知识的属性扰动规律的不等式关系

张冠宇[1] 刘夏斐[2]
(黄淮学院数学科学系 驻马店 463000)[1] (信阳农业高等专科学校 信阳 464000)[2]

摘 要 知识的属性扰动引起知识规律的变化，这些变化的规律称为扰动规律。利用单向S-粗集和单向S-粗集对偶，给出属性扰动的知识规律的上规律、下规律的概念，并对知识规律与属性扰动的知识规律进行了讨论，提出了属性扰动知识规律(上规律，下规律)的不等式定理。

关键词 知识规律，属性扰动，上规律，下规律，扰动知识规律，不等式定理
中图法分类号 O159 **文献标识码** A

Iequality Relation of Knowledge Attribute Disturbance Law

ZHANG Guan-yu[1] LIU Xia-fei[2]
(Department of Mathematics, Huanghuai University, Zhumadian 463000, China)[1] (Xinyang Agricultural College, Xinyang 464000, China)[2]

Abstract The attribute disturbance of knowledge causes the changing of the knowledge law, and the changing laws are called disturbance laws. By using one direction S-rough sets and dual of one direction S-rough sets, the concepts of knowledge upper law and knowledge lower law of attribute disturbance were given, knowledge law and the knowledge law of attribute disturbance were discussed, and the inequality theorems of attribute disturbance knowledge upper law and attribute disturbance knowledge lower law were proposed.

Keywords Knowledge law, Attribute disturbance, Upper law, Lower law, Disturbance knowledge law, Inequality theorem

1 引言

自1982年波兰数学家Z. Pawlak教授提出粗集[1]以来，粗集理论已经应用到许多领域。针对具有动态特性的集合$X\subset U$，文献[2]改进了Pawlak粗集，提出了S-粗集(singular rough sets)，文献[3-9]给出了S-粗集的更多研究，把静态粗集推广到动态粗集，使得S-粗集具有了更广泛的应用；以R-元素等价类$[x]$定义的S-粗集和Pawlak粗集都不能完成系统中规律挖掘的研究。基于这个事实，文献[10]提出函数S-粗集(function singular rough sets)，并利用函数S-粗集对系统进行规律识别、挖掘[11,12]。本文在单向S-粗集的基础上，对知识规律的属性扰动知识规律进行了讨论，给出了知识规律的扰动规律的上规律、下规律的定义，发现了属性扰动知识规律不等式关系，并给出相应的不等式关系定理。

2 单向S-粗集

定义1 设U是有限元素论域，$X\subset U$是元素集，α是V上的属性集，$[x]$是R-元素等价类，称$R_-(X)$，$R^-(X)$分别是$X\subset U$的下近似，上近似，而且

$$R_-(X)=\bigcup\{x|x\in U,[x]\subseteq X\} \tag{1}$$

$$R^-(X)=\bigcup\{x|x\in U,[x]\cap X\neq\phi\} \tag{2}$$

定义2 由$R_-(X)$，$R^-(X)$构成的集合对，称作$X\subset U$的R-粗集，简称粗集，而且

$$(R_-(X),R^-(X)) \tag{3}$$

定义3 称$B_{nR}(X)$是$X\subset U$的R-边界，而且

$$B_{nR}(X)=R^-(X)-R_-(X) \tag{4}$$

由定义1显然有

$$R_-(X)\subseteq X\subseteq R^-(X) \tag{5}$$

定义4 给定集合$X\subset U$，如果存在变换$f\in F$使得$u\in U$，$u\notin X$，u在f的作用下变成$f(u)=x\in X$，称$f\in F$是U上的元素迁移，$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$称作U上的元素迁移族；或者$\exists u\in U, u\overline{\in} X\Rightarrow f(u)=x\in X$。

定义5 给定$X\subset U$称X°是X的单向S-集合，如果

$$X^\circ=X\cup\{u|u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x\in X\} \tag{6}$$

称X^f是$X\subset U$的f-扩张，而且

$$X^f=\{u|u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x\in X\} \tag{7}$$

定义6 称集合对$((R,F)_\circ(X^\circ),(R,F)^\circ(X^\circ))$是$X^\circ\subset U$的单向S-粗集，称$(R,F)_\circ(X^\circ)$，$(R,F)^\circ(X^\circ)$分别是$X^\circ\subset U$的$F$下近似和上近似，如果

$$(R,F)_\circ(X^\circ)=\bigcup\{x|x\in U,[x]\subseteq X^\circ\} \tag{8}$$

$$(R,F)^\circ(X^\circ)=\bigcup\{x|x\in U,[x]\cap X^\circ\neq\phi\} \tag{9}$$

由定义5、定义6显然有

$$(R,F)_\circ(X^\circ)\subseteq X^\circ\subseteq(R,F)^\circ(X^\circ) \tag{10}$$

定义7 给定集合$X\subset U$，如果存在变换$\overline{f}\in\overline{F}$使得$x\in$

到稿日期：2009-10-16 返修日期：2009-12-29 本文受河南省基础与前沿技术研究项目(102300410153)，山东省自然科学基金项目(Y2004H02)资助。

