新型软粗糙集:软粗糙半群

路怡瑶 孔祥智

(江南大学理学院 江苏 无锡 214122)

摘 要 为进一步简化处理不确定性问题的方法,在半群上研究了一种新型的软粗糙集(MSR-半群)。首先,基于软集、粗糙集和半群的一些基本理论,对它们之间的关系进行深入研究,并讨论了软粗糙集的运算和基本性质;接着,为了进一步了解软逼近空间,应用了下软粗糙逼近和上软粗糙逼近的概念;同时,在半群上提出了两种特殊软集即 G-软集和 GG-软集的概念,对其做相应的运算,并给出实例进行了证明;接着,对 MSR-逼近空间的粗糙性进行讨论,提出了 MSR-半群的概念,并且研究了上 MSR-半群和下 MSR-半群的基本特征;最后,通过实例进行比较分析,说明了软粗糙半群的研究价值。

关键词 粗糙集,软粗糙集,MSR-集,MSR-半群

中图法分类号 O144.1,O159 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2019.02.035

Novel Soft Rough Set:Soft Rough Semigroups

LU Yi-yao KONG Xiang-zhi

(School of Science,Jiangnan University,Wuxi,Jiangsu 214122,China)

Abstract In order to further simplify the method of dealing with the problem of uncertainty,this paper studied a new type of soft rough set (MSR-semigroup) on semigroups. First of all,based on some basic theories of soft sets,rough sets and semigroups,the relationship among them were deeply studied,and the operation and basic properties of soft rough sets were discussed. Then,in order to further understand the soft approximation space,the concepts of the lower and upper soft rough approximation were applied. At the same time,two special soft sets G-soft sets and GG-soft sets were proposed on semigroups,corresponding operations were given and some examples were given. Then,the roughness of the soft approximation space was discussed,the concept of MSR-semigroups was proposed,and the basic characteristics of the upper and lower MSR-semigroups were studied. Finally,a comparative analysis of example shows the research value of the soft rough semigroup.

Keywords Rough set,Soft rough set,MSR-sets,MSR-semigroups

1 引言

粗糙集理论由波兰数学家 Pawlak 于 1982 年首次提出,它作为一种重要的数学工具,在处理不确定性管理的问题中,与智能决策、认知科学、模式识别、机器学习和图像处理等领域广泛结合。根据粗糙集的定义,在全域中的一个子集上建立一种等价关系,而在 Pawlak 粗糙集中这种等价关系通常在理论和应用等方面都会受到限制。因此,许多研究者通过利用非等价关系对 Pawlak 粗糙集的概念进行推广[1-2];同时,粗糙集理论还可以被应用到代数结构中[3-5]。

为了进一步发展不确定性理论,俄国学者 Molodtsov 于 1999 年提出了一种新概念——软集。作为一种解决不确定性问题的重要数学工具,软集对描述的物体没有任何限制条件,这大大简化了决策过程,尤其对缺乏物质信息的问题决策更有效。近年来,对软集理论的研究发展迅速[6-8],但是在现实生活中很多领域的属性都具有模糊性,从而促使很多学者开始对软集进行扩展研究。用集合的代数结构处理不确定性问题已经被很多学者所关注,因此软集作为集合的理论分支,其代数结构自然也得到了很多学者的重视。Aktas 等[9]定义了软群的概念;Feng 等[10]将软集理论和半环代数结构相结合,得到了一种新的代数结构——软半环。另一方面,半群代数理论系统是一个二元运算的代数系统,其研究始于 20 世纪 50 年代。半群理论已成为代数学的一个公认分支学科,并以其特有的方法早已独立于群论和环论之外,在形式语言和自动机等领域都有具体的研究。在处理很多不确定性问题时,软集合理论主要运用参数化法,而粗糙集理论主要依靠构造隶属函数。然而,许多复杂的实际问题仅仅依靠其中一种数学工具得不到解决,需要粗糙性和参数化来共同简化问题,此时,粗糙集理论和软集合理论可以作为两种不同的工具来共同解决复杂的不确定性问题。显然,这两种理论之间没有直接的联系,为了能够在粗糙集中应用参数化工具,Feng 引入了新概念——软粗糙集。为解决理论和实际应用等方面的问

到稿日期:2017-12-04 返修日期:2018-02-22 本文受国家自然科学基金(11371174,11301227),江苏省科学基金(BK20130119)资助。

路怡瑶(1994－),女,硕士生,主要研究方向为模糊代数,E-mail:luyiyaolyy@163.com;**孔祥智**(1971－),男,博士,教授,主要研究方向为模糊代数,E-mail:xiangzhikong@jiangnan.edu.cn(通信作者)。

题，要求这里的软集必须是完整软集。

若弱化对软集的要求，即如果不是完整软集，经证明得到这种不完整的软集显然不满足软粗糙集的定义。因此，本文引入新概念——MSR-集，提出了两种特殊软集的概念，给出其运算性质并应用实例来进行证明；基于此，进一步研究了软集、粗糙集和半群之间的关系，在半群上讨论了软粗糙集的基本性质，提出了粗糙半群的延伸概念——软粗糙半群，并结合其基本性质给予新的运算与应用。

2　预备知识

本节首先回顾关于半群、软集和粗糙集的一些基本理论。

定义 1[1]　设 S 是一个非空集合，“$\cdot$”是 S 上的一个代数运算，若所有的 $x,y,z\in S$ 均满足条件：$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$，则称 S 关于运算“$\cdot$”构成一个半群，记作 $(S,\cdot)$。

(1) 如果半群 S 包含单位元素 1 且满足对于所有的 $x\in S$，有 $x\cdot 1=1\cdot x=x$，那么称元素 1 是 S 的单位元，称 S 为一个含单位元半群或幺半群。如果 S 是一个含零半群，则对于所有 $x\in S,0\in S$，有 $0\cdot x=x\cdot 0=0$。

