

一类带交互时延 Swarm 模型的稳定性分析

刘 群¹ 王兰芬¹ 廖晓峰² 吴 渝¹

(重庆邮电大学计算机科学与技术学院 重庆 400065)¹ (重庆大学计算机学院 重庆 400044)²

摘 要 提出了一类时延 Swarm 模型并研究分析了在存在交互时延和环境因素的影响下群集的聚集(稳定性)行为。理论证明了在二次分布环境下时延 Swarm 中的个体随着时间演变最终会围绕中心聚集到一个确定边界的区域内。仿真实验不但说明了不同的时延范围内 Swarm 系统具有稳定或震荡等复杂动力学行为,而且给出了中心的运动情况。

关键词 Swarm, 聚集行为, 时延, 二次环境

Stability Analysis of Swarms with Interaction Time Delays

LIU Qun¹ WANG Lan-fen¹ LIAO Xiao-feng² WU Yu¹

(College of Computer Science and Technology, Chongqing University of Post and Telecommunication, Chongqing 400065, China)¹

(College of Computer and Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China)²

Abstract This paper proposed a general delay swarm model and researched its collective behavior in the presence of communication time delays under general condition satisfied by several environment profiles. The results show that the swarm members can eventually converge to a finite region bound around swarm center along an attractant/repellent profile. Simulation proved the time delay swarm may display more complex dynamics, including stability and oscillation, depending on the delay values, the results also show the motion of the center.

Keywords Swarm, Collective behavior, Time delays, Quadratic environment profiles

1 引言

近年来,对 Swarm(群集)系统的研究受到了学术界越来越多的关注。这一研究最初启发于生物界的群集行为,如鸟群、鱼群、蚁群、蜂群等,生物体以群体的形式协作觅食和躲避敌害。这种生物系统的运作原理可被用于工程上,特别是多机器人的编队、多 agent 系统的协调控制、无人车的刚性或柔性编队的协调控制、移动传感器网络的自主配置等^[1-3]领域,用来设计系统的分布式协作控制、协调和学习等策略。这些工程系统的开发将会从包括生物群体的建模、协作规则的制订和群体动态特性的分析等理论的研究中获益。

目前,群集行为研究是复杂性科学研究的一个焦点。对群集及其动态行为进行数学建模与分析,对其理论研究及应用设计都是极其重要的。这是人类将其从生物界学来的知识应用于自然界及人造社会(机器人、交通、飞行器)的途径,是一个极富挑战性的研究方向。这种群集系统的特点是通过群集中的各个个体的相互沟通和协作来实现更加复杂的行为,完成单个个体无法完成的群体任务。

Swarm 稳定性分析也是学术界探讨的主要热点问题之一。Beni 等人^[4]考虑了离散一维和二维群集结构的一种同步的分布式控制方法,并借助 Lyapunov 方法证明了其在扰

动情况下的稳定性。Passino 等人^[5]提出了 n 维空间下基于个体的连续时间同步群集聚集模型。他们证明了在有限时间内,个体会集聚成具有内聚性的群集,并给出群集尺寸的界限。Gazi 等^[6]扩展了前面的结论,使其适用于一类吸引-排斥函数,而且考虑了用无界排斥函数避免个体间的冲撞。由于群集成员的运动只考虑了个体间的相互作用而没有考虑环境的影响,因此 Passino 等^[7]在之前研究的基础上加入了基于人工势场函数的吸引-排斥环境,显示出群集具有趋向于有利环境的收敛性和远离不利环境的扩散性,并研究了群体行为在不同环境函数下的稳定性,给出了群集收敛于目标区域的条件。

Swarm 动力学中另一个重要的影响因素是时延,即由于个体之间确定的交互速度产生的交互时延。时延的出现会降低 Swarm 系统的性能,使系统产生震荡和不稳定。

本文考虑到实际情况,提出了一种加入交互时延的 Swarm 模型,并且考虑了群体在确定环境中的运动聚集情况,首先利用 Lyapunov 函数讨论了时延 Swarm 系统保证稳定性的条件,然后通过数值仿真验证了结论的正确性且展示了在时延以及环境因素影响下的复杂动力学行为。

