第45卷 第11期 计 算 机 科 学 Vol. 45 No. 11
2018年11月 COMPUTER SCIENCE Nov. 2018

虚拟网映射问题的计算复杂性分析

余建军[1] 吴春明[2]
(衢州职业技术学院 浙江 衢州 324000)[1] (浙江大学计算机系统结构与网络安全研究所 杭州 310027)[2]

摘 要 虚拟网映射是实现网络虚拟化的关键环节,其任务是在满足虚拟网构建约束的前提下,把虚拟网的虚拟节点和虚拟链路分别映射到底层物理网的节点和路径上。文中根据虚拟节点映射是否已知、物理网是否支持路径分割、物理节点是否支持重复映射等特征,对虚拟网映射问题进行分类,并针对一般网络拓扑模型和某些特殊网络拓扑模型完成各类虚拟网映射可行问题和优化问题的计算复杂性分析。

关键词 虚拟网映射,计算复杂性,强NP难问题,优化问题
中图法分类号 TP393 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.11.012

Computational Complexity Analysis of Virtual Network Mapping Problem

YU Jian-jun[1] WU Chun-ming[2]
(Quzhou College of Technology, Quzhou, Zhejiang 324000, China)[1]
(Institute of Computer System and Network Security, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)[2]

Abstract Virtual network mapping plays a central role in network virtualization, which maps the virtual nodes and virtual links to the underlying substrate network nodes and paths, respectively, while satisfying the constraint of virtual network construction. This paper categorized the virtual network mapping problem according to whether all the virtual nodes are already mapped, whether the substrate network supports path splitting and whether the substrate nodes support repeatable mapping, and then completed the computational complexity analysis of the feasibility and optimization problem of various virtual network mapping for the general network topology model and some special network topology models.

Keywords Virtual network mapping, Computational complexity, Strongly NP-hard problems, Optimization problem

1 概述

网络虚拟化是下一代互联网、移动通信网、云计算、软件定义网络和网络功能虚拟化的重要技术,该技术通过抽象、分配和隔离机制,在底层物理网上构建多个独立且可以是异构的虚拟网,从而为用户提供多样的网络服务[1-5]。虚拟网映射[6]是网络虚拟化的基础,它负责在底层物理网为虚拟网分配资源,且在分配资源时必须满足相应的约束条件。虚拟网映射问题是一个优化问题,其主要优化目标[6-9]是最大化物理网提供商的长期收益。

根据虚拟网构建请求是动态到达还是预先已知,可将虚拟网映射问题分为离线虚拟网映射问题[7]和在线虚拟网映射问题。在离线虚拟网映射问题中,其优化目标是最大化物理网提供商的收益。而在在线虚拟网映射问题中,当单个虚拟网构建请求到达后,必须在后续虚拟网构建请求未知的情况下,确定是否接受该请求,若接受则给出映射方案并完成映射。为提高物理网提供商的长期收益,在单个虚拟网构建的收益确定的前提下,单个虚拟网映射的优化目标一般设置为成本最小[6-8,10-12],如物理网资源消耗量最小、物理网负载均衡等。本文将以成本最小为优化目标的单个虚拟网映射问题称为单个虚拟网映射优化问题。

虚拟网映射问题极其复杂,除了根据虚拟网构建请求是否预先已知,来对虚拟网映射问题进行分类外,还可根据虚拟节点映射是否已知、底层物理网是否支持路径分割[6]和物理节点是否支持重复映射[11-12]等特征,将虚拟网映射问题分成6类(因为当虚拟节点映射已知时,不存在物理节点是否支持重复映射的问题)。

虚拟网映射问题的求解极具挑战性,关于各类虚拟网映射问题的计算复杂性的研究较少[7]且不完整,下面从4个方面总结已有研究。

1)关于单个虚拟网映射优化问题的结论。①文献[13]基于多路分割问题是NP难问题,得出虚拟节点映射未知、底层物理网不支持路径分割和物理节点不可重复映射的单个虚拟网映射优化问题是NP难问题的结论[1,7]。②若底层物理网不支持路径分割,则不管虚拟节点映射是否已知,单个虚拟网映射优化问题仍是NP难问题[14],而且是不可近似的NP难

