in sense of Max-T composition, with which the Max-T FHNN can be convergent to a stable state in one iterative process for any input vector. It is proved theoretically that arbitrary set of patterns can become a set of the equilibrium points of every Max-T FHNN if only the T is left-continuous T-norm. Max-T_L FHNN has universally good robustness to perturbation of training pattern.

Keywords Hopfield network, Equilibrium point, Learning algorithm, Stability, Robustness

1 引言

美国加州工学院物理学家 J. J. Hopfield 提出了离散型的单层回归自联想记忆网络——Hopfield 网络[1]。此后很多学者对该网络进行了广泛的研究[2,3],2000 年刘普寅提出了一个基于 max 运算(记为 $\vee$)和 min 运算(记为 $\wedge$)的模糊 Hopfield 网络[3]:

$$X(t)=X(t-1)\circ W \tag{1}$$

该系统的状态从初始条件出发在有限步内趋于其吸引子或形成一个极限环。2002 年张义荣等又把系统(1)推广成 max-T 型的模糊 Hopfield 网络(记为 Max-T FHNN)[4]:

$$X(t)=X(t-1)\circ^{T} W \tag{2}$$

其逐点表示形式为:

$$x_j(t)=\bigvee_{i=1}^{n}(x_i(t-1)Tw_{ij}),\ j=1,2,\cdots,n$$

式中,$t=1,2,\cdots$为迭代步,$X(t)$和 $X(t-1)$均为模糊向量 $X(0)=(x_1(0),x_2(0),\cdots,x_n(0))\in[0,1]^n$。

T 是映射 $T:[0,1]^2\to[0,1]$,T 称为 T-模,是指其满足以下 4 个条件:(1)边界性:$\forall a\in[0,1],aT1=a$;(2)交换律:$\forall a,b\in[0,1],aTb=bTa$;(3)结合律:$\forall a,b,c\in[0,1],aT(bTc)=(aTb)Tc$;(4)单调增:$\forall a,b,c,d\in[0,1]$,若 $a\leqslant c$,$b\leqslant d$,则 $aTb\leqslant cTd$。

"$\circ$"是常规模糊关系合成运算,"$\circ^T$"是 $\vee$-T 型模糊关系合成运算,$W=(w_{ij})_{n\times n}$是$[0,1]$上的 $n\times n$ 阶连接权矩阵,$w_{ij}\in[0,1]$为第 i 个和第 j 个神经元之间的连接权。

不同的 T-模算子对信息提取的粗细程度可能不同,根据不同实际要求可进行构造和演变,这有利于适应实际问题的复杂性和多样性。为了便于分析,在本文中选用 Lukasiewicz 算子 T_L-模:$aT_Lb=(a+b-1)\vee 0$。对于其它 T-模算子可以进行类似分析。

到稿日期:2010-01-20 返修日期:2010-04-07 本文受国家自然科学基金项目(No. 60632050),教育部重点科研项目(No. 208098),湖南省教育厅科研基金重点项目(No. 07A056)和湖南省教育厅科研基金优秀青年项目(No. 10B088)资助。

曾水玲(1975—),女,博士生,副教授,主要研究方向为神经网络、模式识别理论与应用,E-mail:zengflsl@163.com;杨静宇(1941—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为模式识别理论和应用、智能机器人与智能系统等;徐蔚鸿(1963—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为智能系统、模式识别和软件工程等。

2 Max-T_L FHNN 网络的学习算法

本文总假设 $I=\{1,2,\cdots,n\}$，$K=\{1,2,\cdots,p\}$ 为非空有限下标集，Φ 为空集。

对于模糊矩阵 $W1=(w1_{ij})_{n\times n}$，$W2=(w2_{ij})_{n\times n}$，令 $W1\leqslant W2$ 时，即 $w1_{ij}\leqslant w2_{ij}$，$\forall i,j\in I$。

设两个 $n\times n$ 的矩阵 $W1,W2$，$W1\circ^T W2$ 定义为 $(W1\circ^T W2)_{ij}=\bigvee_{s\in I}(w1_{is}T_L w2_{sj})$，$\forall i,j\in I$。