2 Swarm 模型的建立

在 n 维欧氏空间中,考虑具有 M 个个体的群集系统,这

到稿日期:2009-06-08 返修日期:2009-08-24 本文受 973 计划前期研究专项课题(2008CB317111),国家自然科学基金(60873079),重庆市自然科学基金(CST2007BB2386),重庆市委应用基础研究项目基金(No. KJ070504),重庆邮电大学博士启动基金资助。

刘 群(1969-),女,副教授,主要研究方向为人工智能、数据挖掘等,E-mail:liuqun@cqupt.edu.cn;王兰芬(1983-),女,硕士生,主要研究方向为网络智能;廖晓峰(1964-),男,教授,主要研究方向为信息安全、数据挖掘技术、人工神经网络与计算智能;吴 渝(1970-),女,教授,主要研究方向为计算智能、网络智能、数据挖掘、多媒体技术等。

里将群集中的个体看作空间中的质点,则第 i 个个体的运动由下面的时延微分方程控制。

$$\dot{x}^i(t) = -\nabla_{x^i} \sigma(x^i) + \sum_{j=1, j \neq i}^M g(x^j(t-\tau_{ij}(t)) - x^j(t-\zeta_{ji}(t))), \quad i=1, \dots, M \quad (1)$$

其中, $x^i \in R^n$ 表示第 i 个个体的位置; $\sigma: R^n \rightarrow R$ 代表群集所处的环境函数,即环境的吸引/排斥场。障碍物定义为势能高处,目标方向为势能低处。 $-\nabla_{x^i} \sigma(x^i)$ 表示个体 i 的运动在聚集成群的同时趋向目标并避开障碍。 $g(\cdot)$ 代表个体之间的相互吸引和排斥关系(即长距离吸引、短距离排斥)。 $\tau_{ij}(t), \zeta_{ji}(t) \in [0, \tau]$ 是交互时延,其中 τ 是一个常量。

$g: R^n \rightarrow R^n$ 代表个体间的吸引排斥函数,即吸引和排斥两种力共同作用的结果,将其表示为如下形式:

$$g(y) = -y[g_a(\|y\|) - g_r(\|y\|)], \quad y \in R^n \quad (2)$$

其中, $g_a: R^+ \rightarrow R^+$ 表示吸引作用, $g_r: R^+ \rightarrow R^+$ 表示排斥作用, $\|y\| = \sqrt{y^T y}$ 是欧几里德范数。

为描述个体之间的吸引/排斥作用, Gazi 等^[5] 定义了一个具有线性吸引和有界排斥特性的函数:

$$g(y) = -y[a - b \exp(-\frac{\|y\|^2}{c})] \quad (3)$$

因此,式(2)中有: $g_a(\|y\|) = a$, $g_r(\|y\|) = b \exp(-\|y\|^2/c)$, a, b, c 是正常数。因此线性吸引和有界排斥项满足如下结论:

$$g_a(\|y\|) = a > 0 \quad g_r(\|y\|) \leq \frac{b}{\|y\|} \quad (4)$$

3 Swarm 模型稳定性分析

Swarm 系统的稳定性通常被考虑为群集的内聚性。为了讨论 Swarm 系统稳定性,首先为 Swarm 定义了一个内聚性意义上的稳定性,然后讨论了群集中心的运动情况及群集在几种环境分布都满足一定条件时的聚集分析,并通过证明给出了群集稳定于目标区域的时间边界,且讨论了在特定环境函数下的群集运动情况。

3.1 稳定性描述

稳定性定义 考虑 n 维欧氏空间中,有 M 个个体的 Swarm 系统。若存在一个连续运动的点 $\bar{x} \in R^n$, 使得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^M \|x^i(t) - \bar{x}(t)\|^\beta) \leq \alpha \quad (5)$$

则认为 Swarm 是稳定的。其中 $x^i(t)$ 是个体 i 在 t 时刻的位置, $\beta > 0, \alpha > 0$ 是常量,与个体的运动状态相关,其 α 说明了 Swarm 边界的大小。