到稿日期:2018-02-12 返修日期:2018-04-07 本文受浙江省自然科学基金资助项目(LY14F020010),国家863高技术研究发展计划项目(2015AA015602,2015AA016013)资助。
余建军(1969-),男,硕士,教授,主要研究方向为网络虚拟化技术以及算法设计与分析,E-mail:yjj691121@126.com(通信作者);**吴春明**(1967-),男,博士,教授,主要研究方向为互联网体系结构、柔性可重构网络、网络资源弹性管控与虚拟化、网络试验床、网络安全主动防御等。

问题[15]。③若底层物理网支持路径分割且虚拟节点映射已知,则单个虚拟网映射优化问题是P问题(多项式时间可解问题)[14-15],因为单个虚拟网映射优化问题可归约为相应的多商品流问题,而多商品流问题是P问题,可用线性规划来求解。由此可知,目前对6类单个虚拟网映射优化问题的分析并不完整。

2)关于单个虚拟网映射可行问题(指不考虑优化目标的单个虚拟网映射问题)的结论。①文献[8]证明了在物理节点可重复映射(意味着虚拟节点映射未知)且物理网不支持路径分割的情况下,单虚拟网映射可行问题是NPC问题。②文献[15]证明了在虚拟节点映射已知且物理网不支持路径分割的情况下,单虚拟网映射可行问题是NPC问题。③若底层物理网支持路径分割且虚拟节点映射已知,则单个虚拟网映射可行问题是P问题[14-15],因为单个虚拟网映射可行问题可以归约为相应的多商品流问题。由此可知,目前仅完成了6类单个虚拟网映射可行问题中3类问题的计算复杂性分析。

3)关于离线虚拟网映射问题。目前仅有文献[7]针对底层物理网不支持路径分割的情况,给出相关结论:①不管虚拟节点映射是否已知,离线虚拟网映射问题都是强NP-难问题;②只包含一个虚拟网请求的特殊离线虚拟网映射问题是强NP-难问题;③所有虚拟网请求只包含单个虚拟节点的特殊离线虚拟网映射问题是强NP-难问题;④物理网只包含单个节点的特殊离线虚拟网映射问题是弱NP-难问题。其实,由结论④可知,不管虚拟节点映射是否已知、物理网是否支持路径分割、物理节点是否支持重复映射,离线虚拟网映射问题都是NP-难问题。由此可知,目前针对离线虚拟网映射问题的计算复杂性分析较为完整。

4)关于在线虚拟网映射问题的结论。①文献[16]证明了任意确定(非随机)在线算法的竞争比会趋向于无穷大;②文献[15]证明了即使虚拟节点映射已知,任意确定在线算法的竞争比会趋向于无穷大。其实,从以上两个结论的证明过程[15-16]可知,即使物理网只有一个物理节点,任意确定在线算法的竞争比也会趋向于无穷大,则不论虚拟节点映射是否已知、物理网是否支持路径分割、物理节点是否支持重复映射,在线虚拟网映射问题的任意确定在线算法的竞争比会趋向于无穷大。

综上所述,离线虚拟网映射问题和在线虚拟网映射问题的计算复杂性分析较为完整,而关于单个虚拟网映射优化问题和单个虚拟网映射可行问题的计算复杂性分析尚不完整。本文针对单个虚拟网映射优化问题和单个虚拟网映射可行问题,首先,对已有计算复杂性分析结论的这类问题进行计算复杂性分析,证明它们是强NP-难问题或强NPC问题;然后,对尚没有计算复杂性分析结论的其他类问题,给出计算复杂性分析结论;最后,针对一些特殊网络拓扑模型下的单个虚拟网映射优化问题和可行问题进行计算复杂性分析。

2 网络模型和虚拟网映射问题描述

2.1 网络模型

物理网用无向图 $G^0=(N^0,E^0)$ 表示,其中 N^0 和 E^0 分别表示物理节点和物理链路的集合,$c(n_i^0)$ 和 $b(e_j^0)$ 分别表示第 i 个物理节点 n_i^0 的CPU容量和第 j 条物理链路 e_j^0 的链路带宽[7-8]。

虚拟网用无向图 $G^j=(N^j,E^j)$ 表示,其中 N^j 和 E^j 分别表示虚拟节点和虚拟链路的集合,$c(n_i^j)$ 和 $b(e_k^j)$ 分别表示第 i 个虚拟节点 n_i^j 的CPU容量和第 k 条虚拟链路 e_k^j 的链路带宽,物理网提供商完成该虚拟网映射后所获得的收益为 ρ_j。

