对博弈解概念认知和理性条件的逻辑分析

蒋军利 唐晓嘉

(西南大学逻辑与智能研究中心 重庆 400715)

摘 要 在博弈求解中参与者被假定为理性的,即总是追求其最大期望效用。但这一理性假设在博弈论中没有一个很清晰的形式定义,通常是把主体间对理性的相互认识假设为公共知识(common knowledge),然而这样的做法具体到某个博弈,尤其是有限博弈,就会显得粗糙,所涉及的嵌套问题也为系统复杂度的计算造成困难。其实,在一个具体的有限博弈G中,只需要有限次的嵌套。基于此形式化地分析了某些算法所要求的具体的认知和理性条件,提出了一种满足强理性条件的博弈求解可行算法。另外,通过在公开宣告逻辑中不断地宣告各种强度的理性概念,同样可以得到相应博弈算法求解的结果。

关键词 理性,算法,共知识,公开宣告

Logic Study of Epistemic and Rational Conditions of Some Game-theoretic Solutions

JIANG Jun-li TANG Xiao-jia

(Institute of Logic and Intelligence, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract In the process of seeking for game-theoretic solutions, players are supposed to be rational which means that they all tend to maximize their expected payoffs. However, there is no a definitely definition of rationality in the game theory and the usual assumption of mutual knowledge of individual rationality to be common knowledge is coarse and maybe too strong, especially when the game is finite, in fact, the nested degree of interactive knowledge of individual rationality has a maximal value that we will show. In this paper we formalized the special rationality conditions for each solution algorithm that we modified for the sake of program. One the other hand, we proposed an algorithm-solution in correspondence with strong rationality. Moreover, we showed that iterated announcement of the rationality we defined could arrive exactly at the algorithm-solution, correspondingly.

Keywords Rationality, Algorithm, Common knowledge, Public announcement

1 概述

从某种意义上说,博弈解是对所有参与者而言最优的策略组合集。通常我们通过一些递归算法来求解,例如,策略博弈(strategic games)中的重复删除严格劣策略算法(IDSDS)和扩展博弈(extensive games)中的向后归纳算法(Backward Induction)。我们仅就有限博弈展开讨论,为简单起见,文中均以二人有限博弈为例,分析的结果很容易扩展到多人博弈的情形。这里所谓的有限博弈是指有限参与者集的策略集合是有限的。

采用文献[9]的做法,将博弈求解算法看作是参与者不断更新认识的过程,这一过程使得认知模型不断地变化,不断接近博弈解区域,最终达到博弈解均衡。那么是什么促使认知模型的不断更新并最终达到博弈解均衡的呢?这就是主体的认知和理性条件。例如,在策略博弈中运用IDSDS算法找占优解,首先需要假设所有的参与者有弱理性 weak rationality(不同学者对弱理性和强理性的定义可能有所差别,在本文中采用文献[9]中对弱理性和强理性的定义)。参与者关于彼此对这一弱理性的认识程度通常被假设为公共知识,然而这一做法过于粗糙,它所涉及的无限嵌套问题也为系统复杂度的计算造成困难。其实,在一个具体的有限博弈中只需要有限次的嵌套。很多学者对这一问题做了不同程度的研究[2,4],但并没有对有限次的嵌套进行具体限制。本文试图对各种博弈求解算法背后的认知和理性条件进行分析,从而证明:对一个具体的有限博弈G,其最多需要嵌套的次数是$(\sum_{i\in N}|S_i|-|N|)$次。例如在每个参与者都有两个策略的两人博弈中,参与者关于彼此对理性的认识最多只需要嵌套一次,即每个人是理性的并且每个都知道每个人是理性的。

文献[9]通过对弱理性的形式定义推出关于强理性的定义。然而,在博弈论算法中还没有和这一理性对应的能行算法。文中首先给出相对被占优(relatively dominated,简称RD)策略的定义,然后用递归的方法给出了一个能行算法。这一算法所采用的思想来源于其他文献中的经典博弈算法思想,但是文中对所提出的算法做了一些技术上的处理。进行这一处理的目的主要是为计算机编程做准备,使其在计算机程序语言中成为能行算法。在公开宣告逻辑中通过重复宣告