3.2 平均运动

首先考虑群集的中心运动变化。根据群集个体的位置可以定义群集的中心为:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x^i \quad (6)$$

由式(6)可知群集中心的运动如下:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \dot{x}^i \\ &= -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \nabla_{x^i} \sigma(x^i) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M g(x^j(t-\tau_{ij}(t)) - x^j(t-\zeta_{ji}(t))) \\ &= -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \nabla_{x^i} \sigma(x^i) - \frac{a}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M (x^j(t-\tau_{ij}(t)) - x^j(t-\zeta_{ji}(t))) \end{aligned}$$

$$-\zeta_{ji}(t)) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M (x^j(t-\tau_{ij}(t)) - x^j(t-\zeta_{ji}(t))) g_r(\|x^j(t-\tau_{ij}(t)) - x^j(t-\zeta_{ji}(t))\|)$$

假设 1 时延满足以下条件:

$$\tau_{ij}(t) = \zeta_{ji}(t) \quad \forall t \geq 0, \forall i, j$$

$$\text{则有: } \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M g(x^j(t-\tau_{ij}(t)) - x^j(t-\zeta_{ji}(t))) = 0$$

所以

$$\dot{\bar{x}} = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \nabla_{x^i} \sigma(x^i) \quad (7)$$

以上结果说明该 Swarm 模型的群集中心是运动的,其变化量的大小和方向由全体个体所处环境的梯度决定,但未说明每个个体的运动情况,是否每个个体在 Swarm 演变过程中都会向其中心运动并围绕中心形成聚簇,将在下面讨论。

3.3 稳定性分析

首先做以下假设以进行讨论。

假设 2 存在一个常量 $K > 0$, 对 $\forall t \geq 0, \forall i, j$ 有:

$$\begin{aligned} \|x^i(t) - x^i(t-\tau_{ij}(t))\| &\leq K \\ \|x^i(t) - x^i(t-\zeta_{ji}(t))\| &\leq K \end{aligned} \quad (8)$$

假设 3 存在常量 $\bar{\sigma} > 0$, 对 $\forall y$, 有:

$$\|\nabla_y \sigma(y)\| \leq \bar{\sigma} \quad (9)$$

假设 4 存在常量 $A_\sigma > -aM$, 对所有的 x^i 和 x^j , 有:

$$e^{T^T} [\nabla_{x^i} \sigma(x^i) - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \nabla_{x^j} \sigma(x^j)] \geq A_\sigma \|e^i\|^2 \quad (10)$$

定理 1 在假设条件 1-3 成立下,采用式(2)描述线性吸引、有界排斥函数,式(1)描述的 Swarm 模型中的个体在 $t \rightarrow \infty$ 时,有 $x^i(t) \rightarrow B_\epsilon(\bar{x}(t))$, 即所有的个体都会收敛到如下区域内:

$$B_\epsilon(\bar{x}(t)) = \{x(t) : \|x(t) - \bar{x}(t)\|^2 \leq \epsilon^2\} \quad (11)$$

其中, $\epsilon = \frac{b}{a} + 2K + \frac{2\bar{\sigma}}{aM}$ 。

证明:首先定义个体 i 的位置 x^i 和 Swarm 中心 \bar{x} 之间的距离差为 e^i , 则 $e^i = x^i - \bar{x}$ 。 e^i 的最终大小将确定 Swarm 边界。则有:

$$\begin{aligned} \dot{e}^i &= -\nabla_{x^i} \sigma(x^i) + \sum_{j=1, j \neq i}^M g(x^j(t-\tau_{ij}(t)) - x^j(t-\zeta_{ji}(t))) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \nabla_{x^i} \sigma(x^i) \\ &= -\nabla_{x^i} \sigma(x^i) - \sum_{j=1, j \neq i}^M [a - g_r(\|x^j(t-\tau_{ij}(t)) - x^j(t-\zeta_{ji}(t))\|)] (x^j(t-\tau_{ij}(t)) - x^j(t-\zeta_{ji}(t))) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \nabla_{x^i} \sigma(x^i) \end{aligned} \quad (12)$$