(2) 如果半群 S 的运算满足交换律，即对于任意的 $x,y\in S$，有 $x\cdot y=y\cdot x$，那么称 S 是一个交换半群或阿贝尔半群。

(3) 设 S 是一个半群，A 是 S 的一个非空子集，如果 A 是关于 S 上的运算封闭，即对于所有的 $x,y\in A$，有 $x\cdot y\in A$，则 A 被称为 S 的一个子半群。

(4) 设 S 是一个半群，A 是 S 的一个非空子集，若 $SA\subseteq A$ $(AS\subseteq A)$，则称 A 是 S 上的一个左理想(右理想)。若 A 在 S 中既是左理想又是右理想，则称 A 是 S 的一个理想。若 $ASA\subseteq A$，则称 A 是 S 的一个双理想。

定义 2[2]　设 U 是全域集，E 是参数集，$P(U)$ 为 U 的幂集，且集合 $A\subseteq E$，F 是一个集值映射，即 $F:A\to P(U)$，则称 (F,A) 是 U 上的一个软集。

假设 e_n 为 A 中的任意一个元素，定义 2 表示每个 $F(e_n)$ 都可以看作 (F,A) 中 e_n 元素的一个集合或者 e_n 近似元素的集合。

定义 3[3]　设 U 是全域集，E 是参数集，$P(U)$ 为 U 的幂集，且 $A=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}\subseteq E$，$(F,A)$ 是 U 上的一个软集。

如果 $\bigcup\limits_{e_i\in A}F(A)=U$，即满足 $F(e_1)\cup F(e_2)\cup\cdots\cup F(e_n)=U$，则称软集 (F,A) 为 U 上的完整软集。

定义 4[4]　令 R 为全域 U 上的等价关系，(U,R) 是一个 Pawlak 逼近空间，设 X 是 U 的一个非空子集，即 $X\subseteq U$，若 $R_*X=R^*X$，则称 X 是可定义的。若 $R_*X-R^*X\neq\varnothing$，则称 X 为粗糙集。其中的两种运算被定义为：

$$R_*X=\{x\in U:[x]_R\subseteq X\}$$

$$R^*X=\{x\in U:[x]_R\cap X\neq\varnothing\}$$

其中，$[x]_R$ 表示在 U 上与元素 x 有 R 等价关系的所有元素的集合。

引理 1[5]　假设 (U,R) 是 Pawlak 逼近空间，其中 R 为全域 U 上的等价关系，$A,B\subseteq U$，则有：

$$R_*(A)\subseteq A\subseteq R^*(A)$$

$$R_*(\varnothing)=\varnothing=R^*(\varnothing)$$

$$R_*(U)=U=R^*(U)$$

$$R_*(R_*(A))=R_*(A)$$

$$R^*(R^*(A))=R^*(A)$$

$$R^*(R_*(A))=R_*(A)$$

$$R_*(R^*(A))=R^*(A)$$

$$R_*(A)=(R^*(A^c))^c$$

$$R^*(A)=(R_*(A^c))^c$$

$$R_*(A\cap B)=R_*(A)\cap R_*(B)$$

$$R^*(A\cap B)\subseteq R^*(A)\cap R^*(B)$$

$$R_*(A\cup B)\supseteq R_*(A)\cap R_*(B)$$

$$R^*(A\cup B)\supseteq R^*(A)\cup R^*(B)$$

$$A\subseteq B\to\begin{cases}R_*(A)\subseteq R_*(B)\\R^*(A)\subseteq R^*(B)\end{cases}$$

定义 5[6]　设 $G=(F,A)$ 是 U 上的软集，则称 $P=(U,G)$ 为软逼近空间。对于 $X\subseteq U$，在 P 的基础上，定义以下两种运算：

$$\underline{apr_P}(X)=\{u\in U\mid\exists a\in A[u\in F(a)\subseteq X]\}$$

$$\overline{apr_P}(X)=\{u\in U\mid\exists a\in A[u\in F(a),F(a)\cap X\neq\varnothing]\}$$

则称 $\underline{apr_P}(X)$，$\overline{apr_P}(X)$ 分别为在 P 上关于 X 的下软粗糙逼近和上软粗糙逼近。若 $\underline{apr_P}(X)==\overline{apr_P}(X)$，则称 X 是软可定义的；否则，称 X 是软粗糙集。

根据定义 5，显然有 $\underline{apr_P}(X)\subseteq X\subseteq\overline{apr_P}(X)$。

注 1　为解决理论和实际应用等方面的问题，在定义 5 中，只有 $\underline{apr_P}(X)\subseteq X\subseteq\overline{apr_P}(X)$ 恒成立时，才能更深一步研究软粗糙集，这必须要求软集 $G=(F,A)$ 是完整软集；否则，与恒成立的式子矛盾，从而直接限制了它的研究价值。

例 1　若 $G=(F,A)$ 是 U 上的软集，由表 1 所列数据可知 $P=(U,G)$ 为软逼近空间，而由定义 3 可知 $G=(F,A)$ 不是完整的。

表 1　软集 G

Table 1　Soft set G

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
e_1	1	0	1	1	0	0	0
e_2	0	1	0	0	0	1	0
e_3	1	0	1	1	0	0	1

不妨令 $X=\{u_1,u_2,u_5,u_6\}$，根据定义 5 中的 $\underline{apr_P}(X)=\{u_2,u_6\}$，$\overline{apr_P}=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_6,u_7\}$，得到 $X\nsubseteq\overline{apr_P}(X)$，这显然与注 1 的要求矛盾。

为避免此种情况的出现，下文将讨论另一种软粗糙集，并将其应用到半群中。

3　MSR-集

本节首先介绍另一种软粗糙集(MSR-集)的概念，然后给出两种特殊软集，在半群上研究其相应的运算与性质。

定义 6[7]　(F,A) 为 U 上的软集，映射 $\varphi:U\to P(A)$ 定义为：$\varphi(x)=\{a\mid x\in F(a)\}$，则称 (U,φ) 为 MS-逼近空间。对于任意的一个集合 $X\subseteq U$，定义以下两种运算：

$$\underline{X}_\varphi=\{x\in X\mid\forall y\in X^c,\varphi(x)\neq\varphi(y)\}$$

$$\overline{X}_\varphi=\{x\in U\mid\exists y\in X,\varphi(x)=\varphi(y)\}$$

则称 $\underline{X}_\varphi$ 和 $\overline{X}_\varphi$ 分别为 X 的下 MSR-逼近和上 MSR-逼近。若 $\underline{X}_\varphi=\overline{X}_\varphi$，则称 X 是 MS-可定义的；否则称 X 为 MSR-集。