到稿日期:2009-12-24 返修日期:2010-02-07 本文受国家社科基金青年项目(项目编号:09CZX033)资助。

蒋军利 博士生,主要研究方向为现代逻辑和人工智能,E-mail:walkjun@sina.com;唐晓嘉 博士生导师,E-mail:tangxj@swu.edu.cn(通讯作者)。

相关命题也同样可以找到博弈解，这和博弈求解算法有异曲同工之妙。这里需要说明的是所提到的这种促使认识不断更新的“交流”（或宣告）只是发生在每个参与者头脑里的“对话”中，并不是真实发生的实际交流。我们所模拟的是在参与者采取行动之前，在其意识的“反应时间”里的认识变化。那么是什么保证了这种通过内心的交流式思考便能找到博弈解的呢？通过文中的分析将看到对认知和理性条件的合理假设是这种认知不断更新的保证。

总的说来，本文针对不同算法给出了理性的形式定义并探讨了博弈求解算法和公开宣告相关命题的对应关系。本文第2节给出公开宣告逻辑的语言和语义，并将看到如何通过宣告行为消除某些世界从而更新认知模型；第3节给出认知博弈模型和博弈求解算法；第4节给出不同强度的理性定义并比较博弈求解算法和重复宣告理性；最后是一些结论和讨论。

2 公开宣告逻辑

公开宣告逻辑（Public Announcement Logic）的形式语言是通过给标准认知逻辑语言添加一个模态（宣告）算子$[P!]\phi$（公开宣告P之后，公式ϕ成立）得到的。它的公式由以下定义递归得到：

$\phi ::= p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \varphi \mid K_i\phi \mid C_G\phi \mid [P!]\phi$

对认知公式的解释和通常一样。$K_i\phi$可解释为“主体i知道ϕ”，$C_G\phi$的意思是“ϕ是群体G的公共知识”。也即，“群体G中的每个成员都知道ϕ，每个成员都知道每个成员知道ϕ，如此以至无穷”。如果用$K_e\phi$表示“群体G的每个成员都知道ϕ”，$K_e^m\phi = K_e K_e^{m-1}\phi$表示“群体$G$的每个成员都知道$K_e^{m-1}\phi$”，那么$C_G\phi = K_e\phi \wedge \cdots \wedge K_e^m\phi \wedge \cdots$。用$\langle j\rangle\phi$表示$K_i\phi$的对偶算子。运用这一语言可以表达这样一类命题，如$K_i[P!]\phi$：主体$i$知道诚实地宣告$P$之后，$\phi$成立。

采用多主体的$S5$模型M，其中主体的认知可达关系是满足自反传递对称的等价关系；用(M,w)表示当前世界是w的模型，主要的语义解释如下：

$M,w \vDash K_i\phi$ iff 对所有v如果$w \sim_i v$，那么$M,v \vDash \phi$

$M,w \vDash C_G\phi$ iff 对所有v，如果从w通过任意有限步的$\sim_i$序列（任意的$i \in G$）可达v，那么$M,v \vDash \phi$

$M,w \vDash [P!]\phi$ iff 如果$M,w \vDash P$，那么$M|_P, w \vDash \phi$

其中，$M|_P$表示模型M在P为真的世界上的限制。公开宣告逻辑完全可以由标准认知逻辑的公理和以下5组等式公理化：

$[P!]q \leftrightarrow P \rightarrow q$ for atomic q

$[P!]\neg\phi \leftrightarrow P \rightarrow \neg[P!]\phi$

$[P!]\phi \wedge \psi \leftrightarrow [P!]\phi \wedge [P!]\psi$

$[P!]K_i\phi \leftrightarrow P \rightarrow K_i[P!]\phi$

$[P!]\, C_G(\phi,\psi) \leftrightarrow C_G(P \wedge [P!]\phi, [P!]\psi)$

通过一个简单的例子来分析公开宣告逻辑是如何通过宣告行为消除某些世界从而更新认知模型的。例如，一个外地人A来到重庆想要去西南大学，在天生路上询问交警同志B：“这是去西南大学的路吗？”交警同志回答说：“是的”。事实上天生路确实是去西南大学的路。用P表示命题“这是去西南大学的路”，把B的回答看作是公开宣告P（$[!P]$）。用逻辑模型语言刻画这一场景：在B公开宣告P之前，A的认知模型为：

