# 具有失效链路的star网络可靠性分析

梁家荣　花仁杰
（广西大学计算机与电子信息学院　南宁530004）

**摘　要**　star互连网络作为大规模处理器系统网络模型的重要候选之一，其可靠性问题一直为人们所关注。在链路可靠概率模型的基础上，分别采用不同的分析方法对star网络的可靠性进行了分析，建立了相应的可靠性模型。这些可靠性模型指出了链路可靠性与网络可靠性之间的约束关系。模拟实验结果表明，在现有大规模集成电路技术的条件下，这些可靠性分析方法都是可行的，而且star网络的可靠性可以控制在一个理想的范围内。

**关键词**　互连网络，可靠性，概率模型，大规模处理器系统
**中图法分类号**　TP393　　**文献标识码**　A

## Reliability Analysis of star Network with Link Failures

LIANG Jia-rong　HUA Ren-jie
(College of Computer and Electronic Information, Guangxi University, Nanning 530004, China)

**Abstract**　Reliability problems on star interconnection network regarded as one of important candidates of network models in large-scale processor systems have been being concerned by people. Under probability model based on link reliability, reliability of star network was analyzed by different analysis methods, and reliability models that correspond to those different methods were set up. The constraint relation between link reliability and network reliability was indicated by above reliability models. The results of simulation experiments show that under existing massive integrated circuit technology, these analysis methods on reliability are all feasible and reliability of star network can be controlled within a ideal scale.

**Keywords**　Interconnection networks, Reliability, Probability model, Large-scale processor system

随着超大规模集成电路技术的不断发展，多处理器系统中所包含的处理器越来越多，因此其规模也越来越大[1]。互连网络作为连接多处理器的一种网络，是大规模多处理器系统中的重要组成部分，其拓扑结构对大规模多处理器系统的性能具有重要的影响。为了提高各处理器之间的通信效率以及协作处理的能力，人们不断地对互连网络的拓扑结构进行研究[1-3]。star互连网络的拓扑结构具有递归性、对称性、最大容错性、低节点度、短直径、可嵌入性等特殊性质，这些特性对于基于互连网络拓扑结构的大规模多处理器系统是非常重要的，因此star互连网络作为超立方体网络的一个替代而得到广泛的研究[4,5-8]。

互连网络的可靠性问题是随着多处理器系统规模的不断扩大而产生的。互连网络的可靠性也可以理解为容错性，即在网络中出现故障节点或故障链路的情况下，通信节点间仍然保持较高通信效率[9]或网络中仍然存在着可用局部子网结构的概率[4]。目前，关于star网络的可靠性分析已经有很多成果。文献[5,10]分别从节点、链路失效的角度出发，对使得star网络中指定规模子网都失效所应达到的节点、链路失效数量进行了分析，得到了具体的量化结果，这为严格地限制网络故障率、提高网络的容错性提供了有效的约束依据。文献[4]在节点失效概率模型的基础上，对star网络中仍然存在着非失效子网的可靠性概率进行了分析。文献[11]在比较诊断模型的基础上对$n$维star网络的诊断能力进行了研究，得到了一个量化结果$n-1$，该结果为判断star网络是否是可诊断的网络提供了一个依据。文献[12]通过马尔可夫链过程建立了star网络的Markov reliability model，而文献[13-15]分别在链路失效模型下对star网络的容错性进行了研究，这为进一步分析研究大规模集成电路技术下具有故障链路的star网络可靠性提供了依据。

本文在链路可靠概率模型的基础上，采用不同的方法对star网络的可靠性进行了分析。首先，对star网络中的指定规模子网在不同数量组合下的交叉情况进行了分析，在此基础上将包含和不包含原理(The Principle of Inclusion and Exclusion, PIE)[16]应用到star网络的可靠性分析中，得到了一种具体准确的可靠性模型。同时，对沿着固定维划分下的网络的可靠性进行了分析，并结合PIE原理，得到了一种近似的可靠性模型。最后给出了一种非PIE原理的可靠性分析方法。这些方法下的可靠性模型明确指出了链路可靠性与网

到稿日期：2009-07-14　返修日期：2009-09-25　本文受国家自然科学基金(60564001)，教育部“新世纪人才支持计划”专项基金(NCET-06-0756)资助。

梁家荣(1966－)，男，博士后，教授，主要研究方向为人工智能、网络可靠性分析，E-mail: liangjr@gxu.edu.cn；花仁杰(1985－)，男，硕士，主要研究方向为网络可靠性分析。