根据定义 6，显然有 $\underline{X}_\varphi\subseteq X\subseteq\overline{X}_\varphi$。

注2 上述定义中,对于任意的 $X\subseteq U$,无论软集(F,A)是否完整,都有$\underline{X}_\varphi\subseteq X\subseteq\overline{X}_\varphi$。为便于理解,下面通过例2来进行说明。

例2 假设(F,A)是U上的软集,如表2所列,(U,φ)是MS-逼近空间,根据定义3可得软集(F,A)是不完整的。映射$\varphi:U\to P(A)$定义为:$\varphi(x)=\{a\mid x\in F(a)\}$,由表2可知,$\varphi(u_1)=\varnothing$,$\varphi(u_2)=\varphi(u_5)=\varphi(u_7)=\{e_1,e_3\}$,$\varphi(u_3)=\varphi(u_6)=\{e_2\}$,$\varphi(u_4)=\{e_3\}$。

令$X=\{u_1,u_2,u_4,u_6\}$,由定义6可知:$\underline{X}_\varphi=\{u_1,u_4\}$,$\overline{X}_\varphi=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7\}$。显然,$\underline{X}_\varphi\subseteq X\subseteq\overline{X}_\varphi$。

表2 软集(F,A)1

Table 2 Soft set(F,A)1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
e_1	0	1	0	0	1	0	1
e_2	0	0	1	0	0	1	0
e_3	0	1	0	1	1	0	1

引理2[8] (F,A)为全域U上的软集,(U,φ)是MS-逼近空间。那么,对于U上的任意两个子集X和$Y(X\subseteq Y)$,有$\underline{X}_\varphi\subseteq\underline{Y}_\varphi$。

下面在半群S上介绍两种特殊的软集。

定义7 设(F,A)是S上的软集,$P(A)$是A的幂集,映射$\varphi:U\to P(A)$定义为:$\varphi(x)=\{a\mid x\in F(a)\}$。若对于所有的$a,b,c,d\in S$,有$\varphi(a)=\varphi(b)$,$\varphi(c)=\varphi(d)$满足条件$\varphi(ac)=\varphi(bd)$,则称$(F,A)$是$S$上的G-软集。

定义8 设(F,A)是S上的G-软集,映射$\varphi:U\to P(A)$定义为:$\varphi(x)=\{a\mid x\in F(a)\}$。若对于所有的$c\in S,x,y\in S$,有$\varphi(c)=\varphi(xy)$,则$\exists a,b\in S$,使得$\varphi(x)=\varphi(a)$,$\varphi(y)=\varphi(b)$满足$ab=c$,则称$(F,A)$是$S$上的GG-软集。

例3 令集合$S=\{0,a,b,c,d\}$满足乘法运算,如表3所列。

表3 乘法运算表1

Table 3 Table for multiplication operation 1

	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a
b	0	a	a	a	a
c	0	a	a	a	a
d	0	a	a	a	a

显然,$(S,\cdot)$是一个半群。由表4可得,(F,A)是S上的软集,并由其数据可知,$\varphi(0)=\varphi(b)=\{e_1,e_2\}$,$\varphi(a)=\varphi(c)=\{e_2\}$,$\varphi(d)=\{e_1\}$。根据定义7,因为$\varphi(0\cdot a)=\varphi(0)\neq\varphi(a)=\varphi(b\cdot c)$,所以$(F,A)$不是$S$上的G-软集。

表4 软集(F,A)2

Table 4 Soft set (F,A) 2

	0	a	b	c	d
e_1	1	0	1	0	1
e_2	1	1	1	1	0

例4 继续讨论例3中的半群$(S,\cdot)$。由表5可得,(F,A)是S上的软集,由表中数据可知,$\varphi(0)=\{e_1,e_2\}$,$\varphi(a)=\varphi(c)=\{e_1\}$,$\varphi(b)=\varphi(d)=\{e_2\}$。由定义7可得,$(F,A)$是$S$上的G-软集,根据定义8,因为$\varphi(c)=\varphi(bd)$,但$b\cdot d=a\neq c$,所以$(F,A)$不是$S$上的GG-软集。

表5 软集(F,A)3

Table 5 Soft set (F,A) 3

	0	a	b	c	d
e_1	1	1	0	1	0
e_2	1	0	1	0	1

例5 同样地,在例3中的半群$(S,\cdot)$上进行讨论。由表6可得,(F,A)是S上的软集,且由表中数据可知,$\varphi(0)=\{e_1,e_2\}$,$\varphi(a)=\{e_1\}$,$\varphi(b)=\varphi(c)=\varphi(d)=\{e_2\}$。由定义7和定义8易证,$(F,A)$是$S$上的G-软集,也是$S$上的GG-软集。

表6 软集(F,A)4

Table 6 Soft set (F,A) 4

	0	a	b	c	d
e_1	1	1	0	0	0
e_2	1	0	1	1	1

命题1 设(F,A)是半群S上的G-软集,且X,Y是S上的任意两个非空子集,则有$\overline{X}_\varphi\cdot\overline{Y}_\varphi\subseteq\overline{X\cdot Y}_\varphi$。

