部分四值逻辑中完满对称函数集的分类及最小覆盖成员的判定

刘任任[1] 王 婷[1] 谭昊勋[2]
(湘潭大学信息工程学院 湘潭 411105)[1] (湘潭大学能源工程学院 湘潭 411105)[2]

摘 要 根据部分K值逻辑的完备性理论和相似关系概念,对完满对称函数集进行了相似关系分类,并确定了其中的准完备集之最小覆盖成员。

关键词 多值逻辑,Sheffer 函数,最小覆盖
中图法分类号 TP301.1 **文献标识码** A

Classification on Full Symmetric Function Sets and Decision on the Minimal Covering Members in Partial Four-valued Logic

LIU Ren-ren[1] WANG Ting[1] TAN Hao-xun[2]
(School of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)[1]
(School of Energy Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)[2]

Abstract According to the completeness theory and concept of similar relationship in partial k-valued logic, the full symmetric function sets were classified by means of similarity relationship and some sets were proved minimal covering component of precomplete classes.

Keywords Multiple-valued logic, Sheffer function, Minimal covering

1 引言

多值逻辑是计算机科学与技术的一个重要分支。多值逻辑函数结构理论是多值逻辑理论中一个重要的研究方向,主要包括完备性理论、函数表示理论以及单向陷门函数。其中函数系完备性之判定问题是一个基本且重要的问题,同时是自动机理论、多值逻辑网络中必须解决的问题,此问题的解决依赖于定出多值逻辑函数集中的所有准完备集。多值逻辑完备性理论中的另一重要问题是 Sheffer 函数的判定和构造,此问题可归结为定出所有准完备集的最小覆盖。完全多值逻辑函数已由 Schofield 和 Kudrjavcev 等完全解决。但部分多值逻辑函数中 Sheffer 函数的判定问题还未彻底解决。

根据部分多值逻辑的完备性理论[1,2],$f(x_1,\cdots,x_n)$是 Sheffer 函数之必要而且只要对 P_k^* 中的任何准完备集 A 都有 $f\notin A$。因此,可用此充要条件来判定一个函数是否是 Sheffer 函数。但是,P_k^* 中的准完备集的个数是随 K 的增大而迅速增长的,因此判定 Sheffer 函数的最简单的方法就是定出 P_k^* 中的所有准完备集的最小覆盖。这样,在判定 Sheffer 函数时,有大量的准完备集就不需要进行考虑了。

在部分多值逻辑 Sheffer 函数判定与构造的研究中,作者利用准完备集的相似关系,简洁地定出了部分三值逻辑中准完备集之最小覆盖[3];并对于一般的 K,定出了 T_E,$P_K\cup\{*\}$,L_P,$L_{G_{4,2}}$ 4类函数集必须在最小覆盖中出现[4-7]。而其它3类函数集,即完满对称函数集 $F_{S,m}$、单纯可离函数集 $S_{I,m}$、正则可离函数集 $S_{R,m}$,由于结构复杂,其是否在最小覆盖中出现的问题只取得了部分结果[8-11],还未得到彻底解决。

本文根据部分 K 值逻辑的完备性理论和相似关系概念,对78个完满对称函数集进行相似关系分类,并确定其中的32个不属于准完备集之最小覆盖成员。

2 主要结果

部分四值逻辑中共有78个完满对称函数集,$F_{s,m}=T(G_m)$,$2\leqslant m\leqslant 4$。

(1)$m=2$ 时,有62个 $F_{s,2}$。

$F_{s,2}=T(G_2)$,其中 $G_2=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}\cup G_2^*$,$G_2^*$ 按相似关系分类列出如下:

①含2个序列的共6个:

$\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle\}\overset{(12)}{\sim}\{\langle 0,2\rangle,\langle 2,0\rangle\}\overset{(23)}{\sim}\{\langle 0,3\rangle,\langle 3,0\rangle\}\overset{(01)}{\sim}\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\overset{(12)}{\sim}\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}\overset{(13)}{\sim}\{\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$

②含4个序列的共15个,分2类:

(a) $\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}\overset{(12)}{\sim}\{\langle 0,2\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\overset{(23)}{\sim}\{\langle 0,3\rangle,\langle 3,0\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$;

(b) $\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 2,0\rangle\}\overset{(23)}{\sim}\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 0,$

到稿日期:2009-12-10 返修日期:2010-03-17 本文受国家基金项目"部分多值逻辑函数结构理论研究"(60673193),湖南省教育厅基金项目"部分多值逻辑中准完备集的分类研究"(10C768)资助。

刘任任(1959—),男,教授,主要研究方向为多值逻辑,E-mail:lrr863@163.com;王 婷(1980—),女,讲师;谭昊勋(1978—),女,研究生,主要研究方向为多值逻辑。

3⟩,⟨3,0⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}$\stackrel{(13)}{\sim}${⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}$\stackrel{(123)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩}$\stackrel{(02)(13)}{\sim}${⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩}$\stackrel{(02)}{\sim}${⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}。

③含 6 个序列的有 20 个，分 3 类：

(a){⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}；

(b){⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}；

(c) {⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}$\stackrel{(13)}{\sim}${⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}。

④含 8 个序列的有 15 个，分 2 类：

(a) {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(013)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}$\stackrel{(02)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(1203)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(13)}{\sim}${⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}；

(b){⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}。

⑤含 10 个序列的有 6 个，为 1 类：

{⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩}$\stackrel{(13)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(23)}{\sim}${⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}。

(2) $m=3$ 时，有 15 个 $F_{S,3}=T(G_3)$，其中 $G_3=G_3(\{1,2\})\cup G_3(\{1,3\})\cup G_3(\{2,3\})\cup G_3^*$。

$G_3(\{i,j\})=\{\langle a_1,a_2,a_3\rangle \mid a_i=a_j, a_k\in\{0,1,2,3\}, 1\leqslant i,j,k\leqslant 3\}$，$G_3^*$ 按相似关系分类列出如下：

①含 6 个序列的有 4 个，为 1 类：

{⟨0,1,2⟩,⟨1,0,2⟩,⟨0,2,1⟩,⟨2,1,0⟩,⟨1,2,0⟩,⟨2,0,1⟩}$\stackrel{(03)}{\sim}${⟨1,2,3⟩,⟨2,1,3⟩,⟨1,3,2⟩,⟨3,2,1⟩,⟨2,3,1⟩,⟨3,1,2⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨0,2,3⟩,⟨2,0,3⟩,⟨0,3,2⟩,⟨3,2,0⟩,⟨2,3,0⟩,⟨3,0,2⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨0,1,3⟩,⟨1,0,3⟩,⟨0,3,1⟩,⟨3,1,0⟩,⟨1,3,0⟩,⟨3,0,1⟩}。

②含 12 个序列的有 6 个，为 1 类：

{⟨0,1,2⟩,⟨1,0,2⟩,⟨0,2,1⟩,⟨2,1,0⟩,⟨1,2,0⟩,⟨2,0,1⟩,⟨0,1,3⟩,⟨1,0,3⟩,⟨0,3,1⟩,⟨3,1,0⟩,⟨1,3,0⟩,⟨3,0,1⟩}$\stackrel{(02)}{\sim}${⟨0,1,2⟩,⟨1,0,2⟩,⟨0,2,1⟩,⟨2,1,0⟩,⟨1,2,0⟩,⟨2,0,1⟩,⟨1,2,3⟩,⟨2,1,3⟩,⟨1,3,2⟩,⟨3,2,1⟩,⟨2,3,1⟩,⟨3,1,2⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨0,1,2⟩,⟨1,0,2⟩,⟨0,2,1⟩,⟨2,1,0⟩,⟨1,2,0⟩,⟨2,0,1⟩,⟨0,2,3⟩,⟨2,0,3⟩,⟨0,3,2⟩,⟨3,2,0⟩,⟨2,3,0⟩,⟨3,0,2⟩}$\stackrel{(03)}{\sim}${⟨1,2,3⟩,⟨2,1,3⟩,⟨1,3,2⟩,⟨3,2,1⟩,⟨2,3,1⟩,⟨3,1,2⟩,⟨0,2,3⟩,⟨2,0,3⟩,⟨0,3,2⟩,⟨3,2,0⟩,⟨2,3,0⟩,⟨3,0,2⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨1,2,3⟩,⟨2,1,3⟩,⟨1,3,2⟩,⟨3,2,1⟩,⟨2,3,1⟩,⟨3,1,2⟩,⟨0,1,3⟩,⟨1,0,3⟩,⟨0,3,1⟩,⟨3,1,0⟩,⟨1,3,0⟩,⟨3,0,1⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨0,2,3⟩,⟨2,0,3⟩,⟨0,3,2⟩,⟨3,2,0⟩,⟨2,3,0⟩,⟨3,0,2⟩,⟨0,1,3⟩,⟨1,0,3⟩,⟨0,3,1⟩,⟨3,1,0⟩,⟨1,3,0⟩,⟨3,0,1⟩}。