2.2 映射问题描述

定义1(单个虚拟网映射可行问题) 给定一个物理网 $G^0=(N^0,E^0)$ 和一个虚拟网络 $G^j=(N^j,E^j)$,求解一个可行的虚拟网映射方案。虚拟网映射方案指将虚拟网络 G^j 映射到物理网 G^0 的一个子图上,具体可分解成可行的虚拟节点映射方案和可行的虚拟链路映射方案。1)虚拟节点映射方案指将每个虚拟节点 $n_i^j\in N^j$ 映射到某个物理节点上,该物理节点需要为 n_i^j 分配CPU容量 $c(n_i^j)$;若完成所有虚拟节点映射后,各物理节点上所分配的CPU容量之和没有超出各物理节点的CPU容量,则该方案称为可行的虚拟节点映射方案。2)虚拟链路映射方案指将每条虚拟链路 $e_i^j(e_i^j\in E^j)$ 映射到以 e_i^j 的两个节点所映射的物理节点为端点的无圈物理路径上,同时在所映射的物理路径上分配带宽 $b(e_i^j)$;若完成所有虚拟链路映射后,各物理链路上所分配的带宽之和没有超出各物理链路的带宽,则该方案称为可行的虚拟链路映射方案。

定义2(单个虚拟网映射优化问题) 给定一个物理网 $G^0=(N^0,E^0)$ 和一个虚拟网络 $G^j=(N^j,E^j)$,求解一个成本最小的可行虚拟网映射方案,其中可行的虚拟网映射方案的定义同定义1。在目前的研究中,成本的定义采用得最多的是物理网资源的绝对消耗量[8,17],文中成本的定义也采用此方法,即将成本定义为分配给虚拟网的物理节点CPU容量和物理链路带宽之和。

根据虚拟节点映射是否已知、物理网是否支持路径分割和物理节点是否支持重复映射,单个虚拟网映射可行问题和单个虚拟网映射优化问题都可细分为6种类型。另外,在物理节点支持重复映射的情况下,映射到相同物理节点的虚拟节点间的虚拟链路不用映射[8,11-12]。

3 计算复杂性分析

下面针对一般网络拓扑模型,对各类虚拟网映射可行问题和优化问题进行计算复杂性分析。

3.1 虚拟节点映射已知的情况

在该情况下,虚拟网映射可行问题和优化问题根据物理网是否支持路径分割均可以分为两类。当物理网支持路径分割时,如前所述,单个虚拟网映射可行问题和单个虚拟网映射优化问题都是P问题。当物理网不支持路径分割时结论如下。

定理1 若物理网不支持路径分割,则单个虚拟网映射可行问题是强NPC问题。

证明:1)任意给定该问题的一个映射方案,可在多项式时间内验证该方案是否可行,故该问题属于NP问题。2)边不相交路径问题是NPC问题[18],其定义如下:给定一个图 $G=(N,E)$,以及图 G 中的 m 个顶点对 $\{(u_i,v_i)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$,要求在图 G 中找到连接这 m 个顶点对的 m 条没有公共边的路径。3)边不相交路径问题可多项式时间归约到该类特定的单个虚

拟网映射可行问题，特定问题的构造如下：物理网 $G^0(N^0,E^0)=G$，所有物理链路带宽都为 1；虚拟网络 $G^j=(N^j,E^j)$，其中 $N^j=\{u_1,v_1\}\cup\cdots\cup\{u_k,v_k\}$，$E=\{(u_1,v_1)\}\cup\cdots\cup\{(u_k,v_k)\}$，所有的虚拟链路带宽都为 1。显然，该特定的单个虚拟网映射可行问题有可行解当且仅当对应的边不相交路径问题有可行解。故上述特定的单个虚拟网映射可行问题是 NPC 问题，并且该问题的参数都为常量，根据强 NPC 问题的定义[19]可知，结论成立的。

显然，作为强 NPC 问题，该类单个虚拟网映射可行问题(判定问题)可以多项式时间图灵归约到相应类的单个虚拟网映射优化问题，故有以下推论。

推论 1　若物理网不支持路径分割，则单个虚拟网映射优化问题是强 NP 难问题。

3.2　虚拟节点映射未知的情况

在该情况下，虚拟网映射可行问题和优化问题根据物理网是否支持路径分割和物理节点是否支持重复映射，均可以分为 4 类。

定义 3(虚拟节点映射可行问题)　给定一个物理网$G^0=(N^0,E^0)$和一个虚拟网络 $G^j=(N^j,E^j)$，求解一个虚拟节点映射方案，该方案必须满足：1)可行的虚拟节点映射方案；2)存在一个或多个可行的虚拟链路映射方案。