张冠宇(1962—)，男，教授，主要研究方向为粗系统理论与应用，E-mail：zgy1962168@sina.com；刘夏斐(1966—)，女，副教授，主要研究方向为不确定信息理论与应用。

$X, f(x)=u\notin X$，x 在 $\bar{f}$ 的作用下变成 $\bar{f}(x)=u\notin X$，称 $\bar{f}\in\bar{F}$ 是 U 上的元素迁移，$\bar{F}=\{\overline{f_1},\overline{f_2},\cdots,\overline{f_m}\}$ 称作 U 上的元素迁移族；或者 $\exists x\in X\Rightarrow\bar{f}(x)=u\notin X$。

定义 8 给定 $X\subset U$，称 X' 是 X 的亏集，如果

$$X'=X-\{x\mid x\in X,\bar{f}(x)=u\notin X\} \tag{11}$$

定义 9 称 $(R,\bar{F})_{\circ}(X')$，$(R,\bar{F})^{\circ}(X')$ 分别是 $X'\subset U$ 的 $\bar{F}$ 下近似和上近似，如果

$$(R,\bar{F})_{\circ}(X')=\bigcup\{x\mid x\in U,[x]\subseteq X'\} \tag{12}$$

$$(R,\bar{F})^{\circ}(X')=\bigcup\{x\mid x\in U,[x]\cap X'\neq\phi\} \tag{13}$$

称集合对 $((R,\bar{F})_{\circ}(X'),(R,\bar{F})^{\circ}(X'))$ 是 $X'\subset U$ 的单向 S-粗集对偶。

由定义 8，定义 9 显然有

$$(R,\bar{F})_{\circ}(X')\subseteq X'\subseteq(R,\bar{F})^{\circ}(X') \tag{14}$$

3 知识规律

定义 10 给定知识 $[x]=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$（R-元素等价类），$\alpha$ 是 $[x]$ 的属性集，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，$y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 是 $[x]$ 的特征数据集，而且 $y_i=\{y_{i1},y_{i2},\cdots,y_{it}\}$。称 y 是 $[x]$ 的合成生成的特征值，简称 $[x]$ 的生成，而且

$$y=(y_1,y_2,\cdots,y_t)=\left(\sum_{i=1}^{n}y_{i1},\sum_{i=1}^{n}y_{i2},\cdots,\sum_{i=1}^{n}y_{it}\right) \tag{15}$$

式中，$y_{ik},y_k\in\mathrm{R}^+$，$\mathrm{R}^+$ 是实数集，$k=1,2,\cdots,t$；$i=1,2,\cdots,n$。

定义 11 给定知识 $[x]=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$（R-元素等价类），称 $(1,y_1),(2,y_2),\cdots,(n,y_n)$ 是 x 的特征值 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 生成的数据点。由数据点得到的 Lagrange 插值多项式

$$\begin{aligned}w(x)&=\sum_{j=1}^{n}y_j\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\\&=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\end{aligned} \tag{16}$$

称作知识 $[x]$ 生成的知识规律，简称 $[x]$ 的知识规律。

定义 12 称 $[x]^f_\alpha$ 是知识 $[x]$ 的 f-扰动知识，如果 $[x]^f_\alpha$ 的属性集 α^f 与 $[x]$ 的属性集 α 满足

$$\mathrm{card}(\alpha)\leqslant\mathrm{card}(\alpha^f) \tag{17}$$

式中，$\mathrm{card}(\alpha)$，$\mathrm{card}(\alpha^f)$ 分别是 α,α^f 的基数，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，$\alpha^f=\alpha\cup\{\beta\mid\beta\in V,\beta\notin\alpha,f(\beta)=\alpha'\in\alpha\}$。