③含 18 个序列的有 4 个，为 1 类：

{⟨0,1,2⟩,⟨1,0,2⟩,⟨0,2,1⟩,⟨2,1,0⟩,⟨1,2,0⟩,⟨2,0,1⟩,⟨1,2,3⟩,⟨2,1,3⟩,⟨1,3,2⟩,⟨3,2,1⟩,⟨2,3,1⟩,⟨3,1,2⟩,⟨0,2,3⟩,⟨2,0,3⟩,⟨0,3,2⟩,⟨3,2,0⟩,⟨2,3,0⟩,⟨3,0,2⟩}$\stackrel{(12)}{\sim}${⟨0,1,2⟩,⟨1,0,2⟩,⟨0,2,1⟩,⟨2,1,0⟩,⟨1,2,0⟩,⟨2,0,1⟩,⟨1,2,3⟩,⟨2,1,3⟩,⟨1,3,2⟩,⟨3,2,1⟩,⟨2,3,1⟩,⟨3,1,2⟩,⟨0,1,3⟩,⟨1,0,3⟩,⟨0,3,1⟩,⟨3,1,0⟩,⟨1,3,0⟩,⟨3,0,1⟩}$\stackrel{(01)}{\sim}${⟨0,1,2⟩,⟨1,0,2⟩,⟨0,2,1⟩,⟨2,1,0⟩,⟨1,2,0⟩,⟨2,0,1⟩,⟨0,2,3⟩,⟨2,0,3⟩,⟨0,3,2⟩,⟨3,2,0⟩,⟨2,3,0⟩,⟨3,0,2⟩,⟨0,1,3⟩,⟨1,0,3⟩,⟨0,3,1⟩,⟨3,1,0⟩,⟨1,3,0⟩,⟨3,0,1⟩}$\stackrel{(03)}{\sim}${⟨1,2,3⟩,⟨2,1,3⟩,⟨1,3,2⟩,⟨3,2,1⟩,⟨2,3,1⟩,⟨3,1,2⟩,⟨0,2,3⟩,⟨2,0,3⟩,⟨0,3,2⟩,⟨3,2,0⟩,⟨2,3,0⟩,⟨3,0,2⟩,⟨0,1,3⟩,⟨1,0,3⟩,