为了估计 e^i 的值,取下面的 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} \|e^i\|^2 = \frac{1}{2} e^{T^T} e^i \quad (13)$$

$$e^i = x^i - \bar{x} = x^i - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M x^j = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (x^i - x^j)$$

由式(13)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^{T^T} \dot{e}^i \\ &= e^{T^T} [-a \sum_{j=1, j \neq i}^M (x^j(t-\tau_{ij}(t)) - x^j(t-\zeta_{ji}(t))) + e^{T^T} [\sum_{j=1, j \neq i}^M g_r(\|x^j(t-\tau_{ij}(t)) - x^j(t-\zeta_{ji}(t))\|) (x^j(t-\tau_{ij}(t)) - x^j(t-\zeta_{ji}(t))) - e^{T^T} [\nabla_{x^i} \sigma(x^i) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \nabla_{x^i} \sigma(x^i)]] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
V &\leq -a e^T \sum_{j=1, j \neq i}^M (x^i - x^j) + a \sum_{j=1, j \neq i}^M \|e^j\| \|x^i(t) - x^j(t - \tau_{ij}(t))\| \\
&\quad + a \sum_{j=1, j \neq i}^M \|e^j\| \|x^i(t) - x^j(t - \zeta_{ji}(t))\| + \\
&\quad \|e^i\| b(M-1) + \|e^i\| \frac{2\bar{\sigma}(M-1)}{M} \\
&\leq -aM \|e^i\|^2 + 2Ka \sum_{j=1, j \neq i}^M \|e^j\| + \|e^i\| b(M-1) + \\
&\quad \|e^i\| \frac{2\bar{\sigma}(M-1)}{M} \\
&= -a \|e^i\|^2 - (M-1) \|e^i\| (a \|e^i\| - 2Ka - b - \frac{2\bar{\sigma}}{M}) \\
&< 0 \tag{15}
\end{aligned}$$

其中, $\|e^i\| > 2K + \frac{b}{a} + \frac{2\bar{\sigma}}{aM} = \epsilon$, 因此只要有 $\|e^i\| > \epsilon$, 就有 $V < 0$ 。结果证明了 Swarm 具有内聚性, 即 Swarm 中的个体随着时间的演变将聚集到以 $\bar{x}(t)$ 为半径的一个高球内。

以上结果证明了 Swarm 的渐近稳定性, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x^i(t) \rightarrow B_\epsilon(\bar{x}(t))$ 。然而从全局稳定性理论可知对于存在的任意的 $\epsilon^* > 0$, $x^i(t)$ 将在一定的时间 T_i 内进入 $B_{\epsilon^*}(\bar{x}(t))$ (即它的 ϵ^* -邻域), 在确定的时间内, 即有:

$$T_i = -\frac{1}{2a} \ln \left[\frac{(\epsilon + \epsilon^*)^2}{2V(0)} \right]$$

证明: 由式(15)可得:

$$V \leq -a \|e^i\|^2 - (M-1) \|e^i\| (a \|e^i\| - 2Ka - b - \frac{2\bar{\sigma}}{M})$$

对于 $\|e^i\| > \epsilon$, 有 $V \leq -a \|e^i\|^2 = -2aV$

因此 V 的解满足:

$$V(T_i) \leq V(0)e^{-2aT_i} \tag{16}$$

由一个个体 i 在时间 T_i 进入 $B_\epsilon(\bar{x}(t))$ 的 ϵ^* -邻域以及

式(11)知 $V(T_i) = \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon^*)^2$, 代入式(16)可得:

$$T_i \leq -\frac{1}{2a} \ln \left[\frac{(\epsilon + \epsilon^*)^2}{2V(0)} \right]$$

3.4 在二次分布环境中的运动

像多机器人、多自治 agent 在执行任务时, 在很多情况下, 对工作空间的信息并不是预先就知道的, 其中一些任务可能需要对环境进行有效的探测, 而有些环境可能会很复杂。平面环境是比较简单的情况, 高斯分布和二次分布环境情况类似, 因此这里只考虑式(1)环境参数中二次分布环境^[7]下 Swarm 的聚集行为以及中心的运动情况。

$$\sigma(y) = \frac{A_\sigma \|y - c_\sigma\|^2}{2} + b_\sigma \quad A_\sigma \in R, b_\sigma \in R, c_\sigma \in R^n \tag{17}$$