定义 13 称 $[x]^{\bar f}_\alpha$ 是知识 $[x]$ 的 $\bar{f}$-扰动知识，如果 $[x]^{\bar f}_\alpha$ 的属性集 $\alpha^{\bar f}$ 与 $[x]$ 的属性集 α 满足

$$\mathrm{card}(\alpha^{\bar f})\leqslant\mathrm{card}(\alpha) \tag{18}$$

式中，$\mathrm{card}(\alpha^{\bar f})$ 是 $\alpha^{\bar f}$ 的基数，$\alpha^{\bar f}=\alpha\backslash\{\alpha\mid\alpha_j\in\alpha,f(\alpha_j)=\beta_j\notin\alpha\}$。

定义 14 称 $[x]_{\alpha\cup\{f(\beta)\}}$ 是 $[x]$ 的一阶 f-扰动知识，如果存在属性 $\beta\in V,\beta\notin\alpha,f(\beta)=\alpha'\in\alpha$；称 $[x]_{\alpha\cup\{f(\beta_1),f(\beta_2),\cdots,f(\beta_k)\}}$ 是 $[x]$ 的 k 阶 f-扰动知识，记为 $[x]^f_k$；称 $[x]_{\alpha\backslash\bar{f}(\alpha')}$ 是 $[x]$ 的一阶 $\bar{f}$-扰动知识，如果存在属性 $\alpha'\in\alpha$，$f(\alpha')=\beta\notin\alpha$；称 $[x]_{\alpha\backslash\{\bar f(\alpha_1),\bar f(\alpha_2),\cdots,\bar f(\alpha_k)\}}$ 是 $[x]$ 的 k 阶 $\bar{f}$-扰动知识，记为 $[x]^{\bar f}_k$。

为了讨论问题的方便，这里分别把 k 阶 f-扰动知识 $[x]^f_k$ 和 k 阶 $\bar{f}$-扰动知识 $[x]^{\bar f}_k$ 的属性集分别记为 α^f_k 和 $\alpha^{\bar f}_k$，k 是正整数。

定义 15 称 $w(x)^f$，$w(x)^{\bar f}$ 分别是 $w(x)$ 的 f-属性扰动知识规律，$\bar{f}$-属性扰动知识规律，如果 $w(x)^f$ 的属性集 α^f 与 $w(x)$ 的属性集 α，$w(x)^{\bar f}$ 的属性集 $\alpha^{\bar f}$ 与 $w(x)$ 的属性集 α 分别满足

$$\alpha\subseteq\alpha^f \tag{19}$$

$$\alpha^{\bar f}\subseteq\alpha \tag{20}$$

定义 16 称 $w(x)^f_k$，$w(x)^{\bar f}_k$ 分别是 $w(x)$ 的 k 阶 f-属性扰动知识规律，k 阶 $\bar{f}$-属性扰动知识规律，而且

$$\begin{aligned}w(x)^f_k&=\sum_{j=1}^{m}y_j\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{m}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\\&=b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_1x+b_0\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}w(x)^{\bar f}_k&=\sum_{j=1}^{s}y_j\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{s}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\\&=c_{s-1}x^{s-1}+c_{s-2}x^{s-2}+\cdots+c_1x+c_0\end{aligned} \tag{22}$$

式(21)，式(22)可由定义 10，定义 11 得到。

定义 17 称 $w(x)_-$ 是 $[x]_-$ 的知识下规律，而且

$$w(x)_-=d_{r-1}x^{r-1}+d_{r-2}x^{r-2}+\cdots+d_1x+d_0 \tag{23}$$

其中，$[x]_-=(R,F)_{\circ}(X^{\circ})=\bigcup[x]=\{x\mid x\in U,[x]\subseteq X^{\circ}\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$，$Y_-=\{y_1,y_2,\cdots,y_r\}$ 是 $[x]_-$ 的特征数据集。

定义 18 称 $w(x)^-$ 是 $[x]^-$ 的知识上规律，而且

$$w(x)^-=e_{t-1}x^{t-1}+e_{t-2}x^{t-2}+\cdots+e_1x+e_0 \tag{24}$$

其中，$[x]^-=(R,F)^{\circ}(X^{\circ})=\bigcup[x]=\{x\mid x\in U,[x]\cap X^{\circ}=\phi\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$，$Y^-=\{y_1,y_2,\cdots,y_t\}$ 是 $[x]^-$ 的特征数据集。

定义 19 称 $w(x)^f_{k-}$ 是 k 阶 f-扰动知识 $[x]^f_k$ 的下规律，如果 $[x]^f_{k-}$ 生成 $w(x)^f_{k-}$，而且

$$w(x)_-=g_{u-1}x^{u-1}+g_{u-2}x^{u-2}+\cdots+g_1x+g_0 \tag{25}$$

其中，$[x]^f_{k-}=(R,F)_{\circ}(X'_k)=\bigcup[x]^f_k=\{x\mid x\in U,[x]^f_k\subset X'_k\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_\lambda\}$，$X'_k\subseteq X$，$Y_{k-}=\{y_1,y_2,\cdots,y_\lambda\}$ 是 $[x]^f_{k-}$ 的特征数据集。