文献[20]证明了物理节点不支持重复映射、物理网支持路径分割的虚拟节点映射可行问题是 NP 难问题。由虚拟节点映射可行问题的定义可知，该问题可多项式时间归约到相应的单个虚拟网映射可行问题；同时，任意给定单个虚拟网映射可行问题的一个映射方案，可在多项式时间内验证该方案是否可行，故有以下推论。

推论 2　若物理网支持路径分割且物理节点不支持重复映射，则单个虚拟网映射可行问题是 NPC 问题。

定理 2　若物理网支持路径分割且物理节点不支持重复映射，则单个虚拟网映射优化问题是强 NP-难问题。

证明：1)满足三角不等式的旅行商问题(TSP)是强 NP-难问题。证明如下：①满足三角不等式的旅行商问题[21]的定义为：给定一个完全无向图 $G=(V,E)$，其中每条边$(u,v)\in E$的距离是 $d(u,v)$，且任意 3 个顶点 u,v 和 w 之间的距离满足三角不等式 $d(u,v)\leqslant d(u,w)+d(w,v)$；要求找出 G 中距离最短的哈密顿环。②哈密顿环问题是指在给定的无向图 $G'=(V',E')$中，求解一个包含图 G'中所有顶点的一个圈(圈中顶点不重复)，即求解哈密顿环，哈密顿环问题是 NPC 问题[19]。③哈密顿环问题可多项式时间归约到特定的满足三角不等式的旅行商问题，特定问题的构造如下：完全无向图 $G=(V',E)$，$E=\{(u,v)\mid u,v\in V'\}$，若 E 中边$(u,v)\in E'$，则 $d(u,v)=1$；若 E 中边$(u,v)\in E-E'$，则 $d(u,v)=2$；这样的设置使任意 3 个顶点之间的距离满足三角不等式。显然，该特定的满足三角不等式的旅行商问题有解当且仅当对应的哈密顿环问题有可行解。故满足三角不等式的旅行商问题是 NP-难问题，并且该问题的参数都为常量，根据强 NP-难问题的定义[19]可知，满足三角不等式的旅行商问题是强 NP-难问题。

2)最紧凑节点映射问题[17]是强 NP-难问题。证明如下：①最紧凑节点映射问题的定义为：已知点的集合 N，第 i 个点 n_i 和第 j 个点 n_j 之间的距离 $d_{ij}=\mathrm{dist}(n_i,n_j)\geqslant 0(1\leqslant i,j\leqslant|N|)$，且任意 3 点之间的距离满足三角不等式(因为 d_{ij} 表示两点之间最短路径的长度[17])；节点簇的集合 $C=\{c_i\mid 1\leqslant i\leqslant k\}$，$c_i\subseteq N(1\leqslant i\leqslant k)$，簇间的需求 $R=\{r_{xy}\mid 1\leqslant x,y\leqslant k,x\neq y\}$，$r_{xy}\geqslant 0(1\leqslant x,y\leqslant k)$。问：是否存在点序列 $V=\langle v_1,v_2,\cdots,v_k\rangle$，其中 $v_i\in c_i(1\leqslant i\leqslant k)$，满足如果 $i\neq j$，则 $v_i\neq v_j$ 且 $\sum\limits_{r_{xy}\in R}\mathrm{dist}(v_x,v_y)\times r_{xy}$ 最小化。②满足三角不等式的旅行商问题可多项式时间归约到特定最紧凑节点映射问题。特定问题的构造如下：点的集合 $N=V$，第 i 个点n_i 和第 j 个点n_j 之间的距离 $d_{ij}=d(n_i,n_j)(1\leqslant i,j\leqslant|N|)$，且任意 3 个顶点之间的距离满足三角不等式；节点簇的集合 $C=\{c_i\mid 1\leqslant i\leqslant|N|\}$，$c_i=N(1\leqslant i\leqslant|N|)$，簇间的需求 $R=\{r_{xy}\mid 1\leqslant x,y\leqslant|N|,x\neq y\}$，如 $y=x+1$ 或 $x=|N|\wedge y=1$，则 $r_{xy}=1$，否则 $r_{xy}=0$。问：是否存在点序列 $V=\langle v_1,v_2,\cdots,v_{|N|}\rangle$，其中 $v_i\in c_i(1\leqslant i\leqslant|N|)$，满足如果 $i\neq j$，则 $v_i\neq v_j$，且 $\sum\limits_{r_{xy}\in R}\mathrm{dist}(v_x,v_y)\times r_{xy}$ 最小化。显然，该特定最紧凑节点映射的最优解与对应的满足三角不等式的旅行商问题的最优解对应。由于满足三角不等式的旅行商问题(TSP)是强 NP-难，因此最紧凑节点映射问题是强 NP-难问题。