⟨0,3,1⟩,⟨3,1,0⟩,⟨1,3,0⟩,⟨3,0,1⟩}。

④$G_3=G_3(\{1,2\})\cup G_3(\{1,3\})\cup G_3(\{2,3\})$。

(3) $m=4$ 时,只有 1 个,即 $F_{S,4}=T(G_4)$。其中,

$G_4=G_4(\{1,2\})\cup G_4(\{1,3\})\cup G_4(\{1,4\})\cup G_4(\{2,3\})\cup G_4(\{2,4\})\cup G_4(\{3,4\})$={⟨0,0,0,0⟩,⟨0,0,0,1⟩,⟨0,0,0,2⟩,⟨0,0,0,3⟩,⟨0,0,1,0⟩,⟨0,0,1,1⟩,⟨0,0,1,2⟩,⟨0,0,1,3⟩,⟨0,0,2,0⟩,⟨0,0,2,1⟩,⟨0,0,2,2⟩,⟨0,0,2,3⟩,⟨0,0,3,0⟩,⟨0,0,3,1⟩,⟨0,0,3,2⟩,⟨0,0,3,3⟩,⟨0,1,0,0⟩,⟨0,1,0,1⟩,⟨0,1,0,2⟩,⟨0,1,0,3⟩,⟨0,1,1,0⟩,⟨0,1,1,1⟩,⟨0,1,1,2⟩,⟨0,1,1,3⟩,⟨0,1,2,0⟩,⟨0,1,2,1⟩,⟨0,1,2,2⟩,⟨0,1,3,0⟩,⟨0,1,3,1⟩,⟨0,1,3,3⟩,⟨0,2,0,0⟩,⟨0,2,0,1⟩,⟨0,2,0,2⟩,⟨0,2,0,3⟩,⟨0,2,1,0⟩,⟨0,2,1,1⟩,⟨0,2,1,2⟩,⟨0,2,2,0⟩,⟨0,2,2,1⟩,⟨0,2,2,2⟩,⟨0,2,2,3⟩,⟨0,2,3,0⟩,⟨0,2,3,2⟩,⟨0,2,3,3⟩,⟨0,3,0,0⟩,⟨0,3,0,1⟩,⟨0,3,0,2⟩,⟨0,3,0,3⟩,⟨0,3,1,0⟩,⟨0,3,1,1⟩,⟨0,3,1,3⟩,⟨0,3,2,0⟩,⟨0,3,2,2⟩,⟨0,3,2,3⟩,⟨0,3,3,0⟩,⟨0,3,3,1⟩,⟨0,3,3,2⟩,⟨0,3,3,3⟩,⟨1,0,0,0⟩,⟨1,0,0,1⟩,⟨1,0,0,2⟩,⟨1,0,0,3⟩,⟨1,0,1,0⟩,⟨1,0,1,1⟩,⟨1,0,1,2⟩,⟨1,0,1,3⟩,⟨1,0,2,0⟩,⟨1,0,2,1⟩,⟨1,0,2,2⟩,⟨1,0,3,0⟩,⟨1,0,3,1⟩,⟨1,0,3,3⟩,⟨1,1,0,0⟩,⟨1,1,0,1⟩,⟨1,1,0,2⟩,⟨1,1,0,3⟩,⟨1,1,1,0⟩,⟨1,1,1,1⟩,⟨1,1,1,2⟩,⟨1,1,1,3⟩,⟨1,1,2,0⟩,⟨1,1,2,1⟩,⟨1,1,2,2⟩,⟨1,1,2,3⟩,⟨1,1,3,0⟩,⟨1,1,3,1⟩,⟨1,1,3,2⟩,⟨1,1,3,3⟩,⟨1,2,0,0⟩,⟨1,2,0,1⟩,⟨1,2,0,2⟩,⟨1,2,1,0⟩,⟨1,2,1,1⟩,⟨1,2,1,2⟩,⟨1,2,1,3⟩,⟨1,2,2,0⟩,⟨1,2,2,1⟩,⟨1,2,2,2⟩,⟨1,2,2,3⟩,⟨1,2,3,1⟩,⟨1,2,3,2⟩,⟨1,2,3,3⟩,⟨1,3,0,0⟩,⟨1,3,0,1⟩,⟨1