定义 1 设 T 为 T-模，T 的伴随蕴含算子为：$aR_Tb=\bigvee_{x\in[0,1]}\{x|aTx\leqslant b\}$，$\forall a,b\in[0,1]$。

对于 Lukasiewicz 算子 T_L-模，其伴随蕴涵算子依定义有：

$$aR_Lb=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ (1-a+b)\wedge 1, & a>b\end{cases}$$

定义 2 对任意非空指标集合 Q，若 $aT(\bigvee_{q\in Q}b_q)=\bigvee_{q\in Q}(aTb_q)$，则称 T-模是左连续的。

左连续性[4,5]是一个比连续性更弱的要求。对于 Lukasiewicz 算子 $aT_Lb=(a+b-1)\vee 0$，T_L-模满足左连续。对于 Lukasiewicz 算子和其伴随蕴涵算子，满足 $|aT_Lb-cT_Ld|<|a-c|\vee|b-d|$，$|aR_Lb-cR_Ld|<|a-c|\vee|b-d|$ 都成立，

定义 3 $B\in[0,1]^n$ 称为由式(2)确定的 Max-T_L FHNN 网络的平衡点(亦称为稳定态)，其中 T 是 T_L-模，若 $B=B\circ^T W$，即 $\forall j\in I$，有 $b_j=\bigvee_{j\in I}(b_iT_Lw_{ij})$。若 B 为稳定态，则 B 的吸引域 $F(B,W)\subseteq[0,1]^n$ 是指所有这样的 $X\in[0,1]$ 的集合：$\forall X\in F(B,W)$，以其为初始模式，Max-T_L FHNN 系统将收敛到 B。

定义 4 设 $set=\{B_k|k\in K,B_k\in[0,1]^n\}$ 是模式集，称其为 Max-T_L FHNN 网络的平衡点集合，是指 set 中的每一模式 B_k 是 Max-T FHNN 网络的平衡点，即 $\forall k\in K$，$B_k=B_k\circ^T W$ 成立，其中 W 为 Max-T_L FHNN 的权值矩阵。

引理 1 T_L-模为左连续，则 $\forall k\in K,i,j\in I$，$(b_{ki}R_Lb_{ks})T_L(b_{ks}R_Lb_{kj})\leqslant b_{ki}R_Tb_{kj}$。

证明：令 $x_{kis}^*=b_{ki}R_Lb_{ks}$，$x_{ksj}^*=b_{ks}R_Lb_{kj}$，故 $x_{kis}^*=\bigvee_{x'\in[0,1]}\{x'|b_{ki}T_Lx'\leqslant b_{ks}\}$，又因为 T_L-模的左连续性，有 $b_{ki}T_Lx_{kis}^*=\bigvee_{x'\in[0,1]}\{b_{ki}T_Lx'|b_{ki}T_Lx'\leqslant b_{ks}\}\leqslant b_{ks}$，同理有 $b_{ks}T_Lx_{ksj}^*\leqslant b_{kj}$，故 $b_{ki}T_L(x_{kis}^*T_Lx_{ksj}^*)=(b_{ki}T_Lx_{kis}^*)T_Lx_{ksj}^*\leqslant b_{ks}T_Lx_{ksj}^*\leqslant b_{kj}$。

故 $x_{kis}^*T_Lx_{ksj}^*\in\{x\in[0,1]|b_{ki}T_Lx\leqslant b_{kj}\}$，因此，$x_{kis}^*T_Lx_{ksj}^*\leqslant b_{ki}R_Lb_{kj}$。证毕。

引理 2 $\forall k\in K,i,j\in I$，令 $x_{kij}^*=b_{ki}R_Lb_{kj}$，则(1) $b_{ki}T_Lx_{kij}^*\leqslant b_{kj}$；(2) $x_{kjj}^*=1$。