证明:令$c\in\overline{X}_\varphi\cdot\overline{Y}_\varphi$,则$c=xy$,其中$x\in\overline{X}_\varphi$,$y\in\overline{Y}_\varphi$。因此,$\varphi(c)=\varphi(xy)$。由定义6可知,对于$\exists x_1\in X,y_1\in Y$,有$\varphi(x)=\varphi(x_1)$,$\varphi(y)=\varphi(y_1)$;又由于$(F,A)$是$S$上的G-软集,则由定义7可得,$\varphi(xy)=\varphi(x_1y_1)$。因此,$\exists x_1y_1\in X\cdot Y$,显然有$xy\in\overline{X\cdot Y}_\varphi$,即$c\in\overline{X\cdot Y}_\varphi$,所以$\overline{X}_\varphi\cdot\overline{Y}_\varphi\subseteq\overline{X\cdot Y}_\varphi$。命题得证。

例6 令集合$S=\{0,a,b,c\}$满足乘法运算,如表7所列。

表7 乘法运算表2

Table 7 Table for multiplication operation 2

	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	a	a	a
c	0	a	a	a

显然,$(S,\cdot)$是一个半群,定义(F,A)为S上的软集,其中$A=\{e_1,e_2\}$,$F(e_1)=\{0,a,b,c\}$,$F(e_2)=\{0,a,b,c\}$,MS-逼近空间(U,φ)的映射φ分别为:$\varphi(0)=\{e_1\}$,$\varphi(a)=\varphi(b)=\varphi(c)=\{e_1,e_2\}$。易知:$(F,A)$是$S$上的G-软集。若$X=\{0,b\}$,$Y=\{b,c\}$,则$\overline{X}_\varphi=\{0,a,b,c\}$,$\overline{Y}_\varphi=\{a,b,c\}$。因此,$\overline{X}_\varphi\cdot\overline{Y}_\varphi=\{0,a\}$。又因为$\overline{X\cdot Y}_\varphi=\overline{\{0,a\}}_\varphi=\{0,a,b,c\}$,所以有$\overline{X}_\varphi\cdot\overline{Y}_\varphi\subseteq\overline{X\cdot Y}_\varphi$。

命题2 设(F,A)是半群S上的GG-软集,且X,Y是S上的任意两个非空子集,则有$\overline{X}_\varphi\cdot\overline{Y}_\varphi=\overline{X\cdot Y}_\varphi$。

证明:(1)由命题1的结论可知$\overline{X}_\varphi\cdot\overline{Y}_\varphi\subseteq\overline{X\cdot Y}_\varphi$显然成立。

(2)下面证明$\overline{X\cdot Y}_\varphi\subseteq\overline{X}_\varphi\cdot\overline{Y}_\varphi$成立。

令$c\in\overline{X\cdot Y}_\varphi$,则$\exists x\in X,y\in Y$,有$\varphi(c)=\varphi(xy)$成立。因为$(F,A)$是$S$上的GG-软集,所以对于$\varphi(c)=\varphi(xy)$,$\exists a,b\in S$,使得$\varphi(a)=\varphi(x)$,$\varphi(b)=\varphi(y)$,满足$c=ab$。又因为$a\in\overline{X}_\varphi$,$b\in\overline{Y}_\varphi$,所以$ab\in\overline{X}_\varphi\cdot\overline{Y}_\varphi$,即$\overline{X\cdot Y}_\varphi\subseteq\overline{X}_\varphi\cdot\overline{Y}_\varphi$。

综上所述,$\overline{X}_\varphi\cdot\overline{Y}_\varphi=\overline{X\cdot Y}_\varphi$,命题得证。

例7 根据表6数据,有$\varphi(0)=\{e_1,e_2\}$,$\varphi(a)=\{e_1\}$,$\varphi(b)=\varphi(c)=\varphi(d)=\{e_2\}$,可知$(F,A)$是$S$上的GG-软集。令$X=\{0,b\}$,$Y=\{a,c\}$,则$X\cdot Y=\{0,a\}$。由定义6可得,

$\overline{X}_\varphi=\{0,b,c,d\}$，$\overline{Y}_\varphi=\{a,b,c,d\}$，$\overline{X\cdot Y}_\varphi=\{0,a\}$，$\overline{X}_\varphi\cdot\overline{Y}_\varphi=\{0,a\}$，即$\overline{X}_\varphi\cdot\overline{Y}_\varphi=\overline{X\cdot Y}_\varphi$。

4　软粗糙半群的特征

本节将简单介绍 MSR-半群的概念并讨论其特征，同时对上（下）MSR-半群的一些特征进行研究。

定义 9　设(F,A)为半群 S 上的软集，映射 $\varphi:U\to P(A)$ 为 $\varphi(x)=\{a\mid x\in F(a)\}$，则称$(S,\varphi)$为 MS-逼近空间。对于任意的一个集合 $X\subseteq S$，定义以下两种运算：

$\underline{X}_\varphi=\{x\in X\mid\forall y\in X^c,\varphi(x)\neq\varphi(y)\}$

$\overline{X}_\varphi=\{x\in S\mid\exists y\in X,\varphi(x)=\varphi(y)\}$

则称 $\underline{X}_\varphi$ 和$\overline{X}_\varphi$ 分别为 X 的下 MSR-逼近和上 MSR-逼近。

当$\underline{X}_\varphi\neq\overline{X}_\varphi$ 时，有：

（1）若$\underline{X}_\varphi(\overline{X}_\varphi)$是 S 上的子半群，则称 X 是关于 S 上(F,A)的下 MSR-半群（上 MSR-半群）。

（2）若$\underline{X}_\varphi$ 和 $\overline{X}_\varphi$ 都是 S 上的子半群，则称 X 是关于 S 上(F,A)的 MSR-半群。

例 8　在例 3 中，令 $X=\{0,a,b,d\}$，则由定义 9 可得$\underline{X}_\varphi=\{0,b,d\}\subseteq S$，$\overline{X}_\varphi=\{0,a,b,c,d\}=S$。因此，$\underline{X}_\varphi$ 和$\overline{X}_\varphi$ 都是 S 上的子半群，即 X 是关于 S 上(F,A)的 MSR-半群。