络可靠性之间的约束关系。经过模拟实验，验证了这些方法的有效性和可用性，并进一步证明了在现有大规模集成电路技术的条件下，star 网络的可靠性是可以控制在一个理想的范围内的。

## 1 准备工作

一个 n-star 网络由 $n!$ 个节点和 $n!\,(n-1)/2$ 条链路构成，每个节点可由 1 到 $n$ 的 $n$ 个不同数的排序表示，如 1234 就表示 4-star 网络中的一个节点；两个节点 $s,t$ 是相邻节点且连接链路记为标签 $i$ 当且仅当 $s$ 排序表示的第一个位置上的数值与第 $i$ 个位置上的数值交换后可以得到 $t$ 的排序表示，其中 $i\in[2,n]$。如 1234 和 3214 就是 4-star 网络中的两个相邻节点且连接链路记为 3-链路（或记为 $X2X4$，$X$ 为未知值）。

一个 n-star 网络是可分解网络[6]，若沿着第 2 维到第 $n$ 维中的某维来划分，可以得到 $n$ 个不相交的 $n-1$ 维子网，这样 n-star 网络可以有 $n(n-1)$ 个不同的 $n-1$ 维子网。每个子网用长度为 $n$ 的符号串来表示，且这 $n$ 个符号来自于 $\{1,2,\cdots,n,X\}$ 集合，$X$ 为一个未知值符号。在子网的符号串表示中，$X$ 是可以重复出现的，其他符号则不能重复出现，而且 $X$ 的个数决定了该子网的维数，如 XXX1，X2X1 分别表示了 4-star 网络中的一个 3-star 子网、2-star 子网。

另外，在本文中，为方便描述，有如下的一些符号概念：

$RBEP_{n,n-1}(p)$：n-star 网络中存在着非失效 $n-1$ 维子网的可靠性概率，该可靠性概率的计算是基于链路可靠概率模型的，$p$ 为链路可靠概率。

$RBEP_{n,n-1}(p,i)$：沿着第 $i$ 维来划分 n-star 网络时，网络中存在着非失效 $n-1$ 维子网的可靠性概率，该可靠性概率的计算是基于链路可靠概率模型的，$p$ 为链路可靠概率。

$C_n^m$：从 $n$ 个不同数中选出 $m$ 个不同数的组合方法数。

$P_n^m$：从 $n$ 个不同数中选出 $m$ 个不同数的排列方法数。

## 2 链路可靠概率模型下的可靠性分析

### 2.1 基于 PIE 的可靠性分析

在 star 网络的可靠性分析中，一个基本的方法就是 PIE 方法。该方法是在概率模型的基础上，将所有可能的至少有一个 $n-1$ 维子网可靠的情况区别开来，以得到以相互不相交的子项为基础的多项式，从而计算出 n-star 网络的可靠性 $RBEP_{n,n-1}(p)$。在这里，以链路可靠概率模型为基础，给出了下面的基于 PIE 的 $RBEP_{n,n-1}(p)$ 计算式：

$$RBEP_{n,n-1}(p)=\sum_{i=1}^{n(n-1)}C_i+(-1)\sum_{i,j=1,2,\cdots,n(n-1)}^{i\neq j}C_iC_j+(-1)^2\sum_{i,j,k=1,2,\cdots,n(n-1)}^{i\neq j\neq k}C_iC_jC_k+(-1)^3\sum_{i,j,k,l=1,2,\cdots,n(n-1)}^{i\neq j\neq k\neq l}C_iC_jC_kC_l+\cdots+(-1)^{n(n-1)-1}\prod_{i=1}^{n(n-1)}C_i \qquad (1)$$

$C_i$ 表示 $n-1$ 维子网的可靠性，它用该子网中所有链路的联合可靠概率来表示。多个 $C_i$ 表示多个不同 $n-1$ 维子网的联合可靠性，它用这些子网中所有不同链路的联合可靠概率来表示。在式(1)的各个项中，多个不同的 $n-1$ 维子网可能有多种不同的链路相交情况，这种不同的链路相交情况对于计算该项的联合可靠性是有影响的，因此有必要做一些分析。