,3,0,3⟩,⟨1,3,1,0⟩,⟨1,3,1,1⟩,⟨1,3,1,2⟩,⟨1,3,1,3⟩,⟨1,3,2,1⟩,⟨1,3,2,2⟩,⟨1,3,2,3⟩,⟨1,3,3,0⟩,⟨1,3,3,1⟩,⟨1,3,3,2⟩,⟨1,3,3,3⟩,⟨2,0,0,0⟩,⟨2,0,0,1⟩,⟨2,0,0,2⟩,⟨2,0,0,3⟩,⟨2,0,1,0⟩,⟨2,0,1,1⟩,⟨2,0,1,2⟩,⟨2,0,2,0⟩,⟨2,0,2,1⟩,⟨2,0,2,2⟩,⟨2,0,2,3⟩,⟨2,0,3,0⟩,⟨2,0,3,2⟩,⟨2,0,3,3⟩,⟨2,1,0,0⟩,⟨2,1,0,1⟩,⟨2,1,0,2⟩,⟨2,1,1,0⟩,⟨2,1,1,1⟩,⟨2,1,1,2⟩,⟨2,1,1,3⟩,⟨2,1,2,0⟩,⟨2,1,2,1⟩,⟨2,1,2,2⟩,⟨2,1,2,3⟩,⟨2,1,3,1⟩,⟨2,1,3,2⟩,⟨2,1,3,3⟩,⟨2,2,0,0⟩,⟨2,2,0,1⟩,⟨2,2,0,2⟩,⟨2,2,0,3⟩,⟨2,2,1,0⟩,⟨2,2,1,1⟩,⟨2,2,1,2⟩,⟨2,2,1,3⟩,⟨2,2,2,0⟩,⟨2,2,2,1⟩,⟨2,2,2,2⟩,⟨2,2,2,3⟩,⟨2,2,3,0⟩,⟨2,2,3,1⟩,⟨2,2,3,2⟩,⟨2,2,3,3⟩,⟨2,3,0,0⟩,⟨2,3,0,2⟩,⟨2,3,0,3⟩,⟨2,3,1,1⟩,⟨2,3,1,2⟩,⟨2,3,1,3⟩,⟨2,3,2,0⟩,⟨2,3,2,1⟩,⟨2,3,2,2⟩,⟨2,3,2,3⟩,⟨2,3,3,0⟩,⟨2,3,3,1⟩,⟨2,3,3,2⟩,⟨2,3,3,3⟩,⟨3,0,0,0⟩,⟨3,0,0,1⟩,⟨3,0,0,2⟩,⟨3,0,0,3⟩,⟨3,0,1,0⟩,⟨3,0,1,1⟩,⟨3,0,1,3⟩,⟨3,0,2,0⟩,⟨3,0,2,2⟩,⟨3,0,2,3⟩,⟨3,0,3,0⟩,⟨3,0,3,1⟩,⟨3,0,3,2⟩,⟨3,0,3,3⟩,⟨3,1,0,0⟩,⟨3,1,0,1⟩,⟨3,1,0,3⟩,⟨3,1,1,0⟩,⟨3,1,1,1⟩,⟨3,1,1,2⟩,⟨3,1,1,3⟩,⟨3,1,2,1⟩,⟨3,1,2,2⟩,⟨3,1,2,3⟩,⟨3,1,3,0⟩,⟨3,1,3,1⟩,⟨3,1,3,2⟩,⟨3,1,3,3⟩,⟨3,2,0,0⟩,⟨3,2,0,2⟩,⟨3,2,0,3⟩,⟨3,2,1,1⟩,⟨3,2,1,2⟩,⟨3,2,1,3⟩,⟨3,2,2,0⟩,⟨3,2,2,1⟩,⟨3,2,2,2⟩,⟨3,2,2,3⟩,⟨3,2,3,0⟩,⟨3,2,3,1⟩,⟨3,2,3,2⟩,⟨3,2,3,3⟩,⟨3,3,0,0⟩,⟨3,3,0,1⟩,⟨3,3,0,2⟩,⟨3,3,0,3⟩,⟨3,3,1,0⟩,⟨3,3,1,1⟩,⟨3,3,1,2⟩,⟨3,3,1,3⟩,⟨3,3,2,0⟩,⟨3,3,2,1⟩,⟨3,3,2,2⟩,⟨3,3,2,3⟩,⟨3,3,3,0⟩,⟨3,3,3,1⟩,⟨3,3,3,2⟩,⟨3,3,3,3⟩}。