定理 1　假设(S,φ)是一个 MS-逼近空间，X,Y 是半群 S 上的下 MSR-半群，则 $X\cap Y$ 也是 S 上的一个下 MSR-半群。

证明：由定义 9 可得$\underline{X}_\varphi$ 和$\underline{Y}_\varphi$ 都是 S 上的子半群，则$\underline{X}_\varphi\cap\underline{Y}_\varphi$ 是 S 上的子半群。由文献[7]中的定理 3 可得，$\underline{X\cap Y}_\varphi$ 也是 S 上的子半群。因此，$X\cap Y$ 也是 S 上的一个下 MSR-半群。

一般而言，若 X,Y 是 S 上的上 MSR-半群，则 $X\cap Y$ 并不是 S 上的上 MSR-半群，下面通过一个例子来进行说明。

例 9　考虑例 4 中的半群 S 和软集(F,A)，令 $X=\{b,c\}$，$Y=\{a,b\}$，根据定义 9 可得$\overline{X}_\varphi=\{a,b,c,d\}$，$\overline{Y}_\varphi=\{a,b,c,d\}$。显然，$\overline{X}_\varphi$，$\overline{Y}_\varphi$ 均是 S 的子半群。因此，X,Y 都是 S 上的上 MSR-半群。而$\overline{X\cap Y}_\varphi=\overline{\{b\}}_\varphi=\{b,d\}$不是 S 上的子半群，则有 $X\cap Y$ 不是 S 上的上 MSR-半群。

下面通过例 10 说明 X,Y 是 S 上的 MSR-半群，但 $X\cup Y$ 不是 S 上的下（上）MSR-半群。

例 10　令集合 $S=\{0,a,b,c,d\}$满足乘法运算，如表 8 所列。

表 8　乘法运算表 3

Table 8　Table for multiplication operation 3

	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a
b	0	a	a	a	a
c	0	a	a	a	a
d	0	a	a	a	a

显然，$(S,\cdot)$是一个半群定义 S 上的软集(F,A)，其中 $A=\{e_1,e_2,e_3\}$，$F(e_1)=\{0,a,b,c,d\}$，$F(e_2)=\{0,a,b,c,d\}$，$F(e_3)=\{0,a,b,c,d\}$，MS-逼近空间(U,φ)的映射 φ 分别为 $\varphi(0)=\{e_1\}$，$\varphi(a)=\{e_2\}$，$\varphi(b)=\varphi(c)=\{e_2,e_3\}$，$\varphi(d)=\{e_1,e_2\}$。令 $X=\{a,c\}$，$Y=\{0,a,b,d\}$，则$\underline{X}_\varphi=\{a\}$，$\overline{X}_\varphi=\{a,b,c\}$，$\underline{Y}_\varphi=\{0,a,b,c,d\}$，显然 X,Y 是 S 上的 MSR-半群。而$\underline{X\cup Y}_\varphi=\underline{\{0,a,b,c,d\}}_\varphi=\{0,a,b,c,d\}$，$\overline{X\cup Y}_\varphi=\overline{\{0,a,b,c,d\}}_\varphi=\{0,a,b,c,d\}$。显然，$X\cup Y$ 不是 S 上的下（上）MSR-半群。

定理 2　(F,A)是半群 S 上的一个 G-软集，且 X 是 S 上的一个子半群，则$\overline{X}_\varphi$ 也是 S 上的一个子半群。

证明：已知 X 是 S 上的一个子半群，且 $X\subseteq\overline{X}_\varphi$，显然$\overline{X}_\varphi$ 是非空的。对于$\forall m,n\in\overline{X}_\varphi$，由定义 9 可得$\exists x,y\in X$，$\varphi(m)=\varphi(x)$，$\varphi(n)=\varphi(y)$。又因为$(F,A)$是 G-软集，则对于 $x\cdot y\in X\cdot X\subseteq X$，有 $\varphi(mn)=\varphi(xy)$，满足 $mn\in\overline{X}_\varphi$。综上所述，$\overline{X}_\varphi$ 是 S 上的一个子半群。

定理 3　(F,A)是半群 S 上的一个 GG-软集，且 X 是 S 上的一个子半群，若$\underline{X}_\varphi\neq\varnothing$，则$\underline{X}_\varphi$ 也是 S 上的一个子半群。

证明：已知$\underline{X}_\varphi\neq\varnothing$，利用反证法，对于$\forall m,n\in\underline{X}_\varphi$，假设 $mn\notin\underline{X}_\varphi$，则$\forall x\in X^c$，$\varphi(m)\neq\varphi(x)$且$\forall y\in X^c$，$\varphi(n)\neq\varphi(y)$。

下面分两种情况进行讨论：

（1）若有 $mn\notin X$，而 $mn\in\underline{X}_\varphi\cdot\underline{X}_\varphi\subseteq X\cdot X\subseteq X$，显然此时矛盾。

（2）若有 $mn\in X$，且满足$\exists x'\in X^c$，$\varphi(x')=\varphi(mn)$成立。已知(F,A)是 GG-软集，那么，$\exists x_1,y_1\in S$，有 $\varphi(m)=\varphi(x_1)$，$\varphi(n)=\varphi(y_1)$满足 $x_1y_1=x'\in X^c$，则 $x_1\in X^c$ 或 $y_1\in X^c$。事实上，若 $x_1\notin X^c$ 且 $y_1\notin X^c$，即 $x_1\in X$，$y_1\in X$，则有 $x_1y_1\in X\cdot X\subseteq X$，此时矛盾。而当$\exists x_1\in X^c$ 时，有 $\varphi(m)=\varphi(x_1)$或当$\exists y_1\in X^c$ 时，有 $\varphi(n)=\varphi(y_1)$，这两种情况均与前面的假设矛盾。

综上所述，对于$\forall m,n\in\underline{X}_\varphi$，有 $mn\in\underline{X}_\varphi$，即证$\underline{X}_\varphi$ 是 S 上的一个子半群。