3)由于最紧凑节点映射问题与物理链路带宽资源不受限的该类单个虚拟网映射优化问题等价[17]，因此物理链路带宽资源不受限的该类单个虚拟网映射优化问题是强 NP-难问题。

4)由于物理链路带宽资源不受限的该类单个虚拟网映射优化问题可以图灵归约到该类单个虚拟网映射优化问题(只要将物理链路的带宽设置得足够大，如每条物理链路的带宽等于所有虚拟链路带宽之和)，因此当物理网支持路径分割且物理节点不支持重复映射时，单个虚拟网映射优化问题是强 NP-难问题。

定理 3　若物理网支持路径分割且物理节点支持重复映射，则单个虚拟网映射可行问题是强 NPC 问题。

证明：1)装箱问题是强 NPC 问题[19]，其定义为：给定 K 个容量为 B 的箱子；n 个物品集合$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，每个物品 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$的大小是 s_i；问能否将这 n 个物品装入这 K 个箱子中，要求装入每个箱子中的物品的大小之和小于或等于 B。2)装箱问题可以多项式时间归约到该类特定的单个虚拟网映射可行问题，该特定问题的构造如下：物理网 $G^0=(N^0,\varnothing)$，$|N^0|=K$；所有物理节点的 CPU 容量为 B；虚拟网络 $G^j=(N^j,\varnothing)$，$|N^j|=n$，虚拟网的第 i 个虚拟节点 n_i^j 的 CPU 容量是 s_i。显然，该特定的单个虚拟网映射可行问题有可行解当且仅当对应的装箱问题有可行解。因此，若物理网支持路径分割且物理节点支持重复映射，则单个虚拟网映射可行问题是强 NPC 问题。

由于当物理网支持路径分割且物理节点支持重复映射时，单个虚拟网映射可行问题可以图灵归约到该情况下的单个虚拟网映射优化问题，故有以下推论。

推论 3　若物理网支持路径分割且物理节点支持重复映射，则单个虚拟网映射优化问题是强 NP 难问题。

根据定理1和推论1,显然推论4和推论5成立。

推论4 若物理网不支持路径分割,则单个虚拟网映射可行问题是强NPC问题,不管物理节点是否支持重复映射,该结论都成立。

推论5 若物理网不支持路径分割,则单个虚拟网映射优化问题是强NP-难问题,不管物理节点是否支持重复映射,该结论都成立。

4 特殊情况下的计算复杂性分析

下面针对某些特殊网络拓扑模型,完成各类虚拟网映射可行问题和优化问题的计算复杂性分析。

从定理3和推论3的证明过程可直接得到推论6和推论7。

推论6 若物理节点支持重复映射,则即使物理网和虚拟网只有节点没有链路,单个虚拟网映射可行问题仍是强NPC问题,不管物理网是否支持路径分割,该结论都成立。

推论7 若物理节点支持重复映射,则即使物理网和虚拟网只有节点没有链路,单个虚拟网映射优化问题仍是强NP-难问题,不管物理网是否支持路径分割,该结论都成立。

需要说明的是,若物理节点不支持重复映射,则物理网和虚拟网的网络拓扑模型都是只有在节点没有链路的情况下,单个虚拟网映射可行问题和单个虚拟网映射优化问题是P问题,与属于P问题的二分图匹配问题[22]等价。

定理4 若物理节点不支持重复映射,则即使物理网$G^0=(N^0,E^0)$是满足$|N^0|=|E^0|+1$的连通图(即物理网就是一条路径或线),单个虚拟网映射优化问题依然是强NP-难问题。不管物理网是否支持路径分割,上述结论都成立,且即使映射时不考虑容量约束条件,上述结论依然成立。