●——○

其中，黑点代表P为真的现实世界，白点代表$\neg P$为真的世界。连接两个世界的黑线代表A的认知可达关系$\sim_A$，即对于A来说它们是认知不可区分的，他认为P和$\neg P$都有可能，所以对于A来说它们是等价关系。B真实地宣告了P之后，A的认知模型变为：

●

也就是说，公开宣告P之后，A把那些P为假的世界删除了。认知模型缩小，变成了单点集上的模型。这之后，B对P进行任何次的宣告都不会引起A认知模型的改变。一般地，有如下定义。

定义1（宣告极限$\#(\phi,M)$，announcement limit） 对任意的模型M和公式ϕ，宣告极限$\#(\phi,M)$是在重复宣告过程中第一个宣告ϕ没有效果（即不再引起模型变化）的子模型。

给定任一公开宣告语言的真公式ϕ，在模型M中重复宣告ϕ，最终的模型里只剩下ϕ为真的那些世界。在这一不断宣告的过程中，产生一系列可能世界集不断减小的子模型，直到模型不再有变化。在后面的讨论中会看到展示这一认知模型不断更新的具体例子。

3 认知模型和程序算法（epistemic game models and procedures）

在本小节中，为了尽可能简单地说明一些一般思想，把精力主要集中在对策略博弈的讨论上。从动态认知的角度把博弈求解的过程看成是认知模型的不断更新。之所以能够这样分析是因为对认知和理性的合理假设，这些假设保证了这类思想上的无语“交流”的进行。下面首先给出一些基本概念以便进一步分析。

定义2[①] 一个有限策略博弈是五元组$G=(N,\{S_i\}_{i\in N},O,\{\geqslant_i\}_{i\in N},z)$，其中

$N=\{1,2,\cdots,n\}$是参与者集（a set of players）；

S_i是参与者i（$i\in N$）的有限策略集（a finite set of strategies of player $i\in N$）；

O是结果的有限集（a finite set of outcomes）；

$\geqslant_i$是参与者i对结果的偏好[②]（player i's preference of outcomes）；

函数$z: S\rightarrow O$（其中$S=S_1\times\cdots\times S_n$）给每个策略组合$s=(s_1\times\cdots\times s_n)$指派一个结果$z(s)\in O$。

定义3（严格被占优策略和相对被占优策略，SD&RD） 给定一博弈$G=(N,\{S_i\}_{i\in N},O,\{\geqslant_i\}_{i\in N},z)$和策略$s_i\in S_i$，我们说$s_i$是参与者$i$在博弈$G$中的严格被占优策略（strictly dominated，简记为SD），如果存在一个策略$t_i\in S_i$，使得对于所有的s_{-i}[③]$\in S_{-i}$，与采用策略s_i所带来的结果相比，参与者

①该定义采用文献[6]中的形式。

②也就是说，$\geqslant_i$是O上的一个二元关系并满足全关系性和传递性。对于o，$o'\in O$，对$o\geqslant_i o'$的解释是，对于参与者i，结果o至少和结果o'一样好。严格序关系$>_i$的定义和通常一样。对$o>_i o'$的解释是，与结果o'相比，参与者i严格偏好于结果o。

i 严格偏好采用策略 t_i 产生的结果。也就是说，如果存在 $t_i \in S_i$，对所有的 $s_{-i} \in S_{-i}$，$z(t_i, s_{-i}) >_i z(s_i, s_{-i})$。我们说 $s_i(s_i \in S_i)$ 是参与者 i 在博弈 G 中的相对被占优策略（relatively dominated，简记为 RD），如果对于所有的 $s_{-i} \in S_{-i}$，存在一个策略 $t_i \in S_i$ 并且 $t_i \neq s_i$，与采用策略 s_i 所带来的结果相比，参与者 i 严格偏好于策略 t_i 产生的结果。也即是说，如果对所有的 $s_{-i} \in S_{-i}$，存在 $t_i \in S_i$ 并且 $t_i \neq s_i$，$z(t_i, s_{-i}) >_i z(s_i, s_{-i})$。