$\sigma(y)$ 在 $y = c_\sigma$ 时, 取得极值: $\sigma(c_\sigma) = b_\sigma$, 且 $A_\sigma > 0$ 时为极小值, $A_\sigma < 0$ 时为极大值。

式(17)在 x^i 的梯度为: $\nabla_{x^i} \sigma(x^i) = A_\sigma (x^i - c_\sigma)$

从假设式(4)和式(14)可得:

$$\dot{V} \leq -(aM + A_\sigma) \|e^i\| \left[\|e^i\| - \frac{(2Ka + b)(M-1)}{aM + A_\sigma} \right]$$

因此, 只要 $\|e^i\| > \epsilon_1$, 就有 $V \leq 0$ 。

$$\epsilon_1 = \frac{(2Ka + b)(M-1)}{aM + A_\sigma}$$

由式(7)可得, Swarm 中心运动方程为:

$$\dot{\bar{x}} = -A_\sigma(\bar{x} - c_\sigma)$$

当 $A_\sigma > 0$ 时, $\bar{x}(t) \rightarrow c_\sigma$, 即中心将向二次分布的最小值点运动; $A_\sigma < 0$ 时, $\bar{x}(t) \rightarrow \infty$, 即中心向二次分布极大值分散。

4 仿真结果

用具有强大功能的 matlab 作为仿真平台, 选择在一个二维空间观察 Swarm 中个体的运动轨迹及中心的运动情况。个体数 $M=10$, (3)中参数 $a=0.2, b=1, c=0.05$, 外部二次环境参数 $A_\sigma = \frac{4}{5}, c_\sigma = (1, 2)^T$, 时延参数 $\tau_{ij}(t) = \zeta_{ji}(t) = 0.1$, 个体的初始位置随机分布, 循环运行 100 次, 时间步长值为 0.01。

图 1 为 $A_\sigma > 0$ 时 Swarm 中各个体的运动轨迹图, 箭头短线为梯度分布, 标注点为个体的初始位置。由图 1 可以看出 Swarm 中个体逐渐聚集达到稳定并向二次环境的极小值处运动。图 2 为其中心的运动。可见 Swarm 的中心在 $A_\sigma > 0$ 时向着二次分布的极小值点运动。

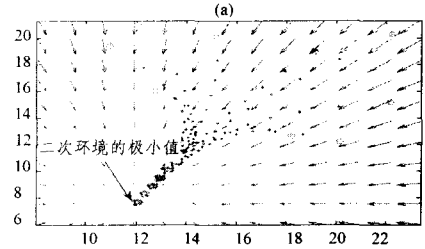


图 1 各个体的运动轨迹图

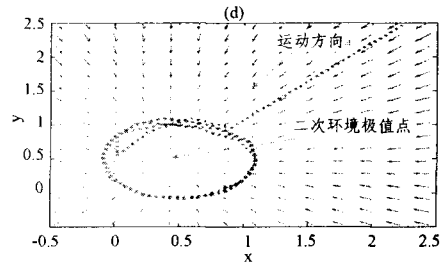


图 2 中心运动轨迹图

图 3—图 6 是个体数 $M=10$, 式(3)中参数 $a=0.2, b=1, c=0.05$, 外部二次环境参数 $A_\sigma = \frac{4}{5}, c_\sigma = (1, 2)^T$, 时间步长值为 0.01, 循环运行 500 次, 式(1)在不同时延下的运动轨迹图。从图中可以看出, 随着时延的增加, Swarm 中各个体逐渐聚集稳定, 当时延增加到一定的值时, 系统会出现震荡, 如图 6 所示。表明时延可以使 Swarm 系统产生复杂的动力学行为。