证明:显然,若物理网的网络拓扑模型是一条线,则一旦确定虚拟节点映射方案,对应的虚拟链路映射方案是唯一的,因为任意两个物理节点之间的物理路径是唯一的。1)满足$d_{kl}=|k-l|$,$c_{ij}=c_{ji}\in\{0,1\}$的二次分配问题,即最优线性分配问题是NP难问题[23-24]。二次分配问题的定义如下:给定n个设施和m个地点,任意两个设施i和j之间的费用为c_{ij}($1\leqslant i,j\leqslant n$),任意两个地点$k$和$l$之间的距离为$d_{kl}$($1\leqslant k,l\leqslant m$),求一个一对一函数$f:\{1,2,\cdots,n\}\rightarrow\{1,2,\cdots,m\}$(即给每个设施分配一个地点),使代价$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}\times d_{f(i)f(j)})$最小。2)最优线性分配问题可多项式时间归约到该类特定的单个虚拟网映射优化问题。特定问题的构造如下:物理网$G^0(N^0,E^0)$,$N^0=\{n_1^0,n_2^0,\cdots,n_m^0\}$,物理节点的CPU容量都为1,$E^0=\{(n_1^0,n_2^0),(n_2^0,n_3^0),\cdots,(n_p^0,n_{p+1}^0),\cdots,(n_{m-1}^0,n_m^0)\}$,任意物理链路的带宽等于$n$。显然,任意两个物理节点$n_k^0$和$n_l^0$之间只有一条物理路径,且路径长度记为$d_{kl}=|k-l|$。虚拟网络$G^1=(N^1,E^1)$是完全图,其中$N^1=\{n_1^1,n_2^1,\cdots,n_n^1\}$,虚拟节点的CPU容量都为1,虚拟链路$(n_i^1,n_j^1)$的带宽等于$c_{ij}$(取值为0或1)。显然,一个可行的虚拟网映射方案的映射成本等于$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}\times d_{f(i)f(j)})+n$,其中虚拟节点映射成本都为$n$,$f(i)$和$f(j)$分别表示虚拟节点$n_i^1$和$n_j^1$所映射物理节点的序号。显然,该特定的单个虚拟网映射优化问题的最优解所对应的虚拟节点映射方案为$\{f(1),f(2),\cdots,f(n)\}$,当且仅当一对一函数$\{1,2,\cdots,n\}\rightarrow\{f(1),f(2),\cdots,f(n)\}$是对应的最优线性分配问题的最优解。故上述特定的单个虚拟网映射优化问题是NP-难问题,并且该问题的参数都为常量和虚拟节点数,根据强NPC问题的定义[19]可知,结论成立。

定理5 若物理节点不支持重复映射,物理网不支持路径分割,则即使虚拟节点映射已知,虚拟网是高度为1的树,单个虚拟网映射可行问题依然是NPC问题。

证明:1)单源不可分割流问题是NPC问题[25]。单源不可分割流问题的定义如下:给定一个无向图$G=(V,E)$、一个源顶点$s\in V$和K个目的顶点$\{t_i|1\leqslant i\leqslant k\}$,其中,$t_i\in V$($1\leqslant i\leqslant k$),每条边$(u,v)\in E$的容量是$c(u,v)$,源顶点$s$到目的顶点$t_i$($1\leqslant i\leqslant k$)的容量需求是$D_i$。问:在图$G$中,能否对每个顶点对$(s,t_i)$($1\leqslant i\leqslant k$)找到一条$s$-$t_i$路径(需在该路径的每条边上占用容量$D_i$),并且在图$G$的每条边$(u,v)$上所占用的容量之和不能超出$c(u,v)$。2)单源不可分割流问题可以多项式时间归约到该类特定的单个虚拟网映射可行问题。该特定问题的构造如下:物理网$G^0(N^0,E^0)=G=(V,E)$,每条边$(u,v)\in E$的容量是$c(u,v)$。虚拟网络$G^1=(N^1,E^1)$,其中$N^1=\{s,t_1,t_2,\cdots,t_k\}$,$E^1=\{(s,t_i)|1\leqslant i\leqslant k\}$,虚拟链路$(s,t_i)$($1\leqslant i\leqslant k$)的带宽等于$D_i$。显然,该单个虚拟网映射可行问题有可行解当且仅当对应的单源不可分割流问题有可行解,故结论成立。

定理6 若物理节点不支持重复映射,物理网支持路径分割,且虚拟链路所映射的每条路径上所分配的虚拟链路带宽为正整数(即意味着虚拟链路带宽为正整数),则即使虚拟网只包含4个虚拟节点、2条不相交虚拟链路,单个虚拟网映射可行问题依然是NPC问题。