证明：(1) 令 $U=\{x'\in[0,1]|b_{ki}T_Lx'\leqslant b_{kj}\}$，$\forall k\in K,i,j\in I$ 有 $b_{ki}T_Lx_{kij}^*=b_{ki}T_L(b_{ki}R_Lb_{kj})=b_{ki}T_L(\bigvee_{x'\in[0,1]}\{x'|b_{ki}T_Lx'\leqslant b_{kj}\})=\bigvee_{x'\in U}(b_{ki}T_Lx')$（$T_L$-模为左连续）$\leqslant\bigvee_{x'\in U}b_{kj}=b_{kj}$。

(2) $\forall k\in K,i,j\in I$，有 $x_{kjj}^*=b_{kj}R_Lb_{kj}=\bigvee_{x'\in[0,1]}\{x'|b_{kj}T_Lx'\leqslant b_{kj}\}$，因 $x'=1$ 时，$b_{kj}T_L1=b_{kj}\leqslant b_{kj}$，故 $1\in\{x'|b_{kj}T_Lx'\leqslant b_{kj}\}$，所以 $x_{kjj}^*=1$。证毕。

引理 3 $\forall a,b\in[0,1]$，则：(1) aR_Lb 关于 a 单调减，关于 b 单调增；(2) T_L-模为左连续，则有 $bR_L(bT_Lw)\geqslant w$。

证明：(1) 仅证 aR_Lb 关于 b 单调增。设 $\forall a,b_1,b_2\in[0,1]$ 和 $b_1\leqslant b_2$，当 $\forall x\in\{x|aT_Lx\leqslant b_1\}$，则，$aT_Lx\leqslant b_2$，故 $x\in\{x|aT_Lx\leqslant b_2\}$，所以 $\{x|aT_Lx\leqslant b\}\subseteq\{x|aT_Lx\leqslant b_2\}$，因此 $aR_Lb_1=\bigvee_{x\in[0,1]}\{x|aT_Lx\leqslant b_1\}\leqslant\bigvee_{x\in[0,1]}\{x|aT_Lx\leqslant b_2\}=aR_Lb_2$。

(2) 因 $bT_Lw\leqslant bT_Lw$，有 $w\in\{x|bT_Lx\leqslant bT_Lw\}$，故 $bR_L(bT_Lw)=\bigvee_{x\in[0,1]}\{x|bT_Lx\leqslant bT_Lw\}\geqslant w$。证毕。

Max-T_L FHNN 网络的学习算法的目标是，对于任意给定的 $set=\{B_k|k\in K,B_k\in[0,1]^n\}$，确定某个连接权矩阵 W，尽量使得此时的 set 为 Max-T_L FHNN 网络的平衡点集合。

设 $set=\{B_k|k\in K,B_k\in[0,1]^n\}$ 是模式集，我们为一类 Max-T_L FHNN 网络提供的学习算法如下：

第 1 步　对第 k 个模式 B_k，计算临时连接权矩阵 $W_k=(w_{ij}^{(k)})_{n\times n}=(b_{ki}R_Lb_{kj})_{n\times n}$，$\forall k\in K$。

第 2 步　用模糊交运算 $\cap$ 组合以上各临时矩阵 W_k，得到最终的权值矩阵 $W=\bigcap_{k\in K}W_k=(\bigwedge_{k\in K}(b_{ki}R_Lb_{kj}))_{n\times n}$。

我们称此学习算法为 Max-T_L FHNN 网络的最大权值学习算法。

定理 1 设 $set=\{B_k|k\in K,B_k\in[0,1]^n\}$ 是模式集，则根据以上学习算法所确定的连接权矩阵 $\overline{W}$ 满足：$\overline{W}\circ^T\overline{W}=\overline{W}$。

证明：对于集合 set，用以上学习算法所确定的权矩 $\overline{W}=(\bigwedge_{k\in K}(b_{ki}R_Lb_{kj}))_{n\times n}$，记 $M=\overline{W}^2=\overline{W}\circ^T\overline{W}$。