定理 4　(F,A)是半群 S 上的一个 G-软集，且 X 是 S 上的一个理想，则$\overline{X}_\varphi$ 也是 S 上的一个理想。

证明：已知 X 是半群 S 上的一个理想，则有 $SX\subseteq X$，$XS\subseteq X$。显然，X 是 S 上的一个子半群。根据定理 2 可得，$\overline{X}_\varphi$ 是 S 上的一个子半群。若 $r\in S,s\in\overline{X}_\varphi$，则$\exists x\in X$，有$\varphi(s)=\varphi(x)$。又由$(F,A)$是 S 上的一个 G-软集，则$\exists rx\in S\cdot X\subseteq X$，有 $\varphi(rs)=\varphi(rx)$，根据定义 9 得 $rs\in\overline{X}_\varphi$。因此$\overline{X}_\varphi$ 是 S 的一个左理想。同理可得，$\overline{X}_\varphi$ 是 S 的一个右理想。综上，$\overline{X}_\varphi$ 是 S 上的一个理想。

注 3　若(F,A)是半群 S 上的 G-软集，且 X 是 S 上的一个理想，则$\underline{X}_\varphi$ 不是 S 上的理想。如例 8 中$\underline{X}_\varphi=\{0,b,d\}$，显然 $b\cdot c=a\notin\underline{X}_\varphi$，即$\underline{X}_\varphi\cdot X\not\subseteq\underline{X}_\varphi$，同理可得，$X\cdot\underline{X}_\varphi\not\subseteq\underline{X}_\varphi$，则$\underline{X}_\varphi$ 不是 S 上的理想。

定理 5　(F,A)是半群 S 上的一个 G-软集，且 X 是 S 上的一个双理想，则$\overline{X}_\varphi$ 也是 S 上的一个双理想。

证明：已知 X 是 S 上的一个双理想，则有 $XSX\subseteq X$。根据定理 2 可得，$\overline{X}_\varphi$ 是 S 上的一个子半群。根据命题 1，有$\overline{X}_\varphi\cdot S\cdot\overline{X}_\varphi\subseteq\overline{X}_\varphi\cdot\overline{S}_\varphi\cdot\overline{X}_\varphi\subseteq\overline{X\cdot S\cdot X}_\varphi\subseteq\overline{X}_\varphi$。因此，$\overline{X}_\varphi$ 是 S 上的一个双理想。

注 4　同注 3，在与定理 5 相同的条件下，$\underline{X}_\varphi$ 也不是 S 上的双理想。

命题 3　(F,A)是半群 S 上的一个 GG-软集，且 X,Y 是 S 上的任意两个理想，则$\underline{X\cdot Y}_\varphi\subseteq\underline{X}_\varphi\cap\underline{Y}_\varphi$。

证明：已知 X,Y 是 S 上的一个理想，则有 $X\cdot Y\subseteq X$，$X\cdot Y\subseteq Y$，从而$\underline{X\cdot Y}_\varphi\subseteq\underline{X}_\varphi$，$\underline{X\cdot Y}_\varphi\subseteq\underline{Y}_\varphi$，即$\underline{X\cdot Y}_\varphi\subseteq\underline{X}_\varphi\cap\underline{Y}_\varphi$。

5 软粗糙半群在群体决策中的应用

对于处理决策方面的问题，软集和粗糙集的应用共同提供了许多方法[17-19]。Feng[17]引入的软粗糙集所需的软集要求必须是完整软集（例1说明了这个问题）；本文所提出的软粗糙半群则不需要其是完整软集，并且对于群体决策问题不会影响其最后的结果，反而更加精确。

下文首先简单介绍群体决策的方法及步骤，再通过实例将其与Feng在文献[17]中所得到的结论进行对比。

令全域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_l\}$，E 是参数集，集合 $A=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}\subseteq E$，假设在 U 上有一个专家组构成集合 $G=\{T_1,T_2,\cdots,T_n\}$ 作为对评估对象进行评价的 n 位专家，每位专家会对 U 上的所有元素进行分析与比较，最后得到一个最优选择作为其主要评估结果，从而所有专家的主要评估结果组成 U 上的一个子集。令 X_i 表示专家 T_i 的主要评估结果，定义 U 上的软集 $\Phi=(\eta,G)$（不需要其是完整软集），而软集 $\Phi=(\eta,G)$ 只提供评价的最初数据集合，这时我们可以考虑关于MS-逼近空间 (U,φ) 上 X_i 的MSR-逼近，其中 $\varphi:G\rightarrow P(U)$，即 $\varphi(T_i)=X_i$。

利用MSR-逼近，可以得到 U 上的两个软集 $\underline{\Phi}_\varphi=(\underline{\eta}_\varphi,G)$ 和 $\overline{\Phi}_\varphi=(\overline{\eta}_\varphi,G)$，其中 $\underline{\eta}_\varphi:G\rightarrow P(U)$，$\underline{\eta}_\varphi(T_i)=\underline{X_{i\varphi}}$，$\overline{\eta}_\varphi:G\rightarrow P(U)$，$\overline{\eta}_\varphi(T_i)=\overline{X_{i\varphi}}(i=1,2,\cdots,n)$。所得的评价结果可以用模糊集来表示，对于 $X\subseteq U$，C_X 为 X 的特征函数，基于软集 $\Phi=(\eta,G)$，U 上的模糊集 μ_Φ 可定义为：

$$\mu_\Phi:U\rightarrow[0,1]$$

$$u_k\mapsto\mu_\Phi(u_k)=\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}C_{\eta(T_j)}(u_k)$$

其中，$\eta(T_j)=X_j$，$k=1,2,\cdots,l$。

同样地，我们可以得到 U 上的另外两个模糊集 $\mu_{\underline{\Phi}_\varphi}$ 和 $\mu_{\overline{\Phi}_\varphi}$，分别定义为：

$$\mu_{\underline{\Phi}_\varphi}:U\rightarrow[0,1]$$

$$u_k\mapsto\mu_{\underline{\Phi}_\varphi}(u_k)=\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}C_{\underline{\eta}_\varphi(T_j)}(u_k)$$

$$\mu_{\overline{\Phi}_\varphi}:U\rightarrow[0,1]$$

$$u_k\mapsto\mu_{\overline{\Phi}_\varphi}(u_k)=\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}C_{\overline{\eta}_\varphi(T_j)}(u_k)$$