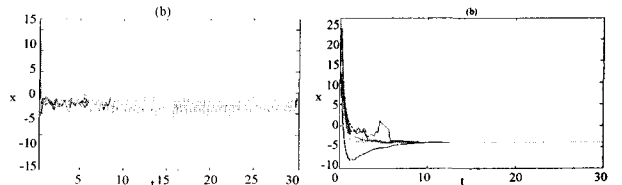


图 3 个体在 $\tau_{ij}(t) = 0.2, \zeta_{ji}(t) = 0.1$ 时的运动轨迹图

图 4 个体在 $\tau_{ij}(t) = 0.3, \zeta_{ji}(t) = 0.2$ 时的运动轨迹图

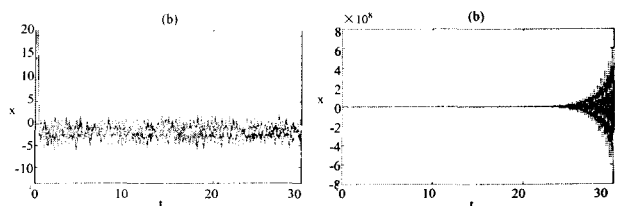


图 5 个体在 $\tau_{ij}(t) = \zeta_{ji}(t) = 0.1$ 时的运动轨迹图

图 6 个体在 $\tau_{ij}(t) = 0.4, \zeta_{ji}(t) = 0.3$ 时的运动轨迹图

结束语 本文在前人研究的基础上,提出了一类带交互时延和二次环境影响的 Swarm 模型,讨论了模型的稳定性问题,并得到了时延系统的稳定性及收敛的条件,此外具体考虑了在二次分布环境中时延 Swarm 的内聚性和其中心的运动情况。最后用仿真实验演示了结论的正确性并说明了在 Swarm 系统中由于时延的存在可能发生更复杂的动力学行为,其是否稳定或震荡,则主要取决于时延参数的取值范围。

参考文献

[1] Reif J H, Wang Hongyan. Social potential fields : A distributed behavioral control for autonomous robots[J]. Robotics & Autonomous Systems, 1999, 27(3): 171
 [2] Pachter M, Chandler P. Challenges of autonomous control[J]. Control Systems Magazine, IEEE, 1998, 18(4): 92-97
 [3] Lawton J R T, Beard R W, Young B J. A decentralized approach to formation maneuvers [J]. IEEE Trans. Robot Automat. , 2003, 19(6): 933-941
 [4] Jin K, Liang P, Beni G. Stability of synchronized distributed con-

trol of discrete swarm structures[C] // Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat. San Diego, 1994: 1033-1038
 [5] Gazi V, Passino K M. Stability analysis of swarms[J]. IEEE Trans. Automat. Contr. , 2003, 48(4): 692-697
 [6] Gazi V, Passino K M. A class of attraction/repulsion functions for stable swarm aggregations [C] // Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. Los Vegas, Nevada USA, Dec. 2002; 2842-2847
 [7] Gazi V, Passino K M. Stability analysis of social foraging swarm [J]. IEEE Trans. on Syst. Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2004, 34(1): 539-557
 [8] Liu Y, Passino K M, Polycarpou M M. Stability analysis of one-dimensional asynchronous swarms[J]. IEEE Trans. Automat. Contr. , 2003, 48(2): 1848-1854
 [9] Liu Y, Passino K M. Stable social foraging swarms in a noisy environment[J]. IEEE Trans. Automat. Contr. , 2004, 49(1): 30-44
 [10] Pedrami R, Gordon B W. Control and Cohesion of Energetic Swarms[C] // American Control Conference. Seattle, Washington, USA, June 2008; 129-134

(上接第 241 页)

