[0,∞]区间N范数的定义及生成定理

范艳峰[1,2] 何华灿[2]
(河南工业大学信息科学与工程学院 郑州450001)[1] (西北工业大学计算机学院 西安710072)[2]

摘 要 柔性逻辑学的研究目标是探索逻辑的一般规律,它指出命题真值误差用连续变化的广义自相关系数$k\in[0,1]$来刻画。在柔性逻辑的不确定推理中,N范数是一级运算的数理模型。由于在现实生活中,很多逻辑推理控制必须在其自身的定义域内完成,因此以三角范数作为柔性逻辑学研究的数学工具,定义了$[0,\infty]$区间上的N范数和N性生成元,并研究了相关主要性质;证明了N范数生成定理;给出了广义自相关系数的计算方法;证明了$[0,\infty]$区间上指数(幂)型N性生成元为N性生成元完整簇;从而为柔性逻辑中$[0,\infty]$区间的一级运算模型提供了重要的理论基础。

关键词 柔性逻辑,范数,生成元,广义自相关系数,生成元完整簇

Definition of N-norm and it's Generation Theorem on [0,∞] Interval

FAN Yan-feng[1,2] HE Hua-can[2]
(College of Information Science and Engineering, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China)[1]
(College of Computer, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)[2]

Abstract The research aim of flexible logics is to explore the general law of logic, it indicates that propositional truth value error is described by the continuously changeable generalized self-correlation coefficient k([0,1]. N-norm is the mathematic model of 1-level operation in uncertain reasoning. In the real world, many logic reasoning controls must be accomplished in the original true value domain. This paper used triangular norm theory as an important mathematical tool to study the flexible logics on interval $[0,\infty]$. N-norm and N-generator on $[0,\infty]$ were defined, and the relative main properties were studied. Generation theorem of N-norm was proven. Method for calculating generalized self-correlation coefficient k was given. The paper proved that exponential N-generator is N-generator integrity cluster on $[0,\infty]$. These researches provided the important theoretical base for 1-level operation model on $[0,\infty]$ interval in flexible logics.

Keywords Flexible logics, Norm, Generator, Generalized self-correlation coefficient, Generator integrity cluster

在柔性逻辑的不确定推理中,N范数是一级运算的数理模型。泛逻辑称模糊命题和它的模糊非命题之间的相关性为广义自相关性。测量误差可由最大可能的负误差到最大可能的正误差连续地变化,要用连续变化的广义自相关系数(简称误差系数)$k\in[0,1]$来刻画广义自相关性的大小[1]。命题真值误差的连续可变性对命题连接词运算模型将产生很大的影响。

传统的柔性逻辑研究是将N范数定义为在区间[0,1]满足若干性质的函数。但是在现实推理与控制中,往往需要把许多参数的分布函数转化成隶属函数,只有在"明确的逻辑系统"(如模糊逻辑系统)中进行推理,然后才进行参数转换,再加以推理和控制[2]。一方面,由于时间、地域、个人见解等诸多差异,作为认识主体的不同人群对研究对象的认识不可避免会存在着差异,对隶属度及模糊命题的真值的确定确实存在着许多的"干扰"因素。并且,由于复杂系统自身结构的不确定性、数据误差的不确定性、参数之间关系的不确定性,存在着各种各样的相关性。对于复杂非线性系统中的许多参变量,由于存在交互作用,寻找合适隶属度函数并非易事。利用真值域为[0,1]的经典逻辑处理此类问题会丢失大量有价值的信息[3]。对于一个不确定推理系统,为使模糊逻辑更全面、更真实地反映人脑的思维,获得更大满意程度的判断,必须在其自身的定义域内完成推理与控制。

文献[2]建立了区间$[a,b]$上的N范数。但是研究表明,这是基于真值域a,b为有限确定值的。当区间为无穷时,很多性质会发生变化,特别是在N性生成元的构造上已存在很大不同,N范数的生成也不相同。本文以三角范数理论作为柔性逻辑研究的数学工具,给出了$[0,\infty]$区间上的N范数定义,详细讨论了N范数生成元及N范数生成定理,为柔性逻辑中的一级运算模型提供了重要的数理逻辑基础。

为简明起见,如不做特别说明,文中各N范数和N性生

到稿日期:2009-06-15 返修日期:2009-09-01 本文受国家自然科学基金项目(No. 60273087)"经验知识推理理论研究",北京市自然科学基金项目(No. 4032009)"不精确推理理论研究",西北工业大学基础研究基金(No. W018101)资助。

范艳峰(1973-),女,博士生,讲师,主要研究方向为人工智能等,E-mail:yanfengfan@126.com;何华灿(1938-),男,博士生导师,主要研究方向为人工智能等。