证明:1)2-商品整体流问题是NPC问题[23]。2-商品整体流问题的定义如下:给定一个无向图$G=(V,E)$、两个源顶点$s_1,s_2\in V$和两个目的顶点$t_1,t_2\in V$,其中每条边$e\in E$的容量是$c(e)$,顶点对(s_i,t_i)($1\leqslant i\leqslant 2$)的容量需求是R_i。问在图G中,是否能找到满足边容量约束、容量需求约束和流正整数要求约束条件的可行的网络流。2)2-商品整体流问题可以多项式时间归约到该类特定的单个虚拟网映射可行问题。该特定问题的构造如下:物理网$G^0(N^0,E^0)=G=(V,E)$,物理节点的CPU容量都为1,每条边$e\in E$的容量是$c(e)$。虚拟网络$G^1=(N^1,E^1)$,其中$N^1=\{s_1,s_2,t_1,t_2\}$,$E^1=\{(s_i,t_i)|1\leqslant i\leqslant 2\}$,虚拟链路$(s_i,t_i)$($1\leqslant i\leqslant 2$)的带宽等于$R_i$,虚拟节点的CPU容量都为1。显然,该单个虚拟网映射可行问题有可行解当且仅当对应的2-商品整体流问题有可行解,故结论成立。

结束语 本文完成了各类虚拟网映射可行问题和优化问题的计算复杂性分析,使得关于虚拟网映射问题的计算复杂性分析更为完整。由分析过程和结论可知,物理节点支持重复映射增加了问题的计算复杂性,而物理网支持路径分割降低了问题的计算复杂性。

参考文献

[1] CHOWDHURY N,BOUTABA R. A survey of network virtualization[J]. Computer Networks,2010,54(5):862-876.

[2] LIU C X,LU G Q,TANG H B,et al. Adaptive Deployment Method for Virtualized Network Function Based on Viterbi

Algorithm[J]. Journal of Electronics & Information Technology,2016,38(11):2922-2930.(in Chinese)
刘彩霞,卢干强,汤红波,等.一种基于 Viterbi 算法的虚拟网络功能自适应部署方法[J].电子与信息学报,2016,38(11):2922-2930.

[3] YE Z L,ZHU Y Q,JI P N,et al. Virtual infrastructure mapping in software-defined elastic optical networks[J]. Photonic Network Communications,2017,34(1):34-44.

[4] WEN X M,HAN Y N,YU B,et al. A Topology-Aware VDC Embedding Algorithm in Software-Defined Datacenter[J]. Journal of Computer Research and Development,2016,53(4):785-797.(in Chinese)
文学敏,韩言妮,于冰,等.软件定义数据中心内一种基于拓扑感知的 VDC 映射算法[J].计算机研究与发展,2016,53(4):785-797.

[5] HOUIDI I,LOUATI W,ZEGHLACHE D. Exact Multi-Objective Virtual Network Embedding in Cloud Environments[J]. The Computer Journal,2015,58(3):403-415.

[6] FISCHER A,BOTERO J F,BECK M T,et al. Virtual Network Embedding:A Survey[J]. IEEE Communications Surveys and Tutorials,2013,15(4):1888-1906.

[7] AMALDI E,CONIGLIO S,KOSTER A,et al. On the computational complexity of the virtual network embedding problem[J]. Electronic Notes in Discrete Mathematics,2016,52:213-220.

[8] YU J J,WU C M. Virtual network mapping strategy and competitive analysis based on cost constraint[J]. Telecommunications Science,2016,32(2):47-54.(in Chinese)
余建军,吴春明.基于成本约束的虚拟网映射策略及竞争分析[J].电信科学,2016,32(2):47-54.

[9] SU Y Z,MENG X R,MENG Q W,et al. Environment Adaptive and Joint Topology Aware Virtual Network Embedding Algorithm[J]. Journal of Electronics & Information Technology,2018,40(1):79-86.(in Chinese)
苏玉泽,孟相如,孟庆微,等.环境自适应的拓扑联合感知虚拟网映射算法[J].电子与信息学报,2018,40(1):79-86.