由以上定义可以看出，如果一个策略是严格被占优策略，那么它一定是相对被占优策略，反之则不然。

定义 4（IDRDS 算法） 重复删除相对被占优策略（the iterated deletion of relatively dominated strategies）算法的步骤如下：给定一博弈 $G=(N, \{S_i\}_{i\in N}, O, \{\geqslant_i\}_{i\in N}, z)$，令 $G=G^0, G^1, \cdots, G^m, \cdots, G^T$，是博弈 G 的一序列子博弈（其中，$T=\sum_{i\in N}|S_i|-N$）[4]，其递归定义如下：

对所有的 $i \in N$，

1. 令 $S_i^0 = S_i$ 且令 $RD_i^0 \subseteq S_i^0$ 是参与者 i 在博弈 $G^0=G$ 中的相对被占优策略组成的集合；

2. 对于所有的 $m(1 \leqslant m \leqslant T(T=\sum_{i\in N}|S_i|-|N|))$，令 $S_i^m = S_i^{m-1} \setminus RD_i^{m-1}$ 且令 G^m 是 G 的子博弈其策略集是 $\{S_i^m\}_{i\in N}$；令 $RD_i^m \subseteq S_i^m$ 是参与者 i 在博弈 G^m 中的相对被占优策略组成的集合。

令 $S_i^\infty = \bigcap_m S_i^m (0 \leqslant m \leqslant (\sum_{i\in N} S_i| - |N|))$ 且令 G^∞[5] 是 G 的子博弈，其策略集是 $\{S_i^\infty\}_{i\in N}$。令 $S^\infty = S_1^\infty \times \cdots \times S_n^\infty$。

事实上，如果把定义 3 中 RD 每次出现用 SD 替换，就得到了重复删除严格劣策略算法。下面给出这一算法在计算机中执行的过程描述。

图 1[6] 是 IDRDS 算法的执行过程。

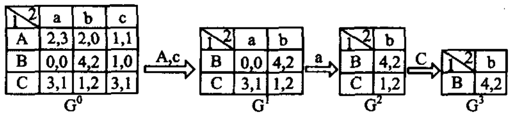


图 1　IDRDS 程序算法执行过程示意图

$S_1^0=\{A,B,C\}, S_2^0=\{a,b,c\}, RD_1^0=\{A\}, RD_2^0=\{c\}$

$S_1^1=\{B,C\}, S_2^1=\{a,b\}, RD_1^1=\emptyset$, $RD_2^1=\{a\}$

$S_1^2=\{B,C\}, S_2^\infty=S_2^2=\{b\}, RD_1^2=\{C\}, RD_2^2=\emptyset$

$S_1^\infty=S_1^3=\{B\}$

因此 $S^\infty=\{(B,b)\}$。策略组合 (B,b) 便是我们的博弈解，参与者 1 和参与者 2 得到的支付分别是 4 和 2。

根据定义 2 和定义 3，可以通过 IDRDS 算法很快地找出一些博弈的解，并且有些解是运用 IDSDS 算法找不到的。对图 1 的博弈 G 运用 IDSDS 算法经过 4 次运算后得到的子博弈始终都是 G 本身。为什么这两个程序算法最终的子博弈是不同的呢？事实上，这是因为这两种算法假设了两种不同强度的个体理性，它们一个是弱理性一个是强理性。目前还没有明确规定说一个参与者是理性的是什么意思，稍后再继续讨论这一问题。

图 2 是对 IDSDS 算法的展示。

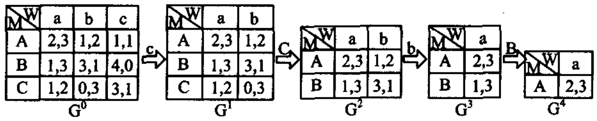


图 2　IDSDS 程序算法执行过程示意图

可以把这一算法的每一步看成参与者认知状态不断更新的过程或者说是知识不断增加的过程。

(1)从博弈 G 到其子博弈 G^1：参与者 W 是理性的，故 W 将删除 c；

(2)从博弈 G^1 到其子博弈 G^2：参与者 M 是理性的并且 M 知道 W 将删除 c，因为 M 知道 W 是理性的，故 M 将删除 C；

(3)从博弈 G^2 到其子博弈 G^3：参与者 W 知道 M 将删除 C，因为 W 知道 M 是理性的并且知道 M 知道 W 是理性的，故 W 将删除 b；

(4)从博弈 G^3 到其子博弈 G^4：参与者 M 知道 W 将删除 b，因为 M 知道 W 知道 M 是理性的并且知道 M 知道 W 是理性的，故 M 将删除 B。