成元均定义在$[0,\infty]$区间上。

1 $[0,\infty]$区间的N范数及其性质

1.1 N范数的定义

三角范数理论中的N范数(N-norm)是柔性逻辑中非运算的数学模型。有关N范数的研究可参见文献[4-6]。由于不同研究者的出发点不同,研究方法与所得结果不尽相同。这里给出$[0,\infty]$区间N范数的定义。

设$N(x)$是$[0,\infty]\to[0,\infty]$的一元运算,关于$N(x)$有如下条件:

边界条件N1:$N(0)\to\infty, N(\infty)\to 0$;

单调性N2:$N(x)$单调递减,iff $\forall x,y\in[0,\infty]$,若$x<y$,则$N(x)\geqslant N(y)$;

严格单调性N2′:$N(x)$严格单调递减,iff $\forall x,y\in[0,\infty]$,若$x<y$,则$N(x)>N(y)$;

连续性N3:$N(x)$连续,iff $\forall x\in[0,\infty]$,$N(x^-)=N(x)=N(x^+)$,x^-,x^+是x的左右邻元;

逆等性N4:$N(x)$有逆等性,iff $\forall x\in[0,\infty]$,$N(x)=N^{-1}(x)$,$N^{-1}(x)$是$N(x)$的逆。

定义1 对于函数$N(x)$和上述条件有:

满足N1,N2的$N(x)$称为$[0,\infty]$上的弱N范数;

满足N1,N2,N4的$N(x)$称为$[0,\infty]$上的N范数;

满足N1,N2′的$N(x)$称为$[0,\infty]$上的严格单调弱N范数;

满足N1,N2′,N4的$N(x)$称为$[0,\infty]$上的严格单调N范数;

满足N1,N2,N3的$N(x)$称为$[0,\infty]$上的连续弱N范数;

满足N1,N2,N3,N4的$N(x)$称为$[0,\infty]$上的连续N范数。

1.2 N范数的主要性质

定理1(封闭性) 弱N范数满足$N(x)\in[0,\infty]$。

证明:由边界条件N1知,$N(0)\to\infty$,$N(\infty)\to 0$;由单调性N2知,$N(\infty)\leqslant N(x)\leqslant N(0)$,所以$N(x)\in[0,\infty]$,弱N范数具有封闭性。

定理2(对合律) N范数满足$N(N(x))=x$。

证明:由逆等性N4知,$N(x)=N^{-1}(x)$,所以$N(N(x))=N(N^{-1}(x))=x$。

定理3(不动点) 在连续(弱)N范数$N(x)$中存在$l\in(0,\infty)$,使$N(l)=l$。

证明:由前面定理知,连续(弱)N范数$N(x)$满足N1,N2,N3。设$F(x)=N(x)-x$,由边界条件N1可知,$F(0)=N(0)-0\to\infty$,$F(\infty)=N(\infty)-\infty\to-\infty$,故当$x\in[0,\infty]$时,$F(x)\in(-\infty,\infty)$;又因为$N(x)$满足单调递减性N2,iff $\forall x,y\in[0,\infty)$,若$x<y$,则$N(x)\geqslant N(y)$,所以有iff $\forall x,y\in[0,\infty]$,若$x<y$,$F(x)-F(y)=[N(x)-x]-[N(y)-y]=[N(x)-N(y)]+(y-x)>0$,即$F(x)>F(y)$,也就是$F(x)$是$(0,\infty)$区间上的单调递减函数,$F(x)\in(-\infty,\infty)$。由中值定理知,$\exists k\in(0,\infty)$,使$F(k)=0$,即$N(k)-k=0$,$N(k)=k$。所以,在连续(弱)N范数$N(x)$中存在$l\in(0,\infty)$,使$N(l)=l$。

定理4(泛非性) 设$l\in(0,\infty)$是连续(弱)N范数$N(x)$的不动点,则当$l\leqslant x$时,$N(x)\leqslant l$;当$x\leqslant l$时,$l\leqslant N(x)$。如果$N(x)$是连续的严格单调(弱)N范数,则当$l<x$时,$N(x)<l$;当$x<l$时,$l<N(x)$。

证明:由定理3知,$N(l)=l$,再由单调性N2知,当$l\leqslant x$时,必有$N(x)\leqslant l$;当$x\leqslant l$时,必有$l\leqslant N(x)$。如果$N(x)$是连续的严格单调(弱)N范数,则$l<x$时必有$N(x)<l$,当$x<l$时必有$l<N(x)$。所以本定理成立。

定义2 若$N(x)$和$N_1(x)$都是$[0,\infty]$上的N范数,则称$N_1'(x)=N(N_1(N(x)))$为$N_1(x)$关于$N(x)$的一级对偶,当$N(x)=1/x$时,$N_1'(x)=1/N_1(1/x)$退化为$N_1(x)$的零级对偶,统一简称为对偶。任何N范数都有一级对偶和零级对偶。