其中，$\underline{\eta}_\varphi(T_j)=\underline{X_{j\varphi}}$，$\overline{\eta}_\varphi(T_j)=\overline{X_{j\varphi}}$，$k=1,2,\cdots,l$。

令参数集 $C=\{L,M,N\}$，其中 L,M,H 分别为3种不同的置信度。定义 U 上的模糊软集 $R=(\alpha,C)$，$\alpha:C\rightarrow P(U)$，$\alpha(L)=\mu_{\underline{\Phi}_\varphi}$，$\alpha(M)=\mu_\Phi$，$\alpha(H)=\mu_{\overline{\Phi}_\varphi}$。给定一个权向量 $W=(w_L,w_M,w_H)$，满足 $w_L+w_M+w_H=1$。定义 $v(u_k)=w_L*\alpha(L)(u_k)+w_M*\alpha(M)(u_k)+w_H*\alpha(H)(u_k)$，其中 $u_k\in U$。满足 $v(u_p)=\max\{v(u_k),k=1,2,\cdots,l\}$ 的元素 u_p 即可作为最优选择。

步骤：

1. 输入软集 (F,A)。

2. 利用专家组 G 的主要评估结果，构造一个评价软集 $\Phi=(\eta,G)$。

3. 计算软粗糙逼近，同时得到 $\underline{\Phi}_\varphi=(\underline{\eta}_\varphi,G)$ 和 $\overline{\Phi}_\varphi=(\overline{\eta}_\varphi,G)$。

4. 计算软集 $\Phi=(\eta,G)$，$\underline{\Phi}_\varphi=(\underline{\eta}_\varphi,G)$ 和 $\overline{\Phi}_\varphi=(\overline{\eta}_\varphi,G)$ 的相关模糊集 μ_Φ，$\mu_{\underline{\Phi}_\varphi}$ 和 $\mu_{\overline{\Phi}_\varphi}$。

5. 利用模糊集 μ_Φ，$\mu_{\underline{\Phi}_\varphi}$ 和 $\mu_{\overline{\Phi}_\varphi}$ 构造模糊软集 $R(\alpha,C)$。

6. 输入权向量 W，计算每个选择 $u_i\in U$ 的权评价值 $v(u_i)$，再根据得到的权评价值对所有选择进行排列，其中最大的权评价值即作为最优选择。

例11 假设王先生想要买一辆车，王先生可能买的7辆车构成全域集 $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6,h_7\}$，决策者定义集合 $A=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 包含于参数集 E 中，其中 e_1,e_2,e_3,e_4 分别表示“好看”“便宜”“安全”“耗油低”。如表9所列，软集 (F,A) 表示这7辆车对王先生的吸引力。

表9 软集 (F,A) 5

Table 9 Soft set (F,A) 5

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7
e_1	0	0	1	0	0	1	1
e_2	1	0	0	1	1	0	1
e_3	0	0	0	1	1	0	0
e_4	1	0	0	0	0	0	0

设有3个专家构成专家组集合 $G=\{T_1,T_2,T_3\}$，对 U 上的这7辆车进行评估。令 X_i 表示专家 $T_i(i=1,2,3)$ 的主要评估结果。根据上述定义，我们可以计算 U 上的一个评估软集 $\Phi=(\eta,G)$，该数据如表10所列。

表10 软集 $\Phi=(\eta,G)$

Table 10 Soft set $\Phi=(\eta,G)$

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7
T_1	0	0	0	1	1	0	1
T_2	1	0	1	0	0	0	1
T_3	0	1	1	0	1	0	0

如表10所列，显然 $X_1=\{h_4,h_5,h_7\}$，$X_2=\{h_1,h_3,h_7\}$，$X_3=\{h_2,h_3,h_5\}$。选择一个MS-逼近空间，根据定义9，可计算得到：

$\underline{X_{1\varphi}}=\{h_4,h_5,h_7\}$，$\underline{X_{2\varphi}}=\{h_1,h_7\}$，$\underline{X_{3\varphi}}=\{h_2\}$

$\overline{X_{1\varphi}}=\{h_4,h_5,h_7\}$，$\overline{X_{2\varphi}}=\{h_1,h_3,h_6,h_7\}$，$\overline{X_{1\varphi}}=\{h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$

利用MSR-逼近，可以得到 U 上的两个软集 $\underline{\Phi}_\varphi=(\underline{\eta}_\varphi,G)$，$\overline{\Phi}_\varphi=(\overline{\eta}_\varphi,G)$。其中 $\underline{\eta}_\varphi(T_i)=\underline{X_{i\varphi}}$，$\overline{\eta}_\varphi(T_i)=\overline{X_{i\varphi}}$，$i=1,2,3$。

两个软集的数据分别如表11和表12所列。

表11 软集 $\underline{\Phi}_\varphi$

Table 11 Soft set $\underline{\Phi}_\varphi$

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7
T_1	0	0	0	1	1	0	1
T_2	1	0	0	0	0	0	1
T_3	0	1	0	0	0	0	0

表12 软集 $\overline{\Phi}_\varphi$

Table 12 Soft set $\overline{\Phi}_\varphi$

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7
T_1	0	0	0	1	1	0	1
T_2	1	0	1	0	0	1	1
T_3	0	1	1	1	1	1	0

接下来分别定义模糊集 μ_Φ，$\mu_{\underline{\Phi}_\varphi}$ 和 $\mu_{\overline{\Phi}_\varphi}$：

$$\mu_{\underline{\Phi}_\varphi}(h_k)=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}C_{\underline{\eta}_\varphi(T_j)}(h_k)$$

$$\mu_{\Phi}(h_k)=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}C_{\eta(T_j)}(h_k)$$

$$\mu_{\overline{\Phi}_\varphi}(h_k)=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}C_{\overline{\eta}_\varphi(T_j)}(h_k)$$

