

求解带状线性方程组的一种并行算法

段治健¹ 杨永¹ 马欣荣^{2,3} 刘三阳²

(西北工业大学翼型叶栅空气动力学国防科技重点实验室 西安 710072)¹

(西安电子科技大学理学院应用数学系 西安 710071)²

(咸阳师范学院数学与信息科学学院 咸阳 712000)³

摘要 提出了一种在 MIMD 分布式存储环境下求解带状线性方程组的交替方向迭代并行算法。利用系数矩阵的结构特点分裂矩阵,使整个计算过程只在相邻处理机间通信两次。给出了系数矩阵分别为 Hermite 正定矩阵和 M-矩阵时算法收敛的充分条件。最后,在 HP rx2600 集群系统上进行的数值计算表明,该算法与多分裂方法相比具有较高的加速比和并行效率。

关键词 带状线性方程组,交替方向迭代,HP rx2600 集群,并行性

中图分类号 TP301 **文献标识码** A

Parallel Algorithm for Solving Banded Linear Systems

DUAN Zhi-jian¹ YANG Yong¹ MA Xin-rong^{2,3} LIU San-yang²

(National Key Laboratory of Aerodynamic Design and Research, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)¹

(Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, China)²

(Department of Mathematics, Xianyang Normal University, Xianyang 712000, China)³

Abstract The work presented in this paper focused on alternating-direction parallel iterative method for solving banded-linear systems on distributed-memory multi-computers. Firstly, the matrix was splitted by using the feature of the coefficient matrix, thus the communication only need twice between the adjacent processors per iteration step. Furthermore, the sufficient conditions for convergence were given when the coefficient matrix A is a Hermite positive definite matrix or M-matrix respectively. Finally, the numerical experiments implemented on HP rx2600 cluster indicate that the algorithm's parallel acceleration rates and efficiency are higher than the multi-splitting method's.

Keywords Banded linear systems, Alternating-direction iteration, HP rx2600 cluster, Parallelism

在高性能并行计算技术高速发展的今天,对于科学与工程问题中经常遇到的一些微分方程,尤其是在流体力学中出的一些偏微分方程,经过适当差分或有限元离散而形成系数矩阵为带状的线性方程组,它们的求解是高性能并行计算的重要研究课题之一。因此,面向并行计算环境研究大型稀疏线性方程组的高效并行算法显得尤为重要。

目前针对大型带状(包括三对角、块三对角)线性方程组并行算法的研究已经有了一些可行且有效的方法。而迭代法已取代直接法成为求解大型线性方程组最重要的一类方法,各种迭代法^[1-5,8,9]不断涌现。如文献[1,2]通过分裂系数矩阵,使算法具有很好的并行性;文献[4]将串行计算方法通过调用 BLAS 子程序达到处理机间负载均衡;文献[5]根据分而治之的思想提出了当系数矩阵满足对角占优时的一种并行算法。本文基于交替方向法,利用方程组系数矩阵的特点,对其进行适当的分裂,给出了一种新的并行算法,并与多分裂方法作了比较。结果表明本文算法简便可行且具有良好的并行

性。

1 并行算法推导

设带状线性方程组 $Ax=b$, 将其表示为:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & & & \\ C_2 & A_2 & B_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & C_{2n-1} & A_{2n-1} & B_{2n-1} & \\ & & & C_{2n} & A_{2n} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2n-1} \\ b_{2n} \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中, A_i, B_i, C_i 均为 $t \times t$ 矩阵, x_i, b_i 为 t 维列向量。假设处理机台数为 p , 记第 i 台处理机为 $P_i (i=1, 2, \dots, p)$, 设 $n = mp (m \geq 2, m \in Z)$, 对式(1)的系数矩阵 A 做如下分裂:

$A = W + V$, 则由 $(I + \tau W)(I + \tau V)(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -\alpha \tau (Ax^{(k)} - b)$, 其中 $\alpha = 2, I + \tau W, I + \tau V$ 均可逆, 得 $x^{(k+1)} - x^{(k)} = -2\tau(I + \tau V)^{-1}(I + \tau W)^{-1}(Ax^{(k)} - b)$ 进而得到算法迭代格式:

到稿日期:2009-04-09 返修日期:2009-06-22 本文受咸阳师范学院重点建设课程项目基金(No. 200812014)资助。

段治健(1980-), 博士生, 讲师, 主要研究方向为理论与计算流体力学、信息处理中的快速与并行算法, E-mail: zhijian_duan@126.com; 杨永教授, 主要研究方向为理论与计算流体力学、设计空气动力学; 马欣荣 博士生, 讲师, 主要研究方向为函数逼近论、现代优化理论; 刘三阳 教授, 主要研究方向为现代优化理论、网络算法及其在通信网中的应用、非光滑分析与极值优化。

全局 GPR	$O(N^3)$	$O(N^2)$
本文的方法	$O(RS^3)+O(RN)$	$O(S^2) O(2S^2)+O(R)$

4 实验与分析

本文的实验数据来自 Mocap 运动捕捉数据库^[10], 包括各种人体运动数据。训练集为侧影特征和 3D 姿态数据对, 如图 1 所示。人体三维姿态表示为 54 维关节角向量, 不考虑平移量。人体侧影来自 poser 渲染的侧影, 不受人体大小的影响, 使用形状上下文文^[11]描述子编码, 每个侧影采样 400 个轮廓点, 每个轮廓点编码为 60 维的向量, 然后对所有训练样本的形状上下文采用 k-means 算法进行聚类, 形成 200 个码字本, 根据生成的码字本对每个侧影进行矢量量化, 量化后结果为 200 维的向量作为输入。