定理5(对偶性) 在$[0,\infty]$上的N范数$N_1(x)$的关于$N(x)$的一级对偶$N_1'(x)$也是$[0,\infty]$上的N范数,且$N_1'(x)$保持了$N(x)$和$N_1(x)$共有的主要性质。

证明:1) 由于$N(x)$和$N_1(x)$在$[0,\infty]$上是单调函数,因此$N_1'(x)=N(N_1(N(x)))$一定存在,且有

$$N_1'(0)=N(N_1(N(0)))=N(N_1(\infty))=N(0)\to\infty$$

$$N_1'(\infty)=N(N_1(N(\infty)))=N(N_1(0))=N(\infty)\to 0$$

由$N(x)$和$N_1(x)$单调减知,$N_1(N(x))$单调增,$N_1'(x)=N(N_1(N(x)))$单调减。

设$y=N_1'(x)=N(N_1(N(x)))$,则$N_1(N(x))=N^{-1}(y)$,$N(x)=N_1^{-1}(N^{-1}(y))$,$x=N^{-1}(N_1^{-1}(N(y)))$,由$N(x)$和$N_1(x)$的逆等性知,$x=N(N_1(N(y)))=N_1'(y)$,即$N_1'(x)$有逆等性。

所以$N_1'(x)$满足N1,N2,N4,是$[0,\infty]$上的N范数,即N范数的对偶也是N范数。

2)如果$N(x)$和$N_1(x)$满足N2′,则由$x<y$时,$N(x)>N(y)$,$N_1(N(x))<N_1(N(y))$知,$N_1'(x)>N_1'(y)$,也满足N2′;如果$N(x)$和$N_1(x)$满足N3,则由$N(x^-)=N(x^+)$,$N_1(N(x^-))=N_1(N(x^+))$知,$N_1'(x^-)>N_1'(x^+)$,也满足N3。

所以$N_1'(x)$保持了$N(x)$和$N_1(x)$共有的主要性质。

根据上述1)、2),本定理成立。

非运算模型簇$N(x,k)$是一个以中心非算子$N(x,0.5)$为中心的自对偶算子簇,它的零级对偶和一级对偶都在簇中。

推论1(偶等性) 任意广义N范数的自对偶等于自己$N(x)=N(N(N(x)))$。

定理6 设$l\in(0,\infty)$是N范数$N_1(x)$的不动点,则$l'=N(l)$是$N_1(x)$关于$N(x)$的一级对偶$N_1'(x)$的不动点。

证明:由一级对偶的定义知,$N_1'(x)=N(N_1(N(x)))$,由于$N_1(l)=l$,当$l'=N(l)$时,由N范数的逆等性,有$l=N(l')$,因此$N_1'(N(l))=N(N_1(N(N(l))))=N(N_1(l))=N(l)$,所以$l'=N(l)$是$N_1'(x)$的不动点。

2 $[0,\infty]$区间的N性生成元与N范数的生成

2.1 N性生成元的定义与性质

定义3 $x\in[0,\infty]$,如果$\phi(x)$是连续的严格单调递增函数,且$\phi(0)=0$,$\phi(\infty)\to\infty$,则称$\phi(x)$为$[0,\infty]$上的N性生成元。

显然,N性生成元的逆函数、复合函数和各种对偶也是N性生成元,且$1/\phi(x)$和$\phi(1/x)$都是弱N范数。

设$x\in[0,1]$,在特征空间E中,对任意分明子集X,显然

有 $X\cup\neg X=E$，当模糊测度 $m(X)$ 的值 x 可以精确得到时，

$$m(X)+m(\neg X)=x+N(x)=1, N(x)=1-x$$

中心非算子成立，它是泛非运算的基模型。

设 $x'\in[0,\infty]$，$N'(x')=1-\frac{x'}{1+x'}=\frac{1}{1+x'}\in[0,1]$，变换后有 $N(x')=\frac{1/(1+x')}{1-1/(1+x')}=\frac{1}{x'}\in[0,\infty]$，是 $[0,\infty]$ 区间的中心非算子。所以，当 $x\in[0,\infty]$，在特征空间 E 中，当模糊测度 $m(X)$ 的值 x 可以精确得到时，

$$m(X)\cdot m(\neg X)=x\cdot N(x)=1, N(x)=1/x$$

中心非算子成立。但当模糊测度 $m(X)$ 的值 x 无法精确得到时，设

$$m(X)=x^*, m(X)\cdot m(\neg X)=x^*\cdot N(x^*)\neq 1,$$

$$N(x^*)\neq 1/x^*$$

如果需要在一定约束条件下对 $N(x^*)$ 进行估计，则约束条件的一般形式是

$$\phi(x^*)\cdot\phi(N(x^*))=1, N(x^*)=\phi^{-1}(1/\phi(x^*))$$

式中，$\phi(x^*)$ 是连续的严格单调增函数，$\phi(0)=0$，$\phi(\infty)\to\infty$，一般称为自守函数，在泛逻辑学中特称为 N 性生成元。$\phi(x^*)$ 在上式中的作用是修正误差对模糊测度值 x^* 的影响，得到精确的模糊测度值 x。$\phi(x)=x$ 是特殊的 N 性生成元，它表示模糊测度是精确的。