**定理 1** n-star($n\geqslant4$)网络中，没有共同链路的两个不同 $n-1$ 维子网的组合方法数为 $C_n^2C_{n-1}^1+C_n^1C_{n-1}^2$，此种情况下这两个不同的 $n-1$ 维子网中的不同链路总数为 $(n-1)!\,(n-2)$。

证明：在 n-star 网络中，链路看作是两个节点的组合，因此两个不同 $n-1$ 维子网没有共同链路，也就是没有共同节点或只有一个共同节点。这里因为 $n\geqslant4$，所以后一种情况不存在。那么由 n-star 网络中没有共同节点的两个不同 $n-1$ 维子网的组合方法数为 $C_n^2C_{n-1}^1+C_n^1C_{n-1}^2$ 的已知结论[4]，可以得到没有共同链路的两个不同 n－1 维子网的组合方法数也为 $C_n^2C_{n-1}^1+C_n^1C_{n-1}^2$。显然，此时两个不同的 $n-1$ 维子网中的不同链路总数为各子网中的链路个数之和，即 $(n-1)!\,(n-2)/2+(n-1)!\,(n-2)/2=(n-1)!\,(n-2)$。

**定理 2** n-star($n\geqslant4$)网络中，有共同链路的两个不同 $n-1$维子网的组合方法数为 $C_n^2C_{n-1}^2P_2^2$，此种情况下这两个不同的 $n-1$ 维子网中的不同链路总数为 $(n-1)!\,(n-2)-(n-2)!\,(n-3)/2$。

证明：n-star($n\geqslant4$)网络中总共有 $n(n-1)$ 个不同的 $n-1$ 维子网，从其中拿出两个的组合方法数为 $C_{n(n-1)}^2$。这两个不同的 $n-1$ 维子网要么有共同链路，要么没有共同链路，因此在定理 1 结果的基础上，可以得到有共同链路的两个不同 $n-1$维子网的组合方法数为 $C_{n(n-1)}^2-C_n^2C_{n-1}^1-C_n^1C_{n-1}^2=C_n^2C_{n-1}^2P_2^2$。此时，这两个不同 $n-1$ 维子网的共同节点组成了一个 $n-2$ 维子网[4]。该子网中的所有链路即为它们的共同链路，且有共同链路个数 $(n-2)!\,(n-3)/2$，因此此时两个不同的 $n-1$ 维子网中的不同链路总数为各子网中的链路个数之和－它们的共同链路数，即 $(n-1)!\,(n-2)-(n-2)!\,(n-3)/2$。

**定理 3** n-star($n\geqslant4$)网络中，彼此均没有共同链路的 3 个不同 $n-1$ 维子网的组合方法数为 $(2n-4)C_n^3$，此种情况下这 3 个不同的 $n-1$ 维子网中的不同链路总数为 $(n-1)!\,(n-2)3/2$。

证明：先从 $n(n-1)$ 个 $n-1$ 维子网中拿出两个没有共同链路的子网，这两个子网的组合包括两种情况：相同的常数值、不同的常数位，不同的常数值、相同的常数位。两种情况下的组合方法依次为 $C_n^2C_{n-1}^1$，$C_n^1C_{n-1}^2$。分别考虑这两种情况下的每个方法，得到与前两个子网均没有共同链路的第 3 个子网的组合方法数分别为 $C_{n-2}^1$，$C_{n-3}^1$。因为同样的组合结果在用先二后一方法选择出来的时候组合数重复记了 3 次，这样计算出满足该定理条件的组合方法数为 $(C_n^2C_{n-1}^1\times C_{n-2}^1+C_n^1C_{n-1}^2\times C_{n-3}^1)/3=(2n-4)C_n^3$。显然此时 3 个不同的 $n-1$ 维子网中的不同链路总数为各子网中的链路个数之和，即 $(n-1)!\,(n-2)/2+(n-1)!(n-2)/2+(n-1)!\,(n-2)/2=(n-1)!\,(n-2)3/2$。

**定理 4** n-star($n\geqslant4$)网络中，有共同链路的 3 个不同 $n-1$ 维子网的组合方法数为 $3!\,C_n^3C_{n-1}^3$，此种情况下这 3 个不同的 $n-1$ 维子网中的不同链路总数为 $(n-3)!\,(3n^3-18n^2+40n-34)/2$。