其中,$k=1,2,3,4,5,6,7$。

令参数集 $C=\{L,M,N\}$,其中 L,M,H 分别为“低置信”“中置信”“高置信”。给定 U 上的模糊软集 $R=(\alpha,C)$,其中 $\alpha(L)=\mu_{\underline{\Phi}_\varphi}$,$\alpha(M)=\mu_{\Phi}$,$\alpha(H)=\mu_{\overline{\Phi}_\varphi}$,再给定一个权向量 $W=(0.25,0.5,0.25)$,则根据上述决策方法中权向量的定义,有:

$$v(h_k)=0.25*\alpha(L)(h_k)+0.5*\alpha(M)(h_k)+0.25*\alpha(H)(h_k)$$

其中,$h_k\in U$,$k=1,2,\cdots,7$。计算得到的数据如表 13 所列。

表 13　模糊软集 $R(\alpha,c)$ 及加权评估集

Table 13　Fuzzy soft set $R(\alpha,c)$ and weighted evaluation values

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7
L	1/3	1/3	0	1/3	1/3	0	2/3
M	1/3	1/3	2/3	1/3	2/3	0	2/3
N	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3
$v(\cdot)$	1/3	1/3	1/2	5/12	7/12	1/6	2/3

根据表中数据,可以得到:

$h_7\succ h_5\succ h_3\succ h_4\succ h_1\approx h_2\succ h_6$

则王先生的最优选择为 h_7。

注 5　文献[17]第 5 节的实例中所提供的软集是完整软集,而且得到的结果有两个,最优选择分别是 h_5 和 h_7。例 11 说明,得到的最优选择只有一个 h_7,并且利用新型软粗糙集减弱了对软集的要求,即不需要是完整软集。这说明,利用软粗糙半群不仅弱化了对软集的要求,同时还提高了运算的准确性。

结束语　传统的粗糙集是在一种等价关系的基础上建立的,但一些等价关系的建立会受到人为等其他关系的影响,甚至有时候在一个集合中,我们找不到其中的等价关系。至今,很少有人在半群中研究软粗糙代数,而本文首次将软粗糙集应用到代数结构半群中;另外,还提出了新概念 G-软集和GG-软集,使其能应用到代数结构、拓扑空间及其他数学理论的不确定性理论中;同时,在 MSR-逼近空间中研究了半群的粗糙性,特别研究了上(下)MSR-半群。

总之,本文为软粗糙代数结构提供了新的理论依据和方法,同时,通过软集来描述粗糙集的等价关系,从而使误差尽可能减小,提高了运算的准确性。

参 考 文 献

[1] CHEN J,LI J,LIN Y,et al. Relations of reduction between covering generalized rough sets and concept lattices[J]. Information Sciences,2015,304(C):16-27.

[2] XIAO Q,LI Q,GUO L. Rough sets induced by ideals in lattices [J]. Information Sciences,2014,271(7):82-92.

[3] ALI M I,SHABIR M,TANVEER S. Roughness in hemirings [J]. Neural Computing & Applications,2012,21(1):171-180.

[4] SHI W F,SHANG L. A method for determining the number of fuzzy C-means clustering based on decision rough sets[J]. Computer Science,2017,44(9):45-48. (in Chinese)
石文峰,商琳. 一种基于决策粗糙集的模糊 C 均值聚类数的确定方法[J]. 计算机科学,2017,44(9):45-48.

[5] KANDIL A,YAKOUT M M,ZAKARIA A. New Approaches of Rough Sets via Ideals[M]// Handbook of Research on Genera-lized and Hybrid Set Structures and Applications for Soft Computing. 2016.

[6] ALI M I,SHABIR M. Logic Connectives for Soft Sets and Fuzzy Soft Sets[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems,2014,22(6):1431-1442.

[7] ÇAGMAN N,ENGINOGLU S. Soft Set theory and uni-int decision making[J]. European Journal of Operational Research,2010,207(2):848-855.

[8] MUKHERJEE A,DAS A K. Application of Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Soft Set in Investment Decision Making[C]// Fifth International Conference on Advances in Computing and Communications. IEEE,2016:61-64.

[9] AKTAŞ,H,ÇAĞMAN N. Soft sets and soft groups[J]. Information Sciences,2007,177(13):2726-2735.

[10] FENG F,LI C,DAVVAZ B,et al. Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets:a tentative approach[J]. Soft Computing,2010,14(9):899-911.

[11] MAJI P K,ROY A R,BISWAS R. An application of soft sets in a decision making problem[J]. Computers & Mathematics with Applications,2002,44(8-9):1077-1083.

[12] MOLODTSOV D. Soft set theory——First results[J]. Computers & Mathematics with Applications,1999,37(4-5):19-31.

[13] FENG F,LIU X,LEOREANU-FOTEA V,et al. Soft sets and soft roughsets[J]. Information Sciences,2011,181(6):1125-1137.

[14] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer & Information Sciences,1982,11(5):341-356.

[15] PAWLAK Z. Rough Sets:Theoretical Aspects of Reasoning about Data[M]. London:Kluwer Academic Publishers,1992.

[16] SHABIR M,ALI M I,SHAHEEN T. Another approach to soft rough sets[J]. Knowledge-Based Systems,2013,40(1):72-80.

[17] FENG F. Soft rough sets applied to multicriteria group decision making[J]. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics,2010,2(1):69-80.

[18] LIANG D,PEDRYCZ W,LIU D,et al. Three-way decisions based on decision-theoretic rough sets under linguistic assessment with the aid of group decision making[J]. Applied Soft Computing,2015,29(C):256-269.

[19] XUE Z A,ZHU T L,XUE T Y,et al. Three-branch decision model based on Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Computer Science,2016,43(6):283-288. (in Chinese)
薛占熬,朱泰隆,薛天宇,等. 基于直觉模糊集的三支决策模型[J]. 计算机科学,2016,43(6):283-288.