图 1 人体侧影和 3D 姿态

实验分为模型学习和姿态估计两部分。每种运动序列取奇数帧作为模型学习和偶数帧作为姿态估计。模型学习先选取了走、跑、足球三种运动, 各取奇数帧中的 50 帧、100 帧和 150 帧作为训练样本, 即总共各为 150 帧、300 帧和 450 帧, 分别使用全局 GPR 方法和本文方法进行学习。图 2 给出了全局 GPR 方法和本文方法的计算时间, 实验在 CPU 1.6G、内存 1G 的 PC 机上进行。实验结果表明, 全局 GPR 的计算时间随样本数的增多快速增长, 而本文方法的计算时间与样本数呈线性关系, 从而大大降低了计算复杂度, 可在线实时训练模型。

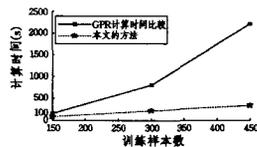


图 2 计算时间比较

然后上面 300 帧的基础上新增加 100 帧踢的动作训练, 全局 GPR 则要重新训练整个模型的 400 帧, 耗时 1029.71s, 而本文的方法仅仅只要训练增加的 100 帧, 耗时 53.42s, 远远低于全局 GPR 方法。

与模型学习相对应, 姿态估计则分别取走、跑、足球运动的偶数帧中的 50 帧、100 帧和 150 帧进行了实验, 分别求出关节角平均估计误差。表 2 给出了实验结果, 表明本文方法能够准确地估计出 3D 姿态, 甚至比全局 GPR 的性能更好一些。

表 2 3D 关节角平均估计误差(°)

	全局 GPR			本文的方法		
	走	跑	足球	走	跑	足球
50	1.75	0.92	2.0	1.38	0.9	1.67
100	1.78	0.96	2.47	1.27	0.92	2.25
150	1.96	0.87	2.41	1.28	0.87	2.27

结束语 本文基于 GPR 和 LWPR 的思想, 提出了一种增量式人体姿态映射模型学习方法, 该方法充分利用了非线性回归方法 GPR 在小样本集上能准确地学习映射模型和增量式学习方法 LWPR 的特性, 从而能够不断地对新运动人体姿态映射模型进行学习和估计。实验结果表明, 该方法极大地减少了大数据集上高斯过程回归的计算代价, 并能准确地估计出单帧图像的 3D 姿态。

参考文献

- [1] Agarwal A, Triggs B. Recovering 3D human pose from monocular images[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI), 2006, 28 (1): 44-58
- [2] Sminchisescu C, Kanaujia A, Li Z, et al. Discriminative density propagation for 3D human motion estimation[C]// Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2005, 1: 390-397
- [3] Rasmussen C E, Williams C K. Gaussian Processes for Machine Learning[M]. Massachusetts Institute of Technology: MIT-Press, 2006
- [4] Candela J Q, Rasmussen C E. A unifying view of sparse approximate gaussian process regression[J]. Journal of Machine Learning Research, 2005: 1935-1959
- [5] Lawrence N D, Seeger M, Herbrich R. Fast sparse Gaussian process methods: The informative vector machine[M]. Advances in Neural Information Processing Systems. Cambridge: MIT Press, 2003: 609-616
- [6] Rasmussen C E, Ghahramani Z. Infinite mixtures of gaussian process experts[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2002, 14
- [7] Bo L-f, Sminchisescu C. Greedy block coordinate descent for large scale gaussian process Regression [C] // The Twenty-Fourth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, UAI'08. 2008
- [8] Raquel U, Trevor D. Sparse Probabilistic Regression for Activity-independent Human Pose Inference [C] // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2008
- [9] Vijayakumar S, D'Souza A, Schaal S. Incremental online learning in high dimensions[J]. Neural Computation, 2005, 17(12): 2602-2634
- [10] Mocap data[OL]. <http://www.mocapdata.com>
- [11] Belongie S, Malik J, Puzicha J. Shape Matching and Object Recognition Using Shape Contexts[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI), 2002, 24(4): 509-522

(上接第 244 页)

- [2] Cui Xining, Lü Quanyi. A parallel algorithm for block-tridiagonal linear systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 173: 1107-1114
- [3] 谷同样, 刘兴平. 并行二级多分裂迭代方法[J]. 计算数学, 1998, 20: 153-166
- [4] 骆志刚, 李晓梅. 块三对角线性方程组的一种分布式并行算法[J]. 计算机学报, 2000, 23(10): 1028-1034
- [5] 盛跃宾, 宋晓秋, 刘德贵. 带状线性方程组的一种有效分布式并行算法[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(7): 967-969

- [6] Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. Englewood Cliffs, N. J: Prentice-Hall, 1962
- [7] 胡家麟. 线性代数方程组的迭代解法[M]. 北京: 科学出版社, 1999
- [8] Lv Quanyi, Xiao Manyu, Zhou Min. A parallel algorithm based on Galerkin theory for block-tridiagonal linear systems[J]. Applied Mathematics and Communication, 2007, 187(2): 1277-1285
- [9] Garey L E, Shaw R E. A parallel algorithm for solving Toeplitz linear systems[J]. Applied Mathematics and Communication, 1999, 100(2): 241-247