证明：先从 $n(n-1)$ 个 $n-1$ 维子网中拿出两个有共同链路的子网，其组合方法数为 $C_n^2C_{n-1}^2P_2^2$，再选出第 3 个与前两个子网均有共同链路的不同子网，显然有 $C_{n-2}^1C_{n-3}^1$ 个选择，因为同样的组合结果在用先二后一方法选择出来的时候组合数重复记了 3 次，这样计算出满足该定理条件的组合方法数为

$(C_n^2C_{n-1}^2P_2^2\times C_{n-2}^1C_{n-3}^1)/3=3!\ C_n^3C_{n-1}^3$，此时3个不同的$n-1$维子网中的不同链路总数通过PIE原理是可以计算出来的，如下所示：

各个子网中的链路个数之和$-3\times$两个子网中的共同链路个数$+3$个子网中的共同链路个数，即$(n-1)!\ (n-2)3/2-(n-2)!(n-3)3/2+(n-3)!\ (n-4)/2=(n-3)!\ (3n^3-18n^2+40n-34)/2$。

**定理5** n-star($n\geqslant4$)网络中，仅有两个子网有共同链路，而第3个子网与前两个子网均没有共同链路的3个不同$n-1$维子网的组合方法数为$4C_n^2C_{n-1}^2$，此种情况下这3个不同的$n-1$维子网中的不同链路总数为$(n-2)!\ (3n^2-10n+9)/2$。

证明：先从$n(n-1)$个$n-1$维子网中拿出两个有共同链路的子网，其组合方法数为$C_n^2C_{n-1}^2P_2^2$，再选出第3个与前两个子网均没有共同链路的不同子网，显然对于前面的每一对组合，这里有2个方法去选择第3个子网。因为此时不存在重复记次问题，所以满足该定理条件的组合方法数为$C_n^2C_{n-1}^2P_2^2\times2=4C_n^2C_{n-1}^2$。此时3个不同的$n-1$维子网中的不同链路总数通过下面的计算得到：

各个子网中的链路个数之和$-$两个子网中的共同链路个数即$(n-1)!\ (n-2)3/2-(n-2)!\ (n-3)/2=(n-2)!\ (3n^2-10n+9)/2$。

**定理6** n-star($n\geqslant4$)网络中，有两个子网有共同链路，而第3个子网只与前两个子网中的一个子网有共同链路的3个不同$n-1$维子网的组合方法数为$(4n-10)C_n^2C_{n-1}^2$，此种情况下这3个不同的$n-1$维子网中的不同链路总数为$(n-2)!\ (3n^2-11n+12)/2$。

证明：从$n(n-1)$个$n-1$维子网中拿出3个子网的组合方法总数为$C_{n(n-1)}^3$，而这3个子网的链路交叉情况只有如定理3到定理6所说的这4种[4]。因此结合定理3到定理5中的组合情况，可以知道符合本定理条件的组合方法数应为$C_{n(n-1)}^3-(2n-4)C_n^3-3!\ C_n^3C_{n-1}^3-4C_n^2C_{n-1}^2=(4n-10)C_n^2C_{n-1}^2$。

此时3个不同的$n-1$维子网中的不同链路总数通过下面的计算得到：

各个子网中的链路个数之和$-2\times$两个子网中的共同链路个数，即$(n-1)!\ (n-2)3/2-(n-2)!\ (n-3)2/2=(n-2)!\ (3n^2-11n+12)/2$。

下面分别以3-star和4-star为例来实践一下上述公式和定理。

在3-star网络中，2-star子网的个数为6，每个2-star子网的链路个数为1，而且6个子网彼此均没有共同链路，链路的可靠概率为$p$，则将这些参数代入式(1)得

$$\begin{aligned}RBEP_{3,2}(p)&=C_6^1p-C_6^2p^2+(-1)^2C_6^3p^3+(-1)^3C_6^4p^4+(-1)^4C_6^5p^5+(-1)^5C_6^6p^6\\&=6p-15p^2+20p^3-15p^4+6p^5-p^6\end{aligned}$$

不妨假定链路的可靠性概率$p$为0.95，代入上式，算得$RBEP_{3,2}(0.95)=0.999998$。

在4-star网络中，3-star子网的个数为12，每个3-star子网中的链路个数为6，而3个或更少个子网的链路交叉情况以及每个组合下的不同链路总数又如定理1到定理6所描述，链路的可靠概率为$p$，则将这些参数代入式(1)，可以得到式(1)中前3项的值如下：$12p^6-(30p^{12}+36p^{11})+(16p^{18}+24p^{15}+72p^{17}+108p^{16})$。由于第4项以后各项的和值已经非常小，且遵循前一项的绝对值比后面所有项和的绝对值要大，因此可以得到如下的可靠性约束。

$$RBEP_{4,3}(p)\leqslant12p^6-(30p^{12}+36p^{11})+(16p^{18}+24p^{15}+72p^{17}+108p^{16})$$