定理 1 P_4^* 的 78 个完满对称函数集 $F_{S,m}$ 中,有 32 个不属于准完备集之最小覆盖成员,它们是:

(1)两类含 6 个序列的,共 16 个:

(1.1) {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩} $\overset{(01)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩} $\overset{(12)}{\sim}$ {⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩} $\overset{(23)}{\sim}$ {⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩};

(1.2) {⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩} $\overset{(13)}{\sim}$ {⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩} $\overset{(23)}{\sim}$ {⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩} $\overset{(12)}{\sim}$ {⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩} $\overset{(01)}{\sim}$ {⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩} $\overset{(23)}{\sim}$ {⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩} $\overset{(12)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩} $\overset{(23)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩} $\overset{(12)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩} $\overset{(01)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩} $\overset{(23)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩} $\overset{(01)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}。

(2) 一类含 8 个序列的,共 12 个:

{⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩} $\overset{(23)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩} $\overset{(12)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩} $\overset{(013)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩} $\overset{(23)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩} $\overset{(02)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩} $\overset{(1203)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩} $\overset{(13)}{\sim}$ {⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩} $\overset{(01)}{\sim}$ {⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩} $\overset{(23)}{\sim}$ {⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,2⟩,⟨2,1⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩} $\overset{(01)}{\sim}$ {⟨0,2⟩,⟨2,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩} $\overset{(12)}{\sim}$ {⟨0,1⟩,⟨1,0⟩,⟨0,3⟩,⟨3,0⟩,⟨1,3⟩,⟨3,1⟩,⟨2,3⟩,⟨3,2⟩}。

(3)一类含 18 个序列的,共 4 个:

{⟨0,1,2⟩,⟨1,0,2⟩,⟨0,2,1⟩,⟨2,1,0⟩,⟨1,2,0⟩,⟨2,0,1⟩,⟨1,2,3⟩,⟨2,1,3⟩,⟨1,3,2⟩,⟨3,2,1⟩,⟨2,3,1⟩,⟨3,1,2⟩,⟨0,2,3⟩,⟨2,0,3⟩,⟨0,3,2⟩,⟨3,2,0⟩,⟨2,3,0⟩,⟨3,0,2⟩} $\overset{(12)}{\sim}$ {⟨0,1,2⟩,⟨1,0,2⟩,⟨0,2,1⟩,⟨2,1,0⟩,⟨1,2,0⟩,⟨2,0,1⟩,⟨1,2,3⟩,⟨2,1,3⟩,⟨1,3,2⟩,⟨3,2,1⟩,⟨2,3,1⟩,⟨3,1,2⟩,⟨0,1,3⟩,⟨1,0,3⟩,⟨0,3,1⟩,⟨3,1,0⟩,⟨1,3,0⟩,⟨3,0,1⟩} $\overset{(01)}{\sim}$ {⟨0,1,2⟩,⟨1,0,2⟩,⟨0,2,1⟩,⟨2,1,0⟩,⟨1,2,0⟩,⟨2,0,1⟩,⟨0,2,3⟩,⟨2,0,3⟩,⟨0,3,2⟩,⟨3,2,0⟩,⟨2,3,0⟩,⟨3,0,2⟩,⟨0,1,3⟩,⟨1,0,3⟩,⟨0,3,1⟩,⟨3,1,0⟩,⟨1,3,0⟩,⟨3,0,1⟩} $\overset{(03)}{\sim}$ {⟨1,2,3⟩,⟨2,1,3⟩,⟨1,3,2⟩,⟨3,2,1⟩,⟨2,3,1⟩,⟨3,1,2⟩,⟨0,2,3⟩,⟨2,0, 3⟩,⟨0,3,2⟩,⟨3,2,0⟩,⟨2,3,0⟩,⟨3,0,2⟩,⟨0,1,3⟩,⟨1,0,3⟩,⟨0,3,1⟩,⟨3,1,0⟩,⟨1,3,0⟩,⟨3,0,1⟩}。

证明：已经证明 $T_E,\emptyset\subset E\subset E_4$ 是最小覆盖的成员[4]。下面从(3)中选第1个准完备集，(1)和(2)列出的证明类似。我们将证明它含于若干 $T_E,\emptyset\subset E\subset E_4$ 的并，根据文献[10]，与之有相似关系的准完备集也有相同的含于关系。