N 性生成元 $\phi(x^*)$ 的物理意义是：有这样一类问题，它的特征空间 E 是确定的分明集合，全集 E 和空集 ϕ 都可以被精确地检测到，但对 E 的其它真子集 X 都存在检测误差。设 $m(X)=x$ 是 X 在理想状态下的精确模糊测度，$m(X)=x^*$ 是 X 在实际状态下的有差模糊测度，则有 $x=\phi(x^*)$。$x=\phi(x^*)$ 是修正 x^* 中偏差的自同构函数，满足边界条件 $\phi(0)=0$，$\phi(\infty)\to\infty$（在 $[0,1]$ 基空间时，有 $\phi(0)=0$，$\phi(1)=1$）。偏离这两点，模糊测度都可能存在误差，且模糊测度的偏差越大，$\phi(x^*)$ 偏离 x^* 越大。$\phi(x^*)\geqslant x^*$ 表示 $m(X)$ 是下近似，x^* 的值比精确值 x 偏小，需要放大；$\phi(x^*)\leqslant x^*$ 表示 $m(X)$ 是上近似，x^* 的值比精确值 x 偏大，需要缩小；当 $\phi(x^*)=x^*$ 时，表示 $m(X)$ 是理想状态下的精确模糊测度。

下面严格讨论 N 性生成元的定义和主要性质，其中一般不再严格区分 x^* 和 x。

定理 7（N 性生成元生成定理） 如果 $F(x)$ 是 $[0,\infty]$ 上连续的严格单调函数，且 $F(x)$ 为有限值，则

$$\phi(x)=\frac{(F(0)-F(x))/(F(0)-F(\infty))}{1-(F(0)-F(x))/(F(0)-F(\infty))}=\frac{F(0)-F(x)}{F(x)-F(\infty)},$$

$$F(\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)$$

是 $[0,\infty]$ 上的 N 性生成元。

证明：由 $F(x)$ 是 $[0,\infty]$ 上连续的严格单调函数，$F(x)-F(\infty)\neq 0$ 且为有限值可知

$$\phi(x)=\frac{(F(0)-F(x))/(F(0)-F(\infty))}{1-(F(0)-F(x))/(F(0)-F(\infty))}=\frac{F(0)-F(x)}{F(x)-F(\infty)}$$

是 $[0,\infty]$ 上连续的严格单调函数，且 $\phi(0)=0$，$\phi(\infty)\to\infty$，所以 $\phi(x)$ 是 $[0,\infty]$ 上的 N 性生成元。

2.2 N 范数生成定理

定理 8（N 范数第一生成定理） 若 $\phi(x)$ 是 $[0,\infty]$ 上的 N 性生成元，$\phi^{-1}(x)$ 是逆函数，则

$$N(x)=\phi^{-1}(1/\phi(x))$$

是 $[0,\infty]$ 上的连续严格单调 N 范数。

证明：由于 $\phi(x)$ 是 $[0,\infty]$ 上的 N 性生成元，$\phi(0)=0$，$\phi(\infty)\to\infty$，且是连续的严格单调增函数。所以 $1/\phi(x)$ 满足条件 N1，N2′ 和 N3，由逆运算的性质知 $y=N(x)=\phi^{-1}(1/\phi(x))$ 也满足条件 N1，N2′ 和 N3，又 $x=N^{-1}(y)=\phi^{-1}(1/\phi(y))$，即 $N^{-1}(x)=\phi^{-1}(1/\phi(x))=N(x)$，满足条件 N4。

所以 $N(x)$ 是 $[0,\infty]$ 上的连续严格单调 N 范数。

定理 9（N 范数第二生成定理） 若 $N_1(x)$ 是 N 范数，$\phi(x)$ 是 N 性生成元，则 $N_2(x)=\phi^{-1}(N_1(\phi(x)))$ 是 N 范数。

证明：设 $N_1(x)=\phi_1^{-1}(1/\phi_1(x))$。因为 $\phi_2(x)=\phi_1(\phi(x))$ 是 N 性生成元，且 $\phi_2^{-1}(x)=\phi^{-1}(\phi_1^{-1}(x))$，所以，由 2.1 节中约束条件的一般形式知

$$N_2(x)=\phi^{-1}(N_1(\phi(x)))=\phi^{-1}(\phi_1^{-1}(1/\phi_1(\phi(x))))=\phi_2^{-1}(1/\phi_2(x))$$