定义 20 称 $w(x)^{f-}_k$ 是 $[x]^f_k$ 的知识上规律，如果 $[x]^{f-}_k$ 生成 $w(x)^{f-}_k$ 而且

$$w(x)^-=h_{v-1}x^{v-1}+h_{v-2}x^{v-2}+\cdots+h_1x+h_0 \tag{26}$$

其中，$[x]^{f-}_k=(R,F)^{\circ}(X'_k)=\bigcup[x]^f_k=\{x\mid x\in U,[x]^f_k\cap X_k'=\phi\}$，$=\{x_1,x_2,\cdots,x_\mu\}$，$X_k'\subseteq X$，$Y^-_k=\{y_1,y_2,\cdots,y_\mu\}$ 是 $[x]^{f-}_k$ 的特征数据集。

定义 21 称 $w(x)^{\bar f}_{k-}$ 是 $[x]^{\bar f}_{k-}$ 的知识下规律，如果 $[x]^{\bar f}_{k-}$ 生成 $w(x)^{\bar f}_{k-}$，而且

$$w(x)_-=l_{p-1}x^{p-1}+l_{p-2}x^{p-2}+\cdots+l_1x+l_0 \tag{27}$$

其中，$[x]^{\bar f}_{k-}=(R,F)_{\circ}(X^{\circ}_k)=\bigcup[x]^{\bar f}_k=\{x\mid x\in U,[x]^{\bar f}_k\subset X^{\circ}_k\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_v\}$，$X^{\circ}_k\supseteq X$，$Y^*_{k-}=\{y_1,y_2,\cdots,y_v\}$ 是 $[x]^{\bar f}_{k-}$ 的特征数据集。

定义 22 称 $w(x)^{\bar f-}_k$ 是 $[x]^{\bar f-}_k$ 的知识上规律，如果 $[x]^{\bar f-}_k$ 生成 $w(x)^{\bar f-}_k$，而且

$$w(x)^-=w_{q-1}x^{q-1}+w_{q-2}x^{q-2}+\cdots+w_1x+w_0 \tag{28}$$

其中，$[x]^{\bar f-}_k=(R,F)^{\circ}(X^{\circ}_k)=\bigcup[x]^{\bar f}_k=\{x\mid x\in U,[x]^{\bar f}_k\cap X^{\circ}_k=\phi\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$，$X^{\circ}_k\supseteq X$，$Y^{*-}_k=\{y_1,y_2,\cdots,y_s\}$ 是 $[x]^{\bar f}_k$ 的特征数据集。

命题 1 知识 $[x]$ 随着 $[x]$ 的属性集的属性补充，$[x]$ 具有萎缩特征。

命题 2 知识 $[x]$ 随着 $[x]$ 的属性集的属性删除，$[x]$ 具有扩张特征。

引理 1 设知识 $[x]_s$，$[x]_t$，α_s，α_t 分别是知识 $[x]_s$，$[x]_t$ 的属性集，如果 $\alpha_t\subseteq\alpha_s$，则

$$[x]_s\subseteq[x]_t \tag{29}$$

证明见文献[9]。

引理 2 设知识 $[x]_s$，$[x]_t$，$w(x)_s$，$w(x)_t$ 分别是 $[x]_s$，$[x]_t$ 生成的知识规律，如果 $[x]_s\subseteq[x]_t$，则

$$w(x)_s\leqslant w(x)_t \tag{30}$$

证明：因为$[x]_s\subseteq[x]_t$，不妨设$[x]_s=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$，$[x]_t=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$，这里$p\leqslant q$；或者$\mathrm{card}([x]_i)\leqslant\mathrm{card}([x]_j)$；$\forall x_i\in[x]_s$，$x_i$具有特征值集合$y_i$，而且$y_i=\{y_{i,1},y_{i,2},\cdots,y_{i,n}\}$，$y_{i,k}\in\mathrm{R}^+$，$i=1,2,\cdots,p$，$j=1,2,\cdots,n$，利用$y_k=\sum_{i=1}^{p}y_{i,k}$，$k=1,2,\cdots,n$，得到$[x]_s$的特征值集合$Y_s=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$。利用式(15)得到引理2的知识规律$w(x)_s$。与此相类似得到$[x]_t$的特征值集合$y_t$，而且$Y_t=\{y_1^*,y_2^*,\cdots,y_n^*\}$。