在上面的4-star网络示例分析中，显然隐含着一个非常近似地计算网络可靠性的方法。因为在式(1)中，第4项以后各项的和值已经非常小，且遵循前一项的绝对值比后面所有项和的绝对值要大，因此在利用该式计算网络可靠性的时候，我们可以忽略第4项及以后各项的值，从而得到网络可靠性的近似值。如果要求误差非常小，只需多计算几项的值就可以实现。

### 2.2 近似的可靠性分析

n-star网络中有$n(n-1)$个不同的子网，这些子网间可能有相交的情况，但是当沿着某维来划分时，n-star网络中只有$n$个不相交的不同$n-1$维子网，每个子网中的链路个数为$(n-1)!\ (n-2)/2$。现在考虑沿着第$i$维来划分网络时，网络可靠性$RBEP_{n,n-1}(p,i)$的值。对于给定的$n-1$维子网，用该子网中所有链路的联合可靠概率来表示该子网的可靠性，则对于第$i$维划分下的每个$n-1$维子网的可靠性概率为$p^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)!}$，这样可以得到每个$n-1$维子网的不可靠概率为$1-p^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)!}$，那么沿着第$i$维划分下的$n$个不同$n-1$维子网同时不可靠的概率为$(1-p^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)!})^n$，这样就得到沿着第$i$维划分下的$n$个不同的$n-1$维子网中至少存在一个正确$n-1$维子网的如下可靠性概率：

$$RBEP_{n,n-1}(p,i)=1-(1-p^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)!})^n \tag{2}$$

由于我们的可靠性分析是从链路可靠概率模型出发，而沿着不同的维划分网络时，同样数量的可靠链路组成的子网以及子网数是不一样的，因此上述可靠性概率并不能准确反映网络的可靠性。为此，我们再次应用PIE原理，对沿着多维划分下的网络的可靠性进行整体考虑，以得到更加准确的值。于是有下面的计算$RBEP_{n,n-1}(p)$的公式：

$$\begin{aligned}RBEP_{n,n-1}(p)=&\sum_{i=2}^{n}RBEP_{n,n-1}(p,i)+(-1)\sum_{i,j=2,3,\cdots,n}^{i\neq j}RBEP_{n,n-1}(p,i)RBEP_{n,n-1}(p,j)+\\&(-1)^2\sum_{i,j,k=2,3,\cdots,n}^{i\neq j\neq k}RBEP_{n,n-1}(p,i)RBEP_{n,n-1}(p,j)RBEP_{n,n-1}(p,k)+\cdots+\\&(-1)^{n-2}\prod_{i=2}^{n}RBEP_{n,n-1}(p,i)\end{aligned} \tag{3}$$

对于式(3)中各项，如果充分考虑了各维划分之间的子网链路相交情况，那么是可以计算出$RBEP_{n,n-1}(p)$的准确值的。但是，显然各维划分之间的子网链路相交情况是非常复杂的。为快速评估网络的可靠性，我们忽略沿着不同维划分下的网络可靠性的相关性，利用式(2)、式(3)，可以得到$RBEP_{n,n-1}(p)$的如下近似值：

$$\begin{aligned}RBEP_{n,n-1}(p)\approx&C_{n-1}^1RBEP_{n,n-1}(p,i)+(-1)C_{n-1}^2(RBEP_{n,n-1}(p,i))^2+(-1)^2C_{n-1}^3\\&(RBEP_{n,n-1}(p,i))^3+\cdots+(-1)^{n-2}C_{n-1}^{n-1}(RBEP_{n,n-1}(p,i))^{n-1}\end{aligned} \tag{4}$$

以4-star为例，利用式(4)来分析它的可靠性，则有下面的分析过程：

第一步　$RBEP_{4,3}(p,i)=1-(1-p^6)^4$

第二步　$RBEP_{4,3}(p)\approx C_3^1 RBEP_{4,3}(p,i)+(-1)C_3^2(RBEP_{4,3}(p,i))^2+(-1)^2C_3^3(RBEP_{4,3}(p,i))^3=3RBEP_{4,3}(p,i)-3(RBEP_{4,3}(p,i))^2+(RBEP_{4,3}(p,i))^3$