是 N 范数。

2.3 幂型 N 性生成元与 N 范数

在 $[0,\infty]$ 区间，指数（幂）型函数簇是常用的 N 性生成元簇

$$\phi_2(x)=x^n/((1+x)^n-x^n)=1/((1+1/x)^n-1)$$

其逆函数为

$$\phi_2^{-1}(x)=x^{1/n}/((1+x)^{1/n}-x^{1/n})=1/((1+1/x)^{1/n}-1)$$

定理 10 在 $[0,\infty]$ 区间，由幂型生成元

$$\phi_2(x)=x^n/((1+x)^n-x^n)=1/((1+1/x)^n-1)$$

生成的 N 范数为

$$N_2(x)=((1+x)^n-x^n)^{1/n}/((1+x)-((1+x)^n-x^n)^{1/n})=1/((1/(1-(x/(1+x))^n))^{1/n}-1)$$

证明：由定理 8 N 范数第一生成定理有 $N(x)=\phi^{-1}(1/\phi(x))$，又有在 $[0,\infty]$ 区间，幂型 N 性生成元 $\phi_2(x)=x^n/((1+x)^n-x^n)$，$\phi_2^{-1}(x)=1/((1+1/x)^{1/n}-1)$，代入 $N(x)=\phi^{-1}(1/\phi(x))$，整理得

$$N_2(x)=((1+x)^n-x^n)^{1/n}/((1+x)-((1+x)^n-x^n)^{1/n})=1/((1/(1-(x/(1+x))^n))^{1/n}-1)$$

容易证明，$N_2^{-1}(x)=N_2(x)$。

3 [0,∞] 区间的 N 性生成元完整簇

由 2.1 节可知，在 $[0,\infty]$ 区间有 $N(x)=1/x$，但这只是理想情况下的非运算特性。在现实生活中，由于种种人类无法控制的原因，会引起测量和认识偏差。除了两个极端情况 $\phi(0)=0$，$\phi(\infty)\to\infty$ 没有误差外，其他情况下 $m(X)=x$ 都可能有误差，$m(\neg X)=N(x)=1/x$ 不再成立。而且测量和认识的偏差越大，$N(x)$ 偏离 $1/x$ 越大。可见在模糊逻辑学中，仅仅使用模糊非算子 $N(x)=1/x$ 是片面的，它只适合于理想的无误差模糊测度。为了刻画模糊测度误差对模糊非算子的影响，在模糊命题 p 和它的非命题 $\sim p$ 之间引入了广义自相关系数（Generalized autocorrelation coefficient）k。并且，在 $[0,1]$ 基空间，连续地严格单调减 N 范数 $N(x)=\phi^{-1}(1-\phi(x))$ 的不动点即广义自相关系数 $k=\phi^{-1}(0.5)$[1]。

3.1 自相关系数 k 的计算

定理 11 定义在 $l\in[0,\infty]$ 上的连续的严格单调减 N 范数 $N(x)=\phi^{-1}(1/\phi(x))$ 的不动点 $l=\phi^{-1}(1)$ 即对应自相关系数 $k=\phi^{-1}(1)/(1+\phi^{-1}(1))$。

证明：设 $l\in[0,\infty]$ 是 N 范数 $N(x)$ 的不动点，则 $N(l)=\phi^{-1}(1/\phi(l))=l$，$1/\phi(l)=\phi(l)$，$\phi^2(l)=1$，因为 N 性生成元 ϕ

$(x)\in[0,\infty]$，所以 $\phi(l)=1$，N 范数 $N(x)$ 的不动点为 $l=\phi^{-1}(1)$。又因为 $l\in[0,\infty]$，在 $l',k\in[0,1]$ 中，$l'=l/(1+l)=\phi^{-1}(1)/(1+\phi^{-1}(1))$，也即 $k=\phi^{-1}(1)/(1+\phi^{-1}(1))$。

当生成元 $\phi_2(x)=x^n/((1+x)^n-x^n)$ 时，$k=\phi^{-1}(1)/(1+\phi^{-1}(1))=2^{-1/n}$。反之，$n=-1/\log_2 k$。当 $k=0.5$ 时，也即没有测量误差时，$\phi(x)=x$，$N(x)=1/x$。

3.2 N 性生成元完整簇

定义 4 当 $x\in[0,\infty]$，设 $\Phi(x,k)$ 是一 N 性生成元簇，其中 $k\in[0,1]$，即对 $k_1\in[0,1]$，$\phi(x)=\Phi(x,k_1)$ 是一个 N 性生成元。如果 $\Phi(x,k)$ 满足