设 $f\in F_{S,3}=T(G_3)$，$G_3=G_3(\{1,2\})\cup G_3(\{1,3\})\cup G_3(\{2,3\})\cup G_3^*$，$G_3^*=\{\langle 0,1,2\rangle,\langle 1,0,2\rangle,\langle 0,2,1\rangle,\langle 2,1,0\rangle,\langle 1,2,0\rangle,\langle 2,0,1\rangle,\langle 0,2,3\rangle,\langle 2,0,3\rangle,\langle 0,3,2\rangle,\langle 3,2,0\rangle,\langle 2,3,0\rangle,\langle 3,0,2\rangle,\langle 0,1,3\rangle,\langle 1,0,3\rangle,\langle 0,3,1\rangle,\langle 3,1,0\rangle,\langle 1,3,0\rangle,\langle 3,0,1\rangle\}$。

1)若 $f(0,\cdots,0)=0$ 或 $*$，则 $f\in T_{\{0\}}$。

2)若 $f(0,\cdots,0)=1$，分情况讨论：

i)若 $f(1,\cdots,1)=1$ 或 $*$，则 $f\in T_{\{1\}}$。

ii)若 $f(1,\cdots,1)=0$，则看 $f(\tilde{\alpha})=f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_i\in\{0,1\}$，$i=1,\cdots,n$。

a)若 $f(\tilde{\alpha})\in\{0,1,*\}$，则 $f\in T_{\{0,1\}}$。

b)若 $f(\tilde{\alpha})=2$，则 $f\in T_{\{0,1,2\}}$。不然，则有 $\beta_i\in\{0,1,2\}$，$i=1,\cdots,n$，使得

$$f\begin{pmatrix}0, & \cdots, & 0\\ \alpha_1, & \cdots, & \alpha_n\\ \beta_1, & \cdots, & \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

由于 $\langle 0,\alpha_i,\beta_i\rangle\in G_3$，$i=1,\cdots,n$。但 $\langle 1,2,3\rangle\notin G_3$，此与 $f\in T(G_3)$ 矛盾，故 $f\in T_{\{0,1,2\}}$。

c)若 $f(\tilde{\alpha})\neq 2$，则 $f\in T_{\{0,1,3\}}$。不然，则有 $\beta_i\in\{0,1,3\}$，$i=1,\cdots,n$，使得

$$f\begin{pmatrix}0, & \cdots, & 0\\ \alpha_1, & \cdots, & \alpha_n\\ \beta_1, & \cdots, & \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

由于 $\langle 0,\alpha_i,\beta_i\rangle\in G_3$，$i=1,\cdots,n$。但 $\langle 1,3,2\rangle\notin G_3$，此与 $f\in T(G_3)$ 矛盾，故 $f\in T_{\{0,1,3\}}$。

iii)若 $f(1,\cdots,1)=2$，则可得 $f\in T_{\{0,1,2\}}$。若不然，则有 $\alpha_i\in\{0,1,2\}$，$i=1,\cdots,n$，使得

$$f\begin{pmatrix}0, & \cdots, & 0\\ 1, & \cdots, & 1\\ \alpha_1, & \cdots, & \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

由于 $\langle 0,1,\alpha_i\rangle\in G_3$，$i=1,\cdots,n$。但 $\langle 1,2,3\rangle\notin G_3$，此与 $f\in T(G_3)$ 矛盾，故 $f\in T_{\{0,1,2\}}$。

iv)若 $f(1,\cdots,1)=3$，则仿 iii)，可证得 $f\in T_{\{0,1,3\}}$。

3)若 $f(0,\cdots,0)=2$，分情况讨论：

i)若 $f(2,\cdots,2)=2$ 或 $*$，则 $f\in T_{\{2\}}$。

ii)若 $f(2,\cdots,2)=0$，则 $f\in T_{\{0,1,2\}}\cup T_{\{0,2,3\}}$。

看 $f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_i\in\{0,2\}$，$i=1,\cdots,n$。有

$$f\begin{pmatrix}0, & \cdots, & 0\\ 2, & \cdots, & 2\\ \alpha_1, & \cdots, & \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0,1,2,3\end{pmatrix}，得\ f\in T_{\{0,1,2\}}\cup T_{\{0,2,3\}}。$$