不妨假定链路的可靠性概率 $p$ 为 0.95，经过第一步和第二步可以计算出 $RBEP_{4,3}(0.95)\approx 0.999999875$。

## 3　链路可靠概率模型下的非 PIE 可靠性分析

基于 PIE 的可靠性分析方法需要考虑子网与子网、维与维间的可靠相关性，所以显得有点复杂。因此在 n-star 网络的可靠性分析中，可以从另一个角度来考虑。n-star 网络在不同数量的失效链路下的可靠性是不一样的。同样地，同样数量的失效链路在不同的分布情况下对网络可靠性的影响也是不一样的[10]。在分析网络的可靠性时必须考虑到上面的两种情况，这样才能更准确地评估网络的可靠性。为此，我们提出如下计算网络可靠性的非 PIE 方法。

$$RBEP_{n,n-1}(p)=\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}n!(n-1)} N_n^i p^{\frac{1}{2}n!(n-1)-i}(1-p)^i \qquad (5)$$

式中，$N_n^i$ 表示 n-star 网络中有 $i$ 个链路失效而网络中仍然存在非失效 $n-1$ 维子网的方法数，$p$ 为链路的可靠性概率。下面解释式(5)的由来：n-star 网络中链路的个数为 $n!(n-1)/2$，这样 n-star 网络中 $i$ 个链路失效而其余链路均不失效的概率为 $p^{\frac{1}{2}n!(n-1)-i}(1-p)^i$。网络中 $i$ 个链路失效而其余链路不失效的方法有很多，每种方法下网络中要么有非失效 $n-1$ 维子网，要么没有非失效 $n-1$ 维子网。因此网络中有可能存在 $i$ 个链路失效而网络中仍然存在非失效 $n-1$ 维子网的方法，这种方法的概率即为 $p^{\frac{1}{2}n!(n-1)-i}(1-p)^i$。用 $N_n^i$ 表示 n-star 网络中有 $i$ 个链路失效而网络中仍然存在非失效 $n-1$ 维子网的方法数，那么可以求得 $i$ 个链路失效情况下的网络可靠性概率为 $N_n^i p^{\frac{1}{2}n!(n-1)-i}(1-p)^i$。再根据概率论的求和原则[17]，可以求得 n-star 网络的 $RBEP_{n,n-1}(p)$ 值，如式(5)所示。在式(5)中，$N_n^i$ 的计算虽然繁琐，但是有规律可循，因此可以编程实现。下面给出一个计算 $N_n^i$ 的算法。

第一步　根据组合原理[17]，穷举出 $i$ 个链路失效的所有可能的方法，方法数应该为 $C_{\frac{1}{2}n!(n-1)}^i$；

第二步　对于每个可能的 $i$ 个链路失效的方法，按照如下次序对 n-star 网络进行一个三层循环的扫描；

```
//依次对不同维划分下的子网进行扫描
for(int i=2;i≤n;i++)
{ //对第 i 维划分下的每个子网进行链路扫描
  for(int j=1;j≤n;j++)
  { //对当前子网下的每个链路进行检测
    int m=0;//当前子网中未失效链路的个数
    for(int k=1;k≤n! (n-1)/2;k++)
    {
      if(当前链路失效)
      {
        跳出对当前子网的链路扫描;
      }
      m++;
    }
    if(m== n! (n-1)/2)
    {
      将当前方法下是否存在未失效子网的标志设定为是;
      结束对整个网络的扫描;
    }
  }
}
```

第三步　统计标志为是的方法个数 $N_n^i$。

下面以 3-star 网络为例，利用上面的非 PIE 分析方法分析网络的可靠性。因为 3-star 网络中链路的个数只有 6 个，而且每个链路在不同的维划分下就是一个 2-star 子网，所以可以很快得到 $N_3^0=1,N_3^1=6,N_3^2=15,N_3^3=20,N_3^4=15,N_3^5=6,N_3^6=0$。这样由式(5)得到