参考文献

[1] Astley S M, Gilbert F J. Computer-aided detection in mammography[J]. Clinical Radiology, 2004, 59(5): 390-399
 [2] Cheng H D, Cai Xiao-peng, Chen Xiao-wei, et al. Computer-aided detection and classification of micro calcifications in mammograms; a survey[J]. Pattern Recognition, 2003, 36(12): 2967-2991
 [3] Sahiner B, Chan H P, Petrick N, et al. Classification of mass and normal breast tissue: a convolution neural network classifier with spatial domain and texture images[J]. IEEE Trans. Med. Imag. , 1996, 15(5): 598-610
 [4] Wei D, Chan H P, Helvie M A, et al. Classification of mass and normal breast tissue on digital mammograms; multi resolution texture analysis[J]. Medical Physics, 1995, 22(5): 1501-1513
 [5] Tourassi G D, Vargas-Voracek R, Catarious D M, et al. Computer-assisted detection of mammographic masses; a template matching scheme based on mutual information [J]. Medical Physics, 2003, 30(8): 2123-2130
 [6] Burges C J C. A tutorial on support vector machines for pattern recognition[J]. Data Mining and Knowledge Discovery, 1998, 2: 121-167
 [7] El-Naqa I, Yang Yong-yi, Wernick M N, et al. Support vector machine learning for detection of microcalcification in mammograms[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2002, 21(12): 1552-1563
 [8] Bazzani A, Bevilacqua A, Bollini D, et al. Automatic detection of clustered micro calcifications using a combined method and an SVM classifier [A] // 5th International Workshop on Digital Mammography[C]. 2000; 161-167
 [9] Papadopoulos A, Fotiadis D I, Likas A. Characterization of clustered micro calcifications in digitized mammograms using neural networks and support vector machines[J]. Artificial Intelligence in Medicine, 2005, 34(2): 141-150
 [10] Chapelle O, Zien A, Scholkopf B, et al. Semi-supervised learning[M]. MIT Press, 2006
 [11] Lewis D A, Gale W A. A Sequential Algorithm for Training Text Classifiers[A] // Proceedings of the Seventeenth Annual International ACM-SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval[C]. 1994
 [12] Cohn D A, Ghahramani Z, Jordan M I. Active Learning with Sta-

tistical Models[J]. Journal of Artificial Intelligence Research, 1996, 4: 129-145
 [13] Cohn D A. Minimizing Statistical Bias with Queries [J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 1997, 9
 [14] Roy N, McCallum A. Toward Optimal Active Learning Through Sampling Estimation of Error Reduction[A] // Proceedings of 18th International Conference on Machine Learning[C]. 2001
 [15] McAllester D A. Some PAC Bayesian Theorems[A] // Proceedings of the 11th Annual Conference on Computational Learning Theory[C]. Madison, Wisconsin, 1998
 [16] Freund Y, Seung H S, Shamir E, et al. Selective Sampling Using the Query by Committee Algorithm [J]. Machine Learning, 1997, 28: 133-168
 [17] Cohn D, Atlas L, Ladner R. Improving Generalization with Active Learning[J]. Machine Learning, 1994, 15: 201-221
 [18] Tong S, Koller D. Support Vector Machine Active Learning with Application to Text Classification[J]. Journal of Machine Learning Research, 2001; 45-66
 [19] Brinker K. Incorporating Diversity in Active Learning with Support Vector Machines [A] // International Conference on Machine Learning[C]. 2003
 [20] Ferecatu M, Crucianu M, Boujemaa N. Reducing the redundancy in the selection of samples for SVM-based relevance feedback [R]. 2004
 [21] Dagli C K, Rajaram S, Huang T S. Utilizing Information Theoretic Diversity for SVM Active Learning[A] // International Conference on Pattern Recognition[C]. Hong Kong, 2006
 [22] Jiang J, Ip H H S. Active Learning with SVM[M] // Rabuñal J R, Dorado J, Pazos A, eds. Encyclopedia of Artificial Intelligence; Information Science Reference, 2008
 [23] Cortes C, Vapnik V. Support Vector Network [J]. Machine Learning, 1995, 20: 273-297
 [24] Shave-Taylor J, Cristianini N. Further Results on the Margin Distribution[A] // Proceedings of the 12th Annual Conference on Computational Learning Theory[C]. 1999
 [25] <http://marathon.csee.usf.edu/Mammography/Database.html>
 [26] 万柏坤, 王瑞平, 朱欣, 等. SVM 算法及其在乳腺 X 片微钙化点自动检测中的应用[J]. 电子学报, 2004, 34(4): 587-590
 [27] 周伟达, 张莉, 焦李成. 支撑向量机推广能力分析[J]. 电子学报, 2001, 29(5): 590-594
 [28] 王宇. 基于 SVM 的乳腺癌微钙化簇检测系统[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2008