从以上分析可以看出，在一个具体的有限博弈中，对理性的认识强度并不需要达到成为公共知识或公共信念的程度[7]。在这个例子中参与者关于彼此对理性的认识只需要嵌套 4 次。通常将参与者关于彼此对理性的认识程度假设为公共知识的做法过于粗糙并且也为系统复杂度的计算造成困难。其实，在一个具体的有限博弈中，最多需要嵌套有限次。更具体地说，有以下命题成立。

命题 1 在一个有限博弈 G 中，参与者关于彼此对理性的认识程度最多需要嵌套$(\sum_{i\in N}|S_i|-|N|)$次。

按照命题 1 中的式子计算，图 2 中的博弈 G 是一个两人博弈，其中每个参与者有 3 个策略，关于彼此对理性的认识程度最多需要嵌套$((3+3)-2=4)$次，即 4 次。这和我们对图 2 的分析一致。如果把图 2 中博弈 G 的策略组合(C,c)对应的效用函数值$(3,1)$改为$(0,1)$。参与者关于彼此对理性的认识只需要嵌套 3 次：(1)每个人是理性的，所以 W 删除其策略 c，M 删除其策略 C；(2)每个人知道每个人知道每个人是理性的，W 知道 M 会删除 C，所以 W 删除其策略 b；(3)每个人知道每个人知道每个人是理性的，所以 M 会删除其策略 B。这符合命题 1 的说法。则按照 IDSDS 算法，只需要 3 步就可以得到同样的博弈解。可以验证对于多人有限博弈，命题 1 同样成立。

[3]用 S_{-i} 表示除了参与者 i 之外所有参与者的策略组合，也就是说，$S_{-i}=S_1\times\cdots\times S_{i-1}\times S_{i+1}\times\cdots\times S_n$。有时用$(s_i, s_{-i})$ (where $s_i \in S_i$, $s_{-i} \in S_{-i}$)表示策略组合 $s \in S$。

[4]$T=\sum_{i\in N}|S_i|-|N|$，也就是说，T 的值是一个差值，它由所有策略的数目之和减去参与者的数目得到。用 $|N|$ 表示集合 N 的基数。

[5]由于博弈 G 中的策略是有限的，所以一定存在一个最小的自然数，如 r 使得它的值小于或至多等于$(\sum_{i\in N}|S_i|-|N|)$，例如 $G^\infty=G^r=G^{r+k}$ 对任意 $k\in N$。

[6]在图 1 中用效用函数 $\mu_i: S\to R$ 刻画偏好。它满足以下性质：$\mu_i(s)\geqslant\mu_i(s')$ iff $z(s)\geqslant_i z(s')$（在每个向量组里，第一个向量表示第一个参与者的支付，第二个向量表示第二参与者的支付）。图 2 也同样处理。

[7]Adam Brandenburger Epistemic Game Theory: Complete Information 2007

这也是为什么定义 3 中 m 的最大取值为($\sum_{i\in N}|S_i|-|N|$)的原因，命题 1 正是定义 3 中博弈算法的认知基础。

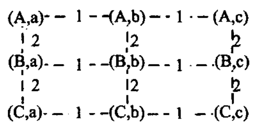
其实也可以从技术的角度考虑为什么在定义 3 中，m 的最小最大值为($\sum_{i\in N}|S_i|-|N|$)。

我们可以非形式地证明如下：假设博弈 G 是可用 IDRDS 算法求得博弈解的，且在子博弈 G^m 中的每次运算对所有参与者的所有策略而言都只有一个策略是 RD。在每次删除一个策略的速度下，经过 $\sum_{i\in N}|S_i|$ 次就可以把所有的策略都删除，但是按照 RD 的定义，至少会有一个策略组合不被删除，而在一个策略组合里每个人都对应一个策略，也即，至少有 $|N|$ 个策略不被删除，所以执行总次数至多为($\sum_{i\in N}|S_i|-|N|$)。