$$RBEP_{3,2}(p)=p^6+6p^5(1-p)+15p^4(1-p)^2+20p^3(1-p)^3+15p^2(1-p)^4+6p(1-p)^5$$

不妨假定链路的可靠性概率 $p$ 为 0.95，代入上式，算得 $RBEP_{3,2}(0.95)=0.9999998$。

## 4　实验结果与分析

为大规模处理器系统布局好网络后，如果不应用大规模集成电路技术对链路可靠性进行控制，那么链路的可靠概率值应该是一个在(0,1)之间服从均匀分布的随机值。为了满足大规模处理器系统的高可靠性要求，在实际应用中，必须将集成电路技术应用到所选择的互连网络拓扑结构中，以便将链路的可靠概率值控制在一个较高的范围内，这样在控制下的链路不可靠概率值应是一个在(0,1)内服从均值为 $u$ 的指数分布的随机值。在本试验中，我们在 java 集成开发平台 eclipse 环境下通过对产生指数分布随机值的对数算法进行编程实现，以得到所需要的链路可靠概率 $p$ 的测试数据，如表 1 所列。并将这些数据分别用于 3 种可靠性模型的实现中，可以得到如表 2 所列的 3 种可靠性模型下的 5-star 网络的可靠性。从表 2 的可靠性数据以及前面各模型提出时的低维(3 维或 4 维)star 网络的可靠性数据可以知道以下几点：随着 star 网络规模的不断扩大，star 网络的可靠性不断降低；在现代大规模集成电路技术条件下，链路的可靠性是完全可以控制在 0.98 以上的，因此 star 网络的可靠性完全可以控制在 0.99 以上；网络可靠性也随着链路可靠性的降低而降低，而且用可靠性模型(4)或可靠性模型(5)来分析网络可靠性时，网络可靠性随链路可靠性的降低而变化非常大，如果链路的可靠性没有被控制在较高的范围内，那么这两种可靠性模型是不可用的。因此总的来说，可靠性模型(1)更加理想。

表 1　链路不可靠概率期望值为 0.05 时的测试数据

| u | 1-p 随机值 | p 随机值 |
|---|---|---|
| 0.05 | 0.018219997 | 0.981780003 |
| | 0.0137721285 | 0.9862278715 |
| | 0.017314078 | 0.982685922 |
| | 0.0180652635 | 0.9819347365 |
| | 0.062977665 | 0.937022335 |
| | 0.12974142 | 0.87025858 |
| | 0.01614136 | 0.98385864 |
| | 0.04376316 | 0.95623684 |
| | 0.08477546 | 0.91522454 |
| | 0.104937565 | 0.895062435 |

表 2　3 种可靠性模型下的 5-star 网络可靠性比较

| p | 可靠性模型(1) | 可靠性模型(4) | 可靠性模型(5) |
|---|---|---|---|
| 0.981780003 | 0.99999926 | 0.9999983 | 0.967826 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.9862278715 | 0.9999999 | 0.9999999 | 0.981265 |
| 0.982685922 | 0.9999994 | 0.9999989 | 0.969582 |
| 0.9819347365 | 0.99999927 | 0.9999984 | 0.967827 |
| 0.937022335 | 0.9999274 | 0.8676196 | 0.848099 |
| 0.87025858 | 0.9874608 | 0.1260035 | 0.688672 |
| 0.95623684 | 0.9999976 | 0.9883812 | 0.895895 |
| 0.98385864 | 0.9999996 | 0.9999991 | 0.971562 |
| 0.91522454 | 0.9989264 | 0.5690013 | 0.786836 |
| 0.895062435 | 0.9916853 | 0.3113853 | 0.745813 |

**结束语** 本文主要基于 PIE 和非 PIE 的分析方法对 star 网络在链路可靠概率模型基础上的可靠性进行了分析，得到了相应的可靠性模型。实验结果表明，star 网络的可靠性随着网络规模的不断扩大而逐渐降低，同时在网络规模不变的情况下，网络的可靠性也会随着网络中链路可靠性的降低而下降。在现有大规模集成电路技术下，通过对链路可靠概率的控制，完全可以将 star 网络的可靠性控制在一个较大的范围内。但是随着时间的推移，网络中的诸多其它因素，例如网络负载越来越大、拥塞情况越来越严重、结点故障也极有可能伴随着链路故障的出现而出现等，也会对网络的可靠性造成影响，进而降低网络的可靠性。这对我们今后进一步的研究工作提出了更高的要求。

## 参考文献


[1] Wu R-Y, Chang J G, Chen G-H. Node-disjoint paths in hierarchical hypercube networks[C]// 20th International Parallel and Distributed Processing Symposium. April 2006: 1-5