iii)若 $f(2,\cdots,2)=1$，则 $f\in T_{\{0,1,2\}}$。

设 $f(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，$\beta_i\in\{0,1,2\}$，$i=1,\cdots,n$。若 $f\notin T_{\{0,1,2\}}$，则 $f\begin{pmatrix}0, & \cdots, & 0\\ 2, & \cdots, & 2\\ \beta_1, & \cdots, & \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\langle 0,2,\beta_i\rangle\in G_3$，$i=1,\cdots,n$。但 $\langle 2,1,3\rangle\notin G_3$，与 $f\in T(G_3)$ 矛盾，故 $f\in T_{\{0,1,2\}}$。

iv)若 $f(2,\cdots,2)=3$，则仿 3)之 iii)可证得 $f\in T_{\{0,2,3\}}$。

4)若 $f(0,\cdots,0)=3$，分情况讨论：

i)若 $f(3,\cdots,3)=3$ 或 $*$，则 $f\in T_{\{3\}}$。

ii)若 $f(3,\cdots,3)=0$，则仿 3)之 ii)可得 $f\in T_{\{0,1,3\}}\cup T_{\{0,2,3\}}$。

iii)若 $f(3,\cdots,3)=1$，则仿 3)之 iii)可证得 $f\in T_{\{0,1,3\}}$。

iv)若 $f(3,\cdots,3)=2$，则仿 3)之 iii)可证得 $f\in T_{\{0,2,3\}}$。

综上，有 $f\in\bigcup_{\emptyset\subset E\subset E_4}T_E$。

结束语 本文根据部分 K 值逻辑的完备性理论和相似关系概念，对78个完满对称函数集进行了相似关系分类，并证明了其中的32个不属于准完备集之最小覆盖成员。因此，在判定一个函数 f 是否为 Sheffer 函数时，不需要检查 f 是否属于这32个准完备集，从而减少了判定的工作量。

参考文献

[1] 罗铸楷. 部分多值逻辑函数的完备性理论[J]. 数学学报，1984，27(5)：676-683

[2] 罗铸楷. 部分多值逻辑函数集中的极大封闭集[J]. 数学学报，1984，27(6)：795-800

[3] 刘任任. 部分三值逻辑中准完备集之最小覆盖[J]. 湘潭大学自然科学学报，1991，13(2)：158-164

[4] 刘任任. 部分K值逻辑中准完备集之最小覆盖的一些结果(I)[J]. 湘潭大学自然科学学报，1992，14(1)：123-129

[5] 刘任任. 部分K值逻辑中准完备集之最小覆盖的一些结果(II)[J]. 湘潭大学自然科学学报，1993，15(2)：141-148

[6] Liu Renren. The Decision and Construction on Sheffer Functions in Partial K-valued Logic[C]//Proceedings of the 23rd International Symposium on Multiple-valued Logic. Sacramento，USA：IEEE Computer Society Press，1993：111-115

[7] 刘任任。部分K值逻辑中准完备集之最小覆盖的一些结果(III)[J]. 湘潭大学自然科学学报，1995，17(3)：109-113

[8] Liu Renren. Some results on the decision for Sheffer functions in partial K-valued Logic[J]. Multiple-Valued Logical，An International Journal，1996，1(1)：253-269

[9] Liu Renren. Some results on the decision for Sheffer functions in partial K-valued Logic(II)[C]//Proceeding of the 28th International Symposium on Multiple-valued Logic. Fukuoka，Japan，IEEE Computer Society Press，1998：77-81

[10] Liu Renren. Research on the Similarity among Precomplete Sets Preserving m-ary Relations in Partial K-Valued Logic[C]//Proceedings of the 39th International Symposium on Multiple-Valued Logic. Freiburg，Germany，IEEE Computer Society Press，1999：136-139

[11] Liu Renren，Chen Jianer，Chen Songqiao. Some results on the minimal coverings of precomplete classes in partial k-valued logic functions[J]. Journal of Computer Science and Technology，2004，19(6)：981-985