1) $\Phi(x,k)$ 随 k 连续地严格单调递减变化；

2) $k=\Phi^{-1}(1,k)/(1+\Phi^{-1}(1,k))$，且当 $k=0.5$ 时 $\Phi(x,k)=\Phi_1=x$；

3) 当 $k\to1$ 时，$\Phi(x,k)\to\Phi_3'$；当 $k=0$ 时，$\Phi(x,k)\to\Phi_0'$；

4) 对 $k_1,k_2\in[0,1]$，存在 $k_{21}\in[0,1]$，使得 $\Phi(x,k_{21})=\Phi(\Phi(x,k_1),k_2)$；

5) 对 $k_1\in[0,1]$，存在 $k_1'\in[0,1]$，使得 $\Phi^{-1}(x,k_1)=\Phi(x,k_1')$，

则称 $\Phi(x,k)$ 为 N 性生成元完整簇，简称为 N 元簇(N-generator Cluster)。其中，

$\Phi_3'=\Phi_0'^{-1}=ite\{\infty|x\to\infty,0\}$

$\Phi_0'=\Phi_3'^{-1}=ite\{0|x=0,\infty\}$

这里 $\Phi^{-1}(x,k)$ 表示以 x 为变元对 $\Phi(x,k)$ 求逆。

定理 12 当 $x\in[0,\infty]$，幂型 N 性生成元 $\phi_2(x)$ 及其逆 $\phi_2^{-1}(x)$ 随 x 严格单调递增。

证明：因为 $\phi_2(x)=1/((1+1/x)^n-1)$ 是幂型 N 性生成元，所以 $n=-1/\log_2 k\in(0,\infty)$，$k\in[0,1]$。设 $x_1<x_2$，则 $1/x_1>1/x_2$，$(1+1/x_1)^n>(1+1/x_2)^n$，$n>0$，从而

$1/((1+1/x_1)^n-1)<1/((1+1/x_2)^n-1)$

所以，$\phi_2(x_1)<\phi_2(x_2)$。

同理，可证得当 $x_1<x_2$ 时，$\phi_2^{-1}(x_1)<\phi_2^{-1}(x_2)$。

故当 $x\in[0,\infty]$，幂型 N 性生成元 $\phi_2(x)$ 及其逆 $\phi_2^{-1}(x)$ 随 x 严格单调递增。

定理 13 当 $x\in[0,\infty]$，幂型函数簇 $\Phi_2(x,k)=x^n/((1+x)^n-x^n)$ 随 k 连续地严格单调递减变化；幂型函数簇对应的逆函数 $\Phi_2^{-1}(x,k)=x^{1/n}/((1+x)^{1/n}-x^{1/n})$ 随 k 连续地严格单调递增变化。

证明：因为 $n=-1/\log_2 k$，$k\in[0,1]$，容易得 n 随 k 严格单调递增。当 $k=0$ 时，$n\to0$；$k=0.5$ 时，$n=1$；$k=0$ 时，$n\to\infty$(左趋近)。因为

$\Phi_2(x,k)=x^n/((1+x)^n-x^n)=1/((1+1/x)^n-1)$

设 $k_1<k_2$，则

$n_1<n_2$，$1/((1+1/x)^{n1}-1)>1/((1+1/x)^{n2}-1)$

即 $\Phi_2(x,k_1)>\Phi_2(x,k_2)$。

因为

$\Phi_2^{-1}(x,k)=x^{1/n}/((1+x)^{1/n}-x^{1/n})=1/((1+1/x)^{1/n}-1)$

同理可证，设 $k_1<k_2$，则 $1/n_1>1/n_2$，

$1/((1+1/x)^{1/n1}-1)<1/((1+1/x)^{1/n2}-1)$

即 $\Phi_2^{-1}(x,k_1)<\Phi_2^{-1}(x,k_2)$。

故当 $x\in[0,\infty]$ 时，幂型函数簇 $\Phi_2(x,k)$ 随 k 连续地严格单调递减变化；幂型函数簇对应的逆函数 $\Phi_2^{-1}(x,k)$ 随 k 连续地严格单调递增变化。

定理 14 当 $x\in[0,\infty]$，幂型函数簇 $\Phi_2(x,k)=x^n/((1+x)^n-x^n)$，$n>0$，$k=2^{-1/n}$ 是 N 性生成元完整簇。

证明：1)由前面的讨论可知，幂型函数簇 $\Phi_2(x,k)=x^n/((1+x)^n-x^n)=1/((1+1/x)^n-1)$ 是 N 性生成元簇，$k=2^{-1/n}$ 是生成元的位置标志参数，$\Phi_2(x,k)$ 可随 x 在 $[0,\infty]$ 区间连续地严格单调递增变化，随 k 连续地严格单调递减变化，满足 $k=\Phi_2^{-1}(1,k)/(1+\Phi_2^{-1}(1,k))$。由 N 性生成元生成定理，当 $F(\infty)\to\pm\infty$ 和 $F(0)\to\pm\infty$ 时可得 N 性生成元上下极限，当 $k\to1$ 时，$\Phi_2(x,k)\to\Phi_3'$；当 $k\to0$ 时，$\Phi_2(x,k)\to\Phi_0'$；当 $k=0.5$ 时，$\Phi_2(x,k)=\Phi_1=x$。