[2] Dally W, Towles B. Principles and Practices of Interconnection Networks[M]. San Francisco: Morgan Kaufmann Press, 2004

[3] Grama A, Gupta A, Karypis G, et al. Introduction to Parallel Computing(Second Edition)[M]. Addison-Wesley Press, 2003

[4] Wu Xiaolong, Latifi S. Substar Reliability Analysis in Star Networks[J]. Information Sciences, 2008, 178(10): 2337-2348

[5] Latifi S. A study of fault tolerance in star graph[J]. Information Processing Letters, 2007, 102(5): 196-200

[6] Day K, Trapathi A. A comparative study of topological properties of hypercubes and star graphs[J]. IEEE Trans. Parallel Distributed Systems, 1994, 5(1): 31-38

[7] Akers S B, Krishnamurthy B. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks[J]. IEEE Trans. Computer, 1989, 38(4): 555-566

[8] Akers S B, Horel D, Krishnamurthy B. The star network: an attractive alternative to the n-cube[C]// Proc. the International Conference on Parallel Processing. 1987: 393-400

[9] Wu X L, Latifi S, Jiang Y. A combinatorial analysis of distance reliability in star network[C]// Proc. the 21st IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium(IPDPS). March 2007: 1-6

[10] Latifi S, Saberinia E, Wu Xialong. Robustness of star graph network under link failure[J]. Information Sciences, 2008, 178(3): 802-806

[11] Zheng Jun, Latifi S, Regentova E, et al. Diagnosability of star graphs under the comparison diagnosis model[J]. Information Processing Letters, 2005, 93(1): 29-36

[12] Wu X L, Latifi S, Jiang Y. Markov reliability model of star network[C]// Proc. the 2007 International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications. June 2007

[13] Xu Min, Hu Xiao-dong, Zhu Qiang. Edge-bipancyclicity of star graphs under edge-fault tolerant [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 183(2): 972-979

[14] Li T K, Tan J M, Hsu L. Hyper Hamiltonian laceablility on edge fault star graph[J]. Information Sciences, 2004, 165(1): 59-71

[15] Li Tseng-kuei. Cycle embedding in star graphs with edge faults [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 167(2): 891-900

[16] Billinton R, Allan R. Reliability Evaluation of Engineering Systems(Second Edition)[M]. Plenum Press, 1992

[17] 盛骤，谢式千，潘承毅. 概率论与数理统计(第三版)[M]. 北京：高等教育出版社，2001


(上接第 93 页)

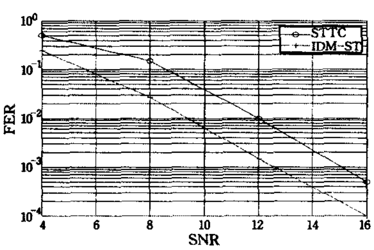


图 4 IDM-ST 系统与 STTC 的比较

由上面仿真结果可见，在采用了优化功率比的情况下，IDM-ST 在 MISO-OFDM 系统中的性能要优于 STTC，而且在增加发射天线数量时对性能提高的影响在高信噪比区域更加明显。综上所述，在 MISO-OFDM 系统里，IDM-ST 充分显示了它相对于传统空时码的优势，包括在数据率和发射天线数量上的灵活性，以及性能上的优越性。

## 参考文献


[1] Wu K Y, Leung W K, Li Ping. A simple approach to near-optimal multiple transmit antenna space-time codes[C]// Proc. IEEE ICC03. Alaska, USA, May 2003: 2603-2607

[2] Wu K Y, Leung W K, Li Ping. Interleave division multiplexing space-time codes[C]// IEEE 2003 International Symposium on Information Theory, ISIT'03. 2003: 354

[3] Wu Keying, Li Ping, Yuan Jinhong. A quasi-random approach to space-time codes[C]// Proc. Int. Symp. Turbo Codes & Related Topics. Munich, Germany, April 2006

[4] Li Ping, Wu K Y, Leung W K. High-rate interleave-division - multiplexing pace-time codes[C]// Proc. IEEE VTC04 Fall

[5] Wu Keying, Li Ping. A quasi-random approach to space-time codes[J]. IEEE Trans Inform. Theory, 2008, 54(3): 1073-1085

[6] Goldsmith, Andrea. 无线通信(2007 年版)[M]. 北京：人民邮电出版社