$\forall i,j\in I$，有 $m_{ij}=\bigvee_{s\in I}(\overline{w}_{is}T_L\overline{w}_{sj})=\bigvee_{s\in I}\{[\bigwedge_{k\in K}(b_{ki}R_Lb_{ks})]T_L[\bigwedge_{h\in K}(b_{hs}R_Lb_{hj})]\}\geqslant[\bigwedge_{k\in K}(b_{ki}R_Lb_{ki})]T_L[\bigwedge_{h\in K}(b_{hi}R_Lb_{hj})]$（取 $s=i$）$=(\bigwedge_{k\in K}1)T_L[\bigwedge_{h\in K}(b_{hi}R_Lb_{hj})]$（由引理 2）$=\bigwedge_{h\in K}(b_{hi}R_Lb_{hj})$（由 T-模的性质）$=\overline{w}_{ij}$。

即此时，

$$\overline{W}\circ^T\overline{W}\geqslant\overline{W}\tag{3}$$

因为 T_L-模为左连续，有：

$$\begin{aligned}m_{ij}&=\bigvee_{s\in I}(\overline{w}_{is}T_L\overline{w}_{sj})=\bigvee_{s\in I}\{[\bigwedge_{k\in K}(b_{ki}R_Lb_{ks})]T_L[\bigwedge_{h\in K}(b_{hs}R_Lb_{hj})]\}\\&\leqslant\bigvee_{s\in I}\{[(b_{k'i}R_Lb_{k's})]T_L[(b_{k's}R_Lb_{k'j})]\}\text{（由 }T\text{ 的单调增性质，且取 }k=k',h=k'\text{）}\\&\leqslant\bigvee_{s\in I}(b_{k'i}R_Lb_{k'j})\text{（由引理 1）}=b_{k'i}R_Lb_{k'j}\end{aligned}$$

对 $\forall k'\in K$，所以 $m_{ij}\leqslant\bigwedge_{k'\in K}(b_{k'i}R_Lb_{k'j})=\overline{w}_{ij}$

即此时，

$$\overline{W}\circ^T\overline{W}\leqslant\overline{W}\tag{4}$$

故由式(3)和式(4)有 $\overline{W}\circ^T\overline{W}=\overline{W}$，证毕。

推论 1 设 $set=\{B_k|k\in K,B_k\in[0,1]^n\}$，则使用本学习算法所得到的权值矩阵 $\overline{W}$ 使得对任意初始态，Max-T_L FHNN 系统迭代一步后就进入平衡态。

证明：对任意的 Max-T_L FHNN 系统的输入 $A\in[0,1]^n$，由定理 1 有 $\overline{W}^2=\overline{W}$，故以 A 为初始状态，系统在一步迭代后就进入状态 $D=A\circ^T\overline{W}$，且有：

$$D\circ^T\overline{W}=(A\circ^T\overline{W})\circ^T\overline{W}=A\circ^T(\overline{W}\circ^T\overline{W})=A\circ^T\overline{W}=D$$

故 D 是 Max-T_L FHNN 系统的平衡态。此时对 $\forall t\geqslant 1$，$A\circ^T\overline{W}^t=A\circ^T\overline{W}$ 总成立。

推论 1 表明该学习算法确定的权值矩阵对于任意输入，神经网络都具有全局收敛性和平衡态。

定理 2 任意模式态集 $set=\{B_k|k\in K,B_k\in[0,1]^n\}$ 都可以成为 Max-T_L FHNN 网络的平衡点集合。

证明：用所提出的学习算法直接找到一个连接权矩阵 $\overline{W}$，使得此时 set 成为 Max-T_L FHNN 网络的平衡点集合。用

本文提出的学习算法得到 $\overline{W}=(\bigwedge_{k\in K}(b_{ki}R_Lb_{kj}))_{n\times n}$，$\forall k\in K$，令$\overline{B}_k=B_k\circ^T\overline{W}$，只需证 $\overline{B}_k=B_k$ 成立。

对于$\forall k\in K,i,j\in I$,有：

$\overline{b}_{kj}=\bigvee_{i\in I}(b_{ki}T_L\overline{w}_{ij})=\bigvee_{i\in I}\{b_{ki}T_L[\bigwedge_{h\in K}(b_{hi}R_Lb_{hj})]\}\geqslant b_{kj}T_L[\bigwedge_{h\in K}(b_{hj}R_Lb_{hj})]$