定义 5（全模型） 博弈 G 上的全模型(the full model over G)是多主体-S5 认知结构 $M(G)=(W,\{R_i\}_{i\in N},\{E_i\}_{i\in N})$，其中 W 是非空可能世界集；R_i 是 W 上的等价关系，表示参与者 i 的认知可达关系 $\sim_i$；函数 $E_i:W\to S_i$ 给每个世界赋一个参与者 i 的策略。$E(w)$ 表示在世界 w 上的策略组合。对任意的世界 $w,v\in W$，$E_i(w)=E_i(v)$ 当且仅当 wR_iv。

值得注意的是，以上所定义的模型描述的是所有参与者下定决心要做决定的时刻，在这种情形下参与者知道他们自己要采取哪个策略，而不知道其他参与者决定采取的策略。在本文中，只考虑参与者采取纯策略的情况，不考虑混合策略。

例 1　图 1 中博弈 G 的认知博弈模型：



由认知博弈模型图可以看出，参与者 1 的认知可达关系 $\sim_1$ 是沿行方向而不沿列方向的，因为参与者 1 知道他自己的策略，所以在自己的策略之间没有认知的不确定关系。同理，参与者 2 的认知可达关系 $\sim_2$ 是沿列方向而不沿行方向的，因为参与者 2 只对参与者 1 的要采取的策略有不确定性，而在自己的策略之间没有认知的不确定关系。

博弈求解算法可以把这样的全博弈模型更新成较小的子模型，称全模型的任意一个子模型为一般博弈模型(general game model)。

4　理性和对理性的重复宣告(Rationality and iterated announcement of rationality)

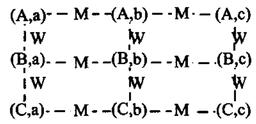
在讨论理性之前，需要更基本的概念来反映参与者的偏好。在一个认知模型 M 中，用 $E(w)$ 表示在世界 w 中要采用的策略组合。用 $E(w/s_i)$ 表示把策略组合 $E(w)$ 中参与者 i 的策略 $E_i(w)$ 用策略 s_i 替换后的策略组合。这里，用原子命题 B_i 表示参与者 i 采取的行动[⑧]是最佳反应，也就是说，对参与者 i 而言，命题 B_i 的意思是在其他参与者的策略保持不变的情况下，参与者 i 的效用不能通过单方面改变自己的策略而得到提高：

$M,w\models B_i$ 当且仅当 对于所有的 $s_i\in S_i$ 且 $s_i\neq E_i(w)$，$z(E(w))\geqslant_i z(E(w/s_i))$

我们说一个策略组合是纳什均衡 NE(Nash Equilibrium)，当对每个参与者而言，在世界 w 中他们各自所采取的策略都是自己最佳反应。也就是说，

$M,w\models NE$ 当且仅当对任一参与者 $i\in N$，$M,w\models B_i$

例 2　图 2 中博弈 G 的认知模型和最佳反应为真的分布图：



B_MB_W	...	...
B_W	B_M	B_M
...	B_W	...

在这个认知模型中，可以判定很多认知命题。比方说公式 $\langle W\rangle B_W\wedge\langle M\rangle B_M$，该公式说的是每个人认为他当前的行动可能是最好的。这一公式仅在 4 个世界上为真，即在由前两行和前两列策略组成的 4 个世界。所以公式 $\langle W\rangle B_M\wedge\langle M\rangle B_W$ 在这个模型上是有效的。

这里，按照文献[9]的说法，列出两个不同强度的理性的形式定义。

定义 6(弱理性 WR_i)　在一个模型 M 中，参与者 i 在世界 w 上是弱理性的，当且仅当对于每个可供选择的策略，参与者 i 认为他当前的策略至少是一样好的。即，

$M,w\models WR_i$ iff $M,w\models \bigwedge_{(s_i\in S_i)\&(s_i\neq E(w))}\langle i\rangle(z(E(w))\geqslant_i z(E(w/s_i)))$

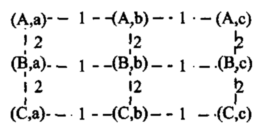
在一个两人的一般博弈模型中，以上所定义的弱理性 WR_i 在对参与者 i 而言的那些被严格占优的策略的行或列上不成立。在例 2 模型中，对于参与者 W，其策略 c 是被策略 a 严格占优的，所以参与者 W 的弱理性 WR_w 在最右一列上不成立。