利用式(15)得到$[x]_t$的知识规律$w(x)_t$，因为$\forall y_k\in Y_s$，$\forall y_k\in Y_s y_k^*\in Y_t$，$k=1,2,\cdots,n$满足$y_k\leqslant y_k^*$，所以$w(x)_s\leqslant w(x)_t$。

引理3 设s阶f-扰动知识$[x]_s^f$，t阶f-扰动知识$[x]_t^f$，它们的下近似分别为$[x]_{s-}^f$和$[x]_{t-}^f$，如果$t\leqslant s$，$s,t\in\mathrm{N}^+$，则

$$[x]_{s-}^f\subseteq[x]_{t-}^f \tag{31}$$

证明：因为$t\leqslant s$，$s,t\in\mathrm{N}^+$，由定义3.5知$[x]_s^f\subseteq[x]_t^f$，不妨设$[x]_s^f=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$，$[x]_t^f=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$，这里$p\leqslant q$；$[x]_s^f$，$[x]_t^f$的属性集分别为$\alpha_s^f=\alpha\cup\{f(\beta_1),f(\beta_2),\cdots,f(\beta_s)\}$，$\alpha_t^f=\alpha\cup\{f(\beta_1),f(\beta_2),\cdots,f(\beta_t)\}$，$t\leqslant s$，经过$f$迁移后，集合$X$变成$X_s'$和$X_t'$，而且$X_s'\subseteq X_t'\subseteq X$。因此对$\forall x\in[x]_{s-}^f=\{x\mid x\in U,[x]_s^f\subseteq X_s'\}\Rightarrow x\in[x]_t^f\subseteq X_t'\Rightarrow x\in\{x\mid x\in U,[x]_t^f\subseteq X'_t\}\Rightarrow x\in[x]_{t-}^f$，所以$[x]_{s-}^f\subseteq[x]_{t-}^f$。

引理4 设s阶f－扰动知识$[x]_s^f$，t阶f－扰动知识$[x]_t^f$，它们的上近似分别为$[x]_s^{f-}$和$[x]_t^{f-}$，如果$t\leqslant s$，$s,t\in\mathrm{N}^+$，则

$$[x]_s^{f-}\subseteq[x]_t^{f-} \tag{32}$$

证明与引理3类似，证明略。

引理5 设s阶$\bar{f}$-扰动知识$[x]_s^{\bar{f}}$，t阶$\bar{f}$-扰动知识$[x]_t^{\bar{f}}$，它们的下近似分别为$[x]_{s-}^{\bar{f}}$和$[x]_{t-}^{\bar{f}}$，如果$t\leqslant s$，$s,t\in\mathrm{N}^+$，则

$$[x]_{s-}^{\bar{f}}\supseteq[x]_{t-}^{\bar{f}} \tag{33}$$

证明：因为$t\leqslant s$，$s,t\in N^+$，由定义3.5知$[x]_s^{\bar{f}}\supseteq[x]_t^{\bar{f}}$，不妨设$[x]_s^{\bar{f}}=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$[x]_t^{\bar{f}}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，这里$n\leqslant m$；$[x]_s^{\bar{f}}$，$[x]_t^{\bar{f}}$的属性集分别为$\alpha_s^{\bar{f}}=\alpha\{\bar{f}(\alpha_1),\bar{f}(\alpha_2),\cdots,\bar{f}(\alpha_s)\}$，$\alpha_t^{\bar{f}}=\alpha\{\bar{f}(\alpha_1),\bar{f}(\alpha_2),\cdots,\bar{f}(\alpha_t)\}$，$t\leqslant s$，经过$\bar{f}$迁移后，集合$X$变成$X_s^*$和$X_t^*$，而且$X_s^*\supseteq X_t^*\supseteq X$。因此对$\forall x\in[x]_{t-}^{\bar{f}}=\{x\mid x\in U,[x]_t^{\bar{f}}\subseteq X_t^*\}\Rightarrow x\in[x]_s^{\bar{f}}\subseteq X_s^*\Rightarrow x\in\{x\mid x\in U,[x]_s^{\bar{f}}\subseteq X_s^*\}\Rightarrow x\in[x]_{s-}^{\bar{f}}$，所以$[x]_{t-}^{\bar{f}}\subseteq[x]_{s-}^{\bar{f}}$。