(取 $i=j$)$=b_{kj}T_L[\bigwedge_{h\in K}1]$(由引理 2)$=b_{kj}T_L1=b_{kj}$

即此时，

$$\overline{b}_{kj}\geqslant b_{kj} \tag{5}$$

同时$\forall k\in K,j\in I$,有：

$\overline{b}_{kj}=\bigvee_{i\in I}(b_{ki}T_L\overline{w}_{ij})$(依 $\overline{w}_{ij}$ 的定义)$=\bigvee_{i\in I}\{b_{ki}T_L[\bigwedge_{h\in K}(b_{hi}R_Lb_{hj})]\}$

$\leqslant\bigvee_{i\in I}\{b_{ki}T_L(b_{ki}R_LB_{kj})\}=\bigvee_{i\in I}\{b_{ki}T_Lx^*_{kj}\}$

$\leqslant\bigvee_{i\in I}b_{kj}$(由引理 2)$=b_{kj}$

即此时，

$$\overline{b}_{kj}\leqslant b_{kj} \tag{6}$$

由式(5)和式(6)知，$\forall k\in K,j\in I$,有 $\overline{b}_{kj}=b_{kj}$。证毕。

定理 3 设 $set=\{B_k|k\in K,B_k\in[0,1]^n\}$是模式集，则利用本文学习算法能找到所有使 set 成为 Max-T_L FHNN 网络的平衡点集合的连接权矩阵的最大者。

证明：记 $W(p)$是所有使得 set 成为 Max-T_L FHNN 的平衡点集合的连接权矩阵的集合，即 $W(p)=\{W|B_k\circ^TW=B_k,k\in K\}$，由定理 2 得 $W(p)\neq\Phi$，又由定理 2 的证明过程知，由本文学习算法确定 $\overline{W}\in W(p)$，故只需证 $\overline{W}\geqslant W$，其中 $\overline{w}_{ij}=\bigwedge_{k\in K}(b_{ki}R_Lb_{kj})$，$\forall i,j\in I$。

设$\forall W\in W(p)$，则依定义，$\forall k\in K,B_k=B_k\circ^TW$，即有$\forall k\in K,\forall j\in I$,

$$b_{kj}=\bigvee_{i\in I}(b_{ki}T_Lw_{ij}) \tag{7}$$

$\overline{w}_{ij}=\bigwedge_{k\in K}(b_{ki}R_Lb_{kj})=\bigwedge_{k\in K}\{b_{ki}R_L[\bigvee_{s\in I}(b_{ks}T_Lw_{sj})]\}$(由式(7))$\geqslant\bigwedge_{k\in K}\{b_{ki}R_L(b_{ki}T_Lw_{ij})\}$(取 $s=i$ 及根据引理 3)$\geqslant\bigwedge_{k\in K}w_{ij}$(由引理 3)$=w_{ij}$。证毕。

以上的定理和推论都说明了该网络的学习算法是有效可行的。

3 Max-T_L FHNN 网络对训练模式摄动的鲁棒性

训练模式摄动是指训练模式具有不确定性、不精确性或存在小幅误差。在构建模糊神经网络系统时，系统的训练模式总存在摄动，这种摄动对该类神经网络的输出会产生怎样的影响？

定理 4 根据文献[6,7]提出的模糊神经网络对训练模式摄动全局拥有好的鲁棒性和最大摄动误差的定义，采用上述学习算法时的自联想 Max-T_L FHNN 对训练模式集的摄动全局拥有好的鲁棒性。

证明：记 $\gamma=\bigvee_{k=1}^{p}\gamma_k$，任给训练模式对集 $set=\{A_k|k=1,2,\cdots,p\}$，采用上述学习算法对 Max-$T_L$ FHNN 训练完成，让网络开始工作。任意输入 $X\in[0,1]^n$，由网络得到状态序列$\{Y_t=Y\circ(W^T\circ W)^t\}$。假定 set 摄动后的训练模式对集变为 $new\_set=\{B_k|k=1,2,\cdots,p\}$，其中 A_k 发生了最大 γ_k 摄动，即 $H(A_k,B_k)\leqslant\gamma_k,k=1,2,\cdots,p$。依然采用该学习算法，由于模式对集合的变化，此时 Max-T_L FHNN 网络的权值会有某些变化，现让网络开始工作，对同一输入 X，由网络得到新的状态序列：