2)对簇中任意两个生成元

$\Phi_2(x,k_1)=x^{n1}/((1+x)^{n1}-x^{n1})$

和

$\Phi_2(x,k_2)=x^{n2}/((1+x)^{n2}-x^{n2})$

其复合运算

$$\Phi_2(\Phi_2(x,k_1),k_2)=\frac{(x^{n1}/((1+x)^{n1}-x^{n1}))^{n2}}{(1+x^{n1}/((1+x)^{n1}-x^{n1}))^{n2}-(x^{n1}/((1+x)^{n1}-x^{n1}))^{n2}}$$

$$=x^{n1n2}/((1+x)^{n1n2}-x^{n1n2})=\Phi_2(x,k_3)$$

因为

$\phi_2^{-1}(x)=x^{1/n}/((1+x)^{1/n}-x^{1/n})=1/(((1+x)/x)^{1/n}-1)$

故逆运算

$\Phi_2^{-1}(x,k_1)=x^{1/n1}/((1+x)^{1/n1}-x^{1/n1})=\Phi_2(x,k_1')$

所以，复合运算和逆运算仍然在 $\Phi_2(x,k)$ 簇中，$\Phi_2(x,k)$ 对复合运算和逆运算有自封闭性。

由 1)、2)可知，$\Phi_2(x,k)$ 是 N 性生成元完整簇。

结束语 当今人工智能深入发展遇到的一个重大难题就是专家经验知识和常识的推理，它们都是具有随机性、模糊性、近似性和不完全性的知识，而信息的随机性、模糊性、近似性和不完全性都会引起推理的不确定性。模糊非命题连接词的逻辑意义是具有一级不确定性的非运算，它的不确定性来源于模糊测度的不精确性，用广义自相关系数 k 来刻画，以修正认识偏差或测量误差。

k 的逻辑意义是通过命题的真值 x 估计非命题的真值 $N(x,k)$ 时的风险程度，它是逻辑真值的偏真/偏假分界线即阈元，等于 $[0,1]$ 区间 N 范数的不动点。中心非算子代表了精确模糊测度的非运算，它的 $k=0.5$。

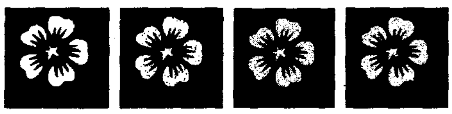
N 性生成元完整簇 $\Phi(x^*,k)$ 的逻辑意义是修正模糊测度误差对命题真值 x^* 的影响，得到精确的模糊测度 x。反之，$\Phi^{-1}(x,k)$ 的逻辑意义是在命题真值 x 上增加模糊测度误差的影响，得到有误差的模糊测度 x^*。

本文主要研究了 $[0,\infty]$ 区间上的 N 范数及其生成定理，证明了 N 范数的封闭性(命题的非命题仍是命题)、泛非性(在泛非运算中，偏真命题的非命题一定不偏真，偏假命题的非命题一定不偏假)、对偶性(泛非运算模型簇 $N(x,k)$ 是一个以中心非算子 $N(x,0.5)$ 为中心的自对偶算子簇，它的零级对偶和一级对偶都在簇中)及对合律(经过偶数次相同误差 k 的非运算后回到原命题)等性质；详细讨论了 N 性生成元，证明了指数(幂)型函数簇是 N 性生成元完整簇，并且给出了

(下转第 270 页)

样特征则差异性较大。

经过大量实验，本文特征向量具有一定的鲁棒性。以朵花纹为例进行说明，这里仍然采用 256 色图像来做实验。图 4(a)为原始图像，图 4(b)、图 4(c)、图 4(d)分别是图 4(a)的加噪图像。图 4(b)是加了方差为 0.05 的椒盐噪声，图 4(c)的高斯噪声方差是 0.05，而图 4(d)则是加了随机噪声。实验结果如表 2 所列。对于同一幅图像，在不同的噪声下，从表中的 e_1 可以看出本文算法提取到的特征较为相近，具有较好的鲁棒性。



(a) (b) (c) (d)

图 4 噪声图像

表 2 噪声的影响

图像	特征值						
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
a	0.15172	9.7556	11.29	9.6501	8.4435	39.993	8.3313
b	0.15404	10.338	11.736	10.302	9.1382	41.596	8.9619
c	0.15321	10.166	11.581	10.083	8.9381	41.151	8.9056
d	0.15288	10.102	11.455	9.943	8.8304	40.616	8.8019