定义 7(强理性 SR_i)　在一个模型 M 中，参与者 i 在世界 w 上是强理性的，当且仅当参与者 i 认为对于每个可供选择的策略他当前的策略至少是一样好的。即，

$M,w\models SR_i$ iff $M,w\models\langle i\rangle\bigwedge_{(s_i\in S_i)\&(s_i\neq E(w))}(z(E(w))\geqslant_i z(E(w/s_i)))$

根据以上两个形式定义不难从形式上推出这样的结论：如果一个人满足强理性的条件，那么他也满足弱理性的条件，反之则不然。也可以说一个人在世界 w 是强理性的当且仅当他认为他当前的策略是他的最佳反应策略。因此，在两人一般博弈中以上定义的强理性 SR_i 在对参与者 i 而言的那些不是最佳反应策略的行或列上不成立。

例 3　例 1 中博弈 G 的认知博弈模型和最佳反应策略为真的分布图：

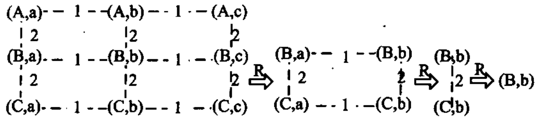


B_2	...	...
...	B_1B_2	...
B_1	B_2	B_1

在例 3 的模型中，策略 A 是参与者 1 的相对被占优策略，策略 c 是参与者 2 的相对被占优策略。因此两个参与者强理性的合取在第 1 行和第 3 列上不成立。如果通过删除所有参与者强理性的合取不成立的那些行或列来缩减模型，那么可以看到这一过程正好和 IDRDS 算法的求解过程一样。这一结论对弱理性和 IDSDS 算法也成立，也即是说，消除弱理性不成立的那些世界的过程正好和 IDSDS 算法的运行过程一致。

⑧因为在策略博弈中行动和策略是相同的，所以本文不加区分地使用它们。

在公开宣告逻辑中重复宣告某一理性可以找到相应的博弈算法求到的博弈解。不断宣告的过程会消除那些理性不成立的世界，这种认知模型不断更新的过程正好和某一博弈算法求解过程一致。这里通过分析例1来展示这种对应性。其中，$R=SR_1\wedge SR_2$。



重复宣告 R 3次之后，对 R 的任何再次宣告都不会使认知子模型继续收缩。可以清楚地看到这一认知模型的更新过程和图1展示的过程是一样的。

结束语 本文主要讨论策略博弈解。实际上，很多扩展博弈的算法也需要对个体理性做某些假设。文献[9]非形式地分析了一些算法所需要的理性假设。其他学者也在进行这方面的研究，这也是我们进一步研究的方向。

关于理性，如文中分析的那样，一个人是强理性的那么他一定是弱理性，反之不成立。这和文献[9]的说法是一致的。不同的算法需要关于认知和理性做不同强度的假设。文献[8]根据重复删除弱被占优策略算法[5]定义了另外一种理性(R)。正如他们所展示的那样，在以 SR 为理性前提可求得博弈解的那些博弈中，有些是不能够在以 R 为理性前提求得博弈解的；反之亦然。同时，对于以 WR 为理性前提可求得博弈解的那些博弈，以 SR 或以 R 为理性前提则均可求得；反之不成立。

文中提出命题1：在一个有限博弈 G 中，参与者关于彼此对理性的认识程度最多需要嵌套($\sum_{i\in N}|S_i|-|N|$)次。文中没有给出严格的形式证明，只是给出非形式出分析说明。但它是不难证明的。文中也提到命题1正是定义3中算法的认知基础。其实在定义3中为 m 设置这个最大值的另一个目的是为了避免这个算法使计算机运行陷于死循环(dead loop)的状态。所以在定义3中，给 m 设定了一个最大值($\sum_{i\in N}|S_i|-|N|$)。

我们可以通过计算机中的“while do”等语句很容易实现 IDRDS 程序算法在计算机中的执行。如果要进一步考虑系统复杂性的问题，也许可以增加一些算子，如测试算子(test)“?”来检验 S_i^m 或 RD_i^m 的元素个数是否满足某一要求，以便减少或避免无效的重复执行，从而达到减小时间复杂度的目的。在以后的程序设计工作中，我们会朝着减弱复杂度的方向努力。