$\{Y1_t=Y\circ(W1^T\circ W1)^t\}H(W,W1)=\bigvee_{i\in I,j\in J}|w_{ij}-w1_{ij}|=$

$\bigvee_{i\in I,j\in J}|[\bigwedge_{k=1}^{p}(a_{ki}R_Ta_{kj})]-[\bigwedge_{k=1}^{p}(b_{ki}R_Tb_{kj})]|$

$\leqslant\bigvee_{i\in I,j\in J}\bigvee_{k=1}^{p}|(a_{ki}R_Ta_{kj})-(b_{ki}R_Tb_{kj})|(|\bigwedge_{i\in I}a_i'-\bigwedge_{i\in I}a_i|\leqslant\bigvee_{i\in I}|a_i'-a_i|)$

$\leqslant\bigvee_{i\in I,j\in J}\bigvee_{k=1}^{p}(|a_{ki}-b_{ki}|\vee|a_{kj}-b_{kj}|)$

$\leqslant\bigvee_{i\in I,j\in J}\bigvee_{k=1}^{p}\gamma_k=\gamma$

有 $H(W\circ^TW,W1\circ^TW1)=H(W,W1)\leqslant\gamma$，又有 $H((W\circ^TW)^t,(W1\circ^TW1)^t)=H(W,W1)\leqslant\gamma$。

又 $H(X,X)=0\leqslant\gamma$，则 $H[X\circ^T(W\circ^TW)^t,X\circ^T(W1\circ^TW1)^t]=H(X\circ^TW,X\circ^TW1)\leqslant\gamma$，即此时输出序列$\{Y_t\}$和$\{Y1_t\}$总使得 $H(Y_t,Y1_t)\leqslant\gamma,\forall t\geqslant1$ 成立。证毕。

该类神经网络能完整可靠地回想出所存储的模式集。当采用相同的网络模型、相同的学习算法、相同的输入，仅仅是神经网络训练时的训练模式存在摄动，两神经网络输出差异的最大值总是小于训练模式摄动的最大值。这种差异是由训练模式的摄动引起的，但是神经网络对这种摄动没有放大作用，输出的差异总小于训练模式的摄动，这说明该网络对训练模式的摄动具有好的鲁棒性。

结束语 T_L 为左连续时，对于任意给定的模式集合，该学习算法总能找到使该模式集合成为 Max-T_L FHNN 的平衡点集合的所有连接权矩阵中的最大者。文中的定理和推论表明，任意给定的模式集(模式的内容和个数都是任意的)能成为 Max-T_L FHNN 网络的平衡点集合，说明了这种模型具有很大的应用潜力。同时该网络对训练模式的摄动具有好的鲁棒性，说明训练模式的适度“粗糙”对后续处理副作用不大，就无须费时费力地去寻找一个有精确隶属度的训练模式，对训练数据的采集设备精度要求可以适当降低，进而可以降低预处理数据的硬件成本。

参考文献

[1] Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities[C]// Proc. National Academy Science. USA, 1982, 79: 2554-2556

[2] Liu Puyin. Max-min fuzzy Hopfield neural networks and an efficient learning algorithm[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 112: 41-49

[3] 张义荣，刘普寅，等. 基于一类 T-模的模糊 Hopfield 网络的稳定性分析[J]. 电子学报, 2002, 30(1): 30-33

[4] Esteva F, Godo L. Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124: 271-288

[5] Jenei S. Structure of left-continuous t-norms with strong induced negations, construction and decomposition [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 128: 197-208

[6] 徐蔚鸿，宋鸾姣，李爱华，等. 训练模式对的摄动对模糊双向联想记忆网络的影响及其控制[J]. 计算机学报, 2006, 25(2): 153-157

[7] 曾水玲，徐蔚鸿，杨静宇. 训练模式对的摄动对最大-乘积型模糊联想记忆网络的影响[J]. 计算机应用, 2007, 27(2): 346-348