3 纹样识别

特征提取之后，通过一个分类器对纹样进行识别。支持向量机(SVM)是一种用来解决分类和回归问题的新技术，具有良好的分类性能和泛化能力，能够较好地解决小样本、非线性、高维数等实际问题，在文本识别、人脸识别等领域取得了很好的效果。SVM 算法基本思想是用于两类线性可分的分类问题，寻找一个最优分类函数，将两类样本尽可能地分开，并使得两类间隔最大。本文的分类核函数使用径向基核函数，纹样的识别算法描述如下：

(1)对图像进行 FM 变换；

(2)利用小波变换分解 FM 变换后得到的图像，得到不同频率的子带；

(3)计算各层的能量，组成特征向量；

(4)通过支持向量机对纹样进行识别。

图库中的纹样包括锯齿纹、单牙纹、柳叶纹、花瓣纹、月牙纹、朵花纹、古钱纹、盘长纹、寿字纹 9 种剪纸纹样，选择纹样库中每个类别的前 30 幅图像，共 300 多个纹样作为训练样本进行训练，表 3 给出了纹样的识别率。实验中总的识别率可以达到 88.3%，效果较为满意。柳叶纹的识别率最高，取到的特征与其他纹样相差是最大的，所以错误率较低。朵花纹因为变化多，很多朵花纹相似性较小。而古钱纹等纹样与其又有一些相似性，所以识别率较低。

表 3 纹样的识别率

纹样	正确分类样本数	错误分类样本数	识别率(%)
锯齿纹	35	5	87.5
单牙纹	36	4	90.0
柳叶纹	38	2	95.0
花瓣纹	36	4	90.0
月牙纹	37	3	92.5
朵花纹	30	10	75.0
古钱纹	34	6	85.0
盘长纹	37	3	92.5
寿字纹	35	5	87.5
总数	318	42	88.3

结束语 为了解决变形图像的识别，本文结合 Fourier-Mellin 不变量和小波分析，得到一种傅立叶梅林小波变换的纹样特征提取方法，然后使用 SVM 来实现纹样的分类。此方法不仅能解决有一般几何变换的图像识别，还能够解决非数学上的变换，如变形和夸张的纹样的识别。对于变形比较大的纹样，如非常复杂的朵花纹，识别也较好。虽然算法复杂度较高，但是实验表明此方法取得了满意的识别效果。

参 考 文 献

[1] 仉凤皋. 外国剪纸集[M]. 湖南美术出版社，1997

[2] 郭晓新，许志闻，卢奕南，等. 基于 Fourier-Mellin 不变量的图像配准方法[J]. 仪器仪表学报，2004，25(4)：421-424

[3] 李晓明，赵训坡，郑链，等. 基于 Fourier-Mellin 变换的图像配准方法及应用拓展[J]. 计算机学报，2006，29(3)：466-472

[4] 王咺，肖斌，马建峰. 基于 Radon 和解析 Fourier-Mellin 变换的尺度与旋转不变目标识别算法[J]. 中国图象图形学报，2008，13(11)：2157-2162

[5] 邹建成，客楠楠，鲁燕. 基于泊松方程-Fourier-Mellin 矩的形状识别和分类方法[J]. 北方工业大学学报，2009，21(1)：1-10

[6] 臧灵，袁杰，都思丹. 基于 Fourier-Mellin 变换的指纹匹配算法研究[J]. 计算机仿真，2009，26(3)：231-233

[7] 赵晓翠，王来生. 基于投影寻踪和支持向量机的模式识别方法[J]. 计算机应用研究，2007，24(2)：86-88

[8] Jin A T B, Ling D N C, Song O T. An efficient fingerprint verification system using integrated wavelet and Fourier-Mellin invariant transform[J]. Image Vision Computing, 2004, 22(6): 503-513

[9] Pun C M, Lee M C. Log-Polar wavelet energy signatures for rotation and scale invariant texture classification[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, 25(5): 590-603

(上接第 193 页)

自相关系数 k 的计算方法。这些为柔性逻辑中$[0,\infty]$区间上的一级运算模型提供了重要的理论基础。

参 考 文 献

[1] 何华灿，王华，刘永怀. 泛逻辑学原理[M]. 北京：科学出版社，2004

[2] 陈志成. 复杂系统中分形混沌与逻辑的相关性推理研究[D]. 西安：西北工业大学，2004

[3] 汪培庄，李洪兴. 模糊系统理论与模糊计算机[M]. 北京：科学出版社，1996

[4] Esteva F, Trillas E, Domingo X. Weak and Strong Negation Functions for Fuzzy Set Theory[C]// Int. Sym. on Multiple-valued Logic. 1981

[5] Ovchinnikov S V. General Negations in Fuzzy Set Theory[J]. J. of Math. Anal. & Appli., 1983, 92: 234-239

[6] Ovchinnikov S V. Similarity Relations, Fuzzy Partitions and Fuzzy Orderings[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40: 107-126