引理6 设s阶$\bar{f}$-扰动知识$[x]_s^{\bar{f}}$，t阶$\bar{f}$-扰动知识$[x]_t^{\bar{f}}$，它们的上近似分别为$[x]_s^{\bar{f}-}$和$[x]_t^{\bar{f}-}$，如果$t\leqslant s$，$s,t\in\mathrm{N}^+$，则

$$[x]_s^{\bar{f}-}\supseteq[x]_t^{\bar{f}-} \tag{34}$$

证明与引理5类似，证明略。

4 知识规律的属性扰动规律的不等式关系

定理1（f-属性扰动知识规律不等式） 设$w(x)_{i-}^f$，$w(x)_i^f$，$w(x)_i^{f-}$分别是i阶f-扰动知识$[x]_k^f$的下规律和上规律，则

$$w(x)_{i-}^f\leqslant w(x)_i^f\leqslant w(x)_i^{f-}\quad(i=1,2,\cdots,k) \tag{35}$$

证明：因为$w(x)_{i-}^f$，$w(x)_i^f$，$w(x)_i^{f-}$分别是知识$[x]_{i-}^f$，$[x]_i^f$，$[x]_i^{f-}$生成的规律，由定义1可知

$$[x]_{i-}^f\subseteq[x]_i^f\subseteq[x]_i^{f-}\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

由引理2得

$$w(x)_{i-}^f\leqslant w(x)_i^f\leqslant w(x)_i^{f-}\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

定理2（$\bar{f}$-属性扰动知识规律不等式） 设$w(x)_{i-}^{\bar{f}}$，$w(x)_i^{\bar{f}}$，$w(x)_i^{\bar{f}-}$分别是i阶$\bar{f}$-扰动知识$[x]_i^{\bar{f}}$的下规律和上规律，则

$$w(x)_{i-}^{\bar{f}}\leqslant w(x)_i^{\bar{f}}\leqslant w(x)_i^{\bar{f}-}\quad(i=1,2,\cdots,k) \tag{36}$$

证明与定理1类似，证明略。

定理3（f-属性扰动知识下规律序定理） 设$w(x)_{i-}^f(i=1,2,\cdots,k)$分别是$i$阶$f$-扰动知识$[x]_{i-}^f(i=1,2,\cdots,k)$的下规律，则

$$w(x)_{k-}^f\leqslant w(x)_{(k-1)-}^f\leqslant\cdots\leqslant w(x)_{1-}^f\leqslant w(x)_- \tag{37}$$

证明：因为$[x]_k^f\subseteq[x]_{k-1}^f\subseteq\cdots\subseteq[x]_1^f\subseteq[x]$，由引理3有

$$[x]_{k-}^f\subseteq[x]_{(k-1)-}^f\subseteq\cdots\subseteq[x]_{1-}^f\subseteq[x]_-$$

又由引理2得

$$w(x)_{k-}^f\leqslant w(x)_{(k-1)-}^f\leqslant\cdots\leqslant w(x)_{1-}^f\leqslant w(x)_-$$

定理4（f-属性扰动知识上规律序定理） 设$w(x)_i^{f-}(i=1,2,\cdots,k)$分别是$i$阶$f$-扰动知识$[x]_i^{f-}(i=1,2,\cdots,k)$的上规律，则

$$w(x)_k^{f-}\leqslant w(x)_{(k-1)}^{f-}\leqslant\cdots\leqslant w(x)_1^{f-}\leqslant w(x)^- \tag{38}$$

证明与定理3类似，证明略。

推论1 如果$F=\phi$，则

$$w(x)_{1-}^f=w(x)_{2-}^f=\cdots=w(x)_{k-}^f=w(x)_- \tag{39}$$

$$w(x)_1^{f-}=w(x)_2^{f-}=\cdots=w(x)_k^{f-}=w(x)^- \tag{40}$$

事实上，若$F=\phi$，则有$\alpha_1^f=\alpha_2^f=\cdots=\alpha_k^f=\alpha$，所以$w(x)_1^f=w(x)_2^f=\cdots=w(x)_k^f=w(x)$，从而有

$$w(x)_{1-}^f=w(x)_{2-}^f=\cdots=w(x)_{k-}^f=w(x)_-$$

$$w(x)_1^{f-}=w(x)_2^{f-}=\cdots=w(x)_k^{f-}=w(x)^-$$

定理5（$\bar{f}$-属性扰动知识下规律序定理） 设$w(x)_{i-}^{\bar{f}}(i=1,2,\cdots,k)$分别是$i$阶$\bar{f}$-扰动知识$[x]_{i-}^{\bar{f}}(i=1,2,\cdots,k)$的下规律，则

$$w(x)_{k-}^{\bar{f}}\geqslant w(x)_{(k-1)-}^{\bar{f}}\geqslant\cdots\geqslant w(x)_{1-}^{\bar{f}}\geqslant w(x)_- \tag{41}$$