[10] HU Y,ZHUANG L,LAN J L,et al. Energy Aware Virtual Network Embedding Using Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Adaptive Cooperative Coevolution[J]. Journal of Electronics & Information Technology,2016,38(10):2660-2666.(in Chinese)
胡颖,庄雷,兰巨龙,等.基于自适应协同进化粒子群算法的虚拟网节能映射研究[J].电子与信息学报,2016,38(10):2660-2666.

[11] WANG C,YUAN Y,PENG S C,et al. Fair Virtual Network Embedding Algorithm with Topology Pre-Configuration[J]. Journal of Computer Research and Development,2017,54(1):212-220.(in Chinese)
王聪,苑迎,彭三城,等.基于拓扑预配置的公平虚拟网络映射算法[J].计算机研究与发展,2017,54(1):212-220.

[12] LI W,WU C M,CHEN J,et al. Virtual Network Mapping Algorithm with Repeatable Mapping over Substrate Nodes[J]. Journal of Electronics & Information Technology,2011,33(4):908-914.(in Chinese)
李文,吴春明,陈健,等.物理节点可重复映射的虚拟网映射算法[J].电子与信息学报,2011,33(4):908-914.

[13] ANDERSEN D. Theoretical approaches to node assignment[EB/OL]. http://www.cs.cmu.edu/~dga/papers/andersen-assign.ps,2002.

[14] YU M,YI Y,REXFORD J,et al. Rethinking virtual network embedding:Substrate Support for path splitting and migration[J]. ACM SIGCOMM on Computer Communication Review,2008,38(2):17-29.

[15] YU J J,WU C M. Design and Analysis of Virtual Network Mapping Competitive Algorithms[J]. Computer Science,2015,42(2):33-38.(in Chinese)
余建军,吴春明.虚拟网映射竞争算法设计与分析[J].计算机科学,2015,42(2):33-38.

[16] YU J J,WU C M. Virtual Network Mapping Approximation Algorithm with Admission Control[J]. Journal of Electronics & Information Technology,2014,36(5):1235-1241.(in Chinese)
余建军,吴春明.支持接入控制的虚拟网映射近似算法[J].电子与信息学报,2014,36(5):1235-1241.

[17] LIU X G,HUAI J P,GAO Q Y,et al. A Virtual Network Embedding Approach to Preserving Node Closeness[J]. Chinese Journal of Computers,2012,35(12):2492-2504.(in Chinese)
刘新刚,怀进鹏,高庆一,等.一种保持结点紧凑的虚拟网络映射方法[J].计算机学报,2012,35(12):2492-2504.

[18] KLEINBERG J M. Approximation algorithms for disjoint paths problems[J]. Operations Research Letters,1996,35(4):533-540.

[19] GAREY M R,JOHNSON D S. "Strong" NP-Completeness Results:Motivation,Examples,and Implications[J]. Journal of the Association for Computing Machinery,1978,25(3):499-508.

[20] HOU Y,ZAFER M,LEE K,et al. On the mapping between logical and physical topologies[C]//Proceedings of the 1st International Conference on Communication Systems and Networks (COMSNETS'09). Bangalore:IEEE Press,2009:483-492.

[21] QI Y H,CAI Y G,CAI H,et al. Chaotic Hybrid Discrete Bat Algorithm for Traveling Salesman Problem[J]. Acta Electronica Sinica,2016,44(10):2543-2547.(in Chinese)
戚远航,蔡延光,蔡颢,等.旅行商问题的混沌混合离散蝙蝠算法[J].电子学报,2016,44(10):2543-2547.

[22] YU J J,WU C M. Design of Virtual Network Mapping Algorithm Based on K-Best Perfect Matchings of Bipartite Graph[J]. Telecommunications Science,2014,30(2):70-75.(in Chinese)
余建军,吴春明.基于二分图 K 优完美匹配的虚拟网映射算法设计[J].电信科学,2014,30(2):70-75.

[23] GAREY M R,JOHNSON D S. Computers and Intractability:A Guide to The Theory of NP-Completeness[M]. New York:W. H. Freeman and Company,1979:190-218.

[24] ZHONG Y W,CAI R Y. Discrete Particle Swarm Optimization Algorithm for QAP[J]. Acta Automatica Sinica,2007,33(8):871-874.(in Chinese)
钟一文,蔡荣英.求解二次分配问题的离散粒子群优化算法[J].自动化学报,2007,33(8):871-874.

[25] BAIER G,SKUTELLA M. On the k-Splittable Flow Problem[J]. European Symposium on Algorithms,2002,42(3):101-113.