参考文献

[1] Brandenburger. Epistemic Game Theory: Complete Information 2007[M]. The New Palgrave Dictionary of Economics(2nd edition) edited by Steven Durlauf and Lawrence Blume, Palgrave Macmillan, 2008

[2] Brandenburger A, Friedenberg A. Finite-Order Rationality [OL]. 2009. http://pages.stern.nyu.edu/~abranden/papers.html

[3] Baltag A, Moss L S, Solecki S. The logic of public announcement, common knowledge and private suspicious [R]. SEN-R9922, CWI, Amsterdam, 1999

[4] Lorini E, Schwarzentruber F, Herzig A. Epistemic game in model logic: joint action, knowledge and preferences all together[C]// Logic Rationality and Interaction. LORI-II. Springer Press, 2009

[5] Bonanno G. Epistemic foundations of game theory[R]. LLC, University of Amsterdam, 2007

[6] Bonanno G. A syntactic approach to rationality in game with ordinal payoffs, volume 3[M]. Amstrdam: Amsterdam University Press, 2008

[7] van Ditmarsch H, van der Hoek W, Kooi B. Dynamic Epistemic Logic[M]. Berlin: Springer, 2007

[8] Cui J Y, Guo M Y, Tang X J. Characterizations of iterated admissiblity based on PEGL[C]// Logic Rationality and Interaction, Chongqing. LORI-II. Springer Press, 2009

[9] van Benthem J. Rational dynamics and epistemic logic in games [J]. Game and Economic Behavior, 2006

[10] van Benthem J. Exploring Logical Dynamics [M]. Stanford, Mass: ESLI Publications, 1996

[11] Apt K R. The many faces of rationalizability [J]. The Journal of Theorrtical Economics, 2007, 7

[12] Apt K R, Zvesper J A. Common belief and public announcements in strategic games with arbitrary strategy sets[J]. Journal of Logic and Computation, 2007. http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0710/0710.3536v2.pdf

[13] Osborne M, Rubinstein A. A Course in Game Theory[M]. Cambridge (Mass.): MIT Press, 1994

[14] Battigalli P, Bonanno G. Recent results on belief, knowledge and the epistemic foundations of game theory[J]. Research in Economics, 1999, 53: 149-225

(上接第156页)

值大于0，即应当满足：

$$\lim_{d\to\infty}\frac{\sqrt{(d/m)\cdot(1-1/m)}}{d/m}=\lim_{d\to\infty}\sqrt{\frac{m-1}{d}}>0 \qquad (10)$$

而且，上述极限值不能太小。为了达到这一目的，由式(10)可见，m 的取值不能过低。

但 m 的取值也不能过高，因为过高的 m 值会导致落入每一个区间的数据对象的个数很少，这样会在过滤掉噪声信息的同时，也将许多包含非噪声信息的维度排除在最终选择的子空间之外，从而得到不准确的度量结果。

综合两方面的因素，m 值可取作维数 d 的线性倍数，即有 $m=\lceil c\cdot d\rceil$，其中 c 为某常数。

结束语 为有效消除维度灾难对高维数据相似性度量的影响，本文提出了一种基于子空间的相似性度量方法。通过将高维数据进行基于网格的划分，进而在划分后的合理子空间中进行数据的相似性度量，可较好地避免噪声属性对高维数据相似性度量的影响。

网格划分参数是影响本文度量方法的一个重要方面，本文从理论分析的角度讨论了网格划分参数的取值准则。进一步的工作主要在于将提出的度量方法与具体的应用实例结合起来，如将其应用于高维数据的聚类处理，从而通过实践进一步完善网格划分参数的确定原则。

参考文献

[1] Hinneburg A, Aggarwal C C, Keim D A. What is the nearest neighbor in high dimensional spaces[C]// 26th VLDB Conference. 2000: 506-515

[2] Kriegel H-P, Kröger P, Zimek A. Clustering high-dimensional data: a Survey on subspace clustering, pattern-based clustering, and correlation clustering[J]. ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data, 2009, 3(1): 1-58

[3] 盛骤，谢式千，潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，1989