证明：因为$[x]_k^{\bar{f}}\supseteq[x]_{k-1}^{\bar{f}}\supseteq\cdots\supseteq[x]_1^{\bar{f}}\supseteq[x]$，由引理5有

$$[x]_{k-}^{\bar{f}}\supseteq[x]_{(k-1)-}^{\bar{f}}\supseteq\cdots\supseteq[x]_{1-}^{\bar{f}}\supseteq[x]_-$$

又由引理2得

$$w(x)_{k-}^{\bar{f}}\geqslant w(x)_{(k-1)-}^{\bar{f}}\geqslant\cdots\geqslant w(x)_{1-}^{\bar{f}}\geqslant w(x)_-$$

定理6（$\bar{f}$-属性扰动知识上规律序定理） 设$w(x)_i^{\bar{f}-}(i=1,2,\cdots,k)$分别是$i$阶$\bar{f}$-扰动知识$[x]_i^{\bar{f}-}(i=1,2,\cdots,k)$的上规律，则

$$w(x)_k^{\bar{f}-}\geqslant w(x)_{(k-1)}^{\bar{f}-}\geqslant\cdots\geqslant w(x)_1^{\bar{f}-}\geqslant w(x)^- \tag{42}$$

证明与定理5类似，证明略。

推论2 如果$\bar{F}=\phi$，则

$$w(x)_{1-}^{\bar{f}}=w(x)_{2-}^{\bar{f}}=\cdots=w(x)_{k-}^{\bar{f}}=w(x)_- \tag{43}$$

$$w(x)_1^{\bar{f}-}=w(x)_2^{\bar{f}-}=\cdots=w(x)_k^{\bar{f}-}=w(x)^- \tag{44}$$

5 讨论

知识$[x]=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$具有特征值$y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，特征值$y$生成知识规律$w(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$，这是知识$[x]$的一个重要特征，知识$[x]$发生变化，相应地，其具有的特征值$y$也发生变化，从而$y$生成的知识规律$w(x)$也发生变化。本文基于单向S-粗集和单向S-粗集对偶的概念，给出随属性集α变化（属性增加或删除），知识$[x]$的规律$w(x)$和知识$[x]$的扰动知识规律变化的不等式关系。

（下转第260页）

表 1　各类别的平均准确率

Class	Spatial histogram	Fisher scores	Linear Weighted Combination	Two Level Combination
Aero-plane	0.630	0.610	0.648	0.663
bicycle	0.522	0.500	0.543	0.563
bird	0.384	0.374	0.426	0.426
boat	0.510	0.490	0.530	0.530
bottle	0.247	0.231	0.265	0.275
bus	0.460	0.420	0.450	0.481
car	0.650	0.595	0.670	0.686
cat	0.470	0.450	0.482	0.511
chair	0.455	0.417	0.468	0.485
cow	0.289	0.214	0.312	0.336
dining table	0.334	0.300	0.337	0.359
dog	0.360	0.335	0.387	0.404
horse	0.615	0.578	0.638	0.669
motorbike	0.520	0.501	0.559	0.556
person	0.780	0.779	0.800	0.810
Potted plant	0.217	0.197	0.235	0.247
sheep	0.315	0.298	0.324	0.335
sofa	0.375	0.350	0.377	0.400
train	0.620	0.562	0.624	0.635
TV/monitor	0.410	0.387	0.422	0.438
Mean Average Precision	0.458	0.429	0.475	0.490

我们根据信息的互补性，进行两种简单的融合策略。值得注意的是，为了验证这两种表示的信息互补性，我们相比参赛队伍的算法中用到的特征而言，采用了比较简单和单一的局部特征，但我们最终的分类性能却接近了 VOC2007 竞赛的前三水平（VOC 第三名水平（*mean average precision* = 0.503）。从表 1 的实验结果可以看出，本文提出的两种信息融合策略在所有的目标类上相比单种信息均取得了一致提高。这说明空域金字塔直方图表示和费舍分数表示确实存在一定的信息互补性，我们的策略是行之有效的。这两种表示具有一定普遍意义，可以同时用于多种特征上，因此相信我们融合的策略运用到多个特征上时，性能又会有不同程度的提高。

结束语　视觉目标类识别是当今计算机视觉研究领域的重大挑战之一，吸引着世界范围内相关研究者的广泛兴趣。近年来提出的空域金字塔直方图表示在实际的研究中就如何有效地组织无序、不等数量的特征点集，取得了比较好的效果。但由于其信息描述不全面，性能上存在着一定的瓶颈。本文从信息互补性角度出发，提出多种信息融合的集成策略，结合空域直方图特征与费舍分数表示二者的优点用于视觉目标类识别。实验结果表明，我们的策略是行之有效的。通过信息融合，在性能上相比单信息，在所有目标类别上均取得了一致性的提高。

参 考 文 献

[1] Grauman K, Darrell T. The pyramid match kernel: Discriminative classification with sets of image features[C]//ICCV. 2005

[2] Lazebnik S, Schmid C, Ponce J. Beyond bags of features: Spatial pyramid matching for recognizing natural scene categories[C]//CVPR. 2006

[3] Fergus R, Perona P, Zisserman A. Object class recognition using unsupervised scale-invariant learning[C]//CVPR. 2003

[4] Ferrari V, Fevrier L, Jurie F, et al. Groups of adjacent contour segments for object detection[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2008, 30(1): 36-51

[5] Mikolajczyk K, Leibe B, Schiele B. Local features for object class recogniton[C]//ICCV. 2005

[6] Farquhar J, Szedmak S, Meng H, et al. Improving "bag-of-keypoints" image categorization: generative models and pdf-kernels[R]. University of Southampton, 2005

[7] Perronnin F, Dance C. Fisher kernel on visual vocabulries for image categorization[C]//CVPR. 2007

[8] Holub A D, Welling M, Perona P. Hybrid generative-discriminative visual categorization[J]. Internal Journal Computer Vision, 2008, 77(1): 239-258

[9] Gales M, Layton M. Maximum margin training of generative kernels[R]. University of Cambridge, 2004

[10] Mikolajczyk K, Schmid C. Scale and affine invariant interest point detectors[J]. Internal Journal Computer Vision 2004, 60(1): 63-86

[11] Lowe D G. Distinctive image features from scale-invariant keypoints[J]. Internal Journal Computer Vision, 2004, 60(2): 91-110

[12] The PASCAL Visual Object Classes Challenge[EB/OL]. available on http://pascallin. ecs. soton. ac. uk/challenges/VOC/voc2007/index. html, 2007

[13] Tao D, Tang X, Li X, et al. Asymmetric bagging and random subspace for support vector machines-based relevance feedback in image retrieval[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2006, 28(7): 1088-1099

[14] Kittler J, Hatef M, Duin P W, et al. On combining classifiers[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1998, 20(3): 226-239

[15] Chang C C, Lin C J. LIBSVM: a library for support vector machines[EB/OL]. Software available at http://www. csie. ntu. edu. tw/cjlin/libsvm, 2001

（上接第 244 页）

这些结论使人们对于规律挖掘的阶梯型、层次（渐进）性有了更进一步的认识，它在规律挖掘中具有更重要的作用。

参 考 文 献

[1] Pawlak Z. Rough Sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341-356

[2] Shi Kai-quan. S-rough sets and its application in diagnosis-recognition for disease [J]. IEEE Proceedings of the First International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2002, 1: 50-54

[3] Shi Kai-quan, Cui Yu-quan. F-decomposition and $\bar{F}$-reduction of S-rough sets[J]. An International Journal Advances in Systems Sciences and Applications, 2004, 4: 487-499

[4] Shi Kai-quan, Chang Ting-cheng. One direction S-rough Sets [J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 2: 319-334

[5] Shi Kai-Quan. Two direction S-rough Sets [J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 2: 335-349

[6] Zhang Guan-Yu, Du Ying-Ling, Qiu Yu-Feng. Knowledge Law and Attribute Disturbance of Law[J]. 数学季刊, 2008, 23(2): 245-251

[7] Zhang Guan-yu, Du Ying-ling. Attribute Disturbance of Knowledge and Attribute Disturbance Theorems[J]. 数学季刊, 2008, 23(4): 574-581

[8] Yin Shou-feng, Shi Kai-quan, Hu Hai-qing. Two direction S-rough extension communication and its heredity-variation characteristics[J]. International Journal of Fuzzy Mathematics, 2006, 4: 408-413

[9] 史开泉，崔玉泉. S-粗集与粗决策[M]. 北京：科学出版社，2006：5-8

[10] Shi Kai-quan. Function S-rough sets and function transfer[J]. An International Journal Advances in systems Science and Applications, 2005, 1: 1-8

[11] 史开泉，姚炳学. 函数 S-粗集与规律辨识[J]. 中国科学(E)，2008，4：553-564

[12] Shi Kai-quan, Yao Bing-xue. Function S-rough sets and law identification[J]. Science in China(F), 2008, 5: 499-510