基于覆盖的多重代价粗糙决策分析方法

骆公志 许鑫鑫
(南京邮电大学管理学院 南京 210003)

摘 要 为弥补传统决策粗糙模型要求概念间无交叉且忽略了多重代价矩阵的重要性的不足，文中提出了基于覆盖的加权多重代价决策粗糙集模型。首先，分析了基于等价关系的多重代价决策粗糙模型中存在粒度分类过细的问题，综合考虑了代价矩阵的数量关系和相对重要程度，引入了覆盖和代价矩阵权重对其进行改进，定义了新模型的上、下近似；然后，针对 4 种基于覆盖的多重代价决策粗糙集，讨论了其相互关系，并对相关性质和定理进行证明；最后，通过医疗诊断的实例验证了模型的有效性和实用性。

关键词 决策粗糙集，多重代价矩阵，覆盖，权重

中图法分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2019.05.032

Multi-cost Decision-theoretic Rough Set Based on Covering Approximate Space

LUO Gong-zhi XU Xin-xin
(School of Management,Nanjing University of Posts and Telecommunications,Nanjing 210003,China)

Abstract In order to make up for the deficiency of decision-theoretic rough model that there is no crossover between concepts and ignores the importance of multi-cost matrices,a rough set of multi-cost decision-theoretic rough set based on covering approximate space was proposed. Firstly,the problem of excessive granularity classification in the decision-theoretic rough set based on the equivalence relation was analyzed. Considering the quantitative relation and the importance among the cost matrices,covering and weighted multiple cost matrices were introduced to improve the covering multi-cost decision-theoretic rough set. Then,for four kinds of rough set of multi-cost decision-theoretic rough set based on covering approximate space,the rough approximations of knowledge were acquired and the relationship with each other was discussed. And relevant theorems and properties were proved. Finally,the feasibility and effectiveness of the method was verified by the case of medical diagnosis.

Keywords Decision-theoretic rough set,Multiple cost matrices,Covering,Weight

1 引言

粗糙集作为一种处理不确定性知识的重要工具，已被广泛应用于众多领域[1-4]。传统粗糙集模型[5-6]基于不可分辨关系对论域进行划分，概念之间并无交叉。而实际应用中概念的交叉现象大量存在。为此，众多学者从这一角度对传统粗糙集模型进行了扩展[7-10]，Zakowsk 等[11]利用论域的覆盖替代划分，提出了覆盖粗糙集模型；William 等[12]提出了基于覆盖的广义粗糙集模型，同时给出上、下近似的公理化方法并讨论了属性约简；Smanta 等[13]总结了 16 种基于覆盖的粗糙集模型，并给出隐含格的定义。

由于经典粗糙集的论域可视为决策类正域和边界域的并集，而负域为空集，且正域要求等价类完全包含于决策类，因此模型缺乏一定的完整性和容错性。鉴于此，学者们提出了多种可调参数的概率粗糙模型[14-17]。Yao 等[18-19]基于贝叶斯风险分析提出了决策粗糙集。他们通过计算各决策的最小风险值来得到阈值的确定值，使其在实际决策中具有语义的完备性和可理解性。在此基础上，多种扩展模型被相继提出，其中，文献[20]为了描述现实生活中决策代价本身的多样性和多变性，引入了多重代价矩阵的概念，提出了乐观、悲观及 θ 可变多重代价决策粗糙集。

乐观模型仅满足决策阈值最小值的约束，悲观模型需满足决策阈值最大值的约束，均未考虑到代价矩阵的分布情况；θ 可变多重代价决策粗糙集可视为满足一定数量的代价矩阵约束。然而现实生活中，多重代价矩阵的重要性往往是不同的，即对最终决策结果的影响是不平等的。基于此，本文引入多重代价矩阵权重，并用覆盖代替划分，提出了基于覆盖的加权多重代价决策粗糙集，讨论了其性质及模型之间的关系，最

到稿日期：2018-03-27 返修日期：2018-07-02 本文受国家自然科学基金项目(71771126)，江苏省社会科学基金项目(17GLB013)，江苏省高校哲学社会科学优秀创新团队培育点项目(2017ZSTD022)资助。

骆公志(1972－)，男，博士，教授，主要研究方向为粗糙集理论及应用，E-mail:lgzlyg@163.com(通信作者)；**许鑫鑫**(1993－)，女，硕士生，主要研究方向为粗糙集理论及应用。

后通过实例验证了模型的有效性和实用性。

2 基础知识

2.1 覆盖粗糙集

定义 1[11] 设 U 是非空有限论域，$C=\{X \mid X\subseteq U\}$ 是 U 的子集族，若 $C\neq\emptyset$ 且 $\bigcup C=U$，则称 C 是 U 的一个覆盖，二元组(U,C)为覆盖近似空间。显然，若$\bigcap C=\emptyset$，则 C 是 U 的一个划分，覆盖是划分的推广。

定义 2[11] 设(U,C)为一覆盖近似空间，$x\in U$，称 $Md(x)=\{K\in C \mid x\in K\wedge(\forall S\in C\wedge x\in S\wedge S\subseteq K\Rightarrow K=S)\}$ 是 x 的最小描述。

定义 3[11] 设(U,C)为一覆盖近似空间，$x\in U$，称 $\bigcap Md(x)=\bigcap\{K \mid K\in C\}$是 x 的最小包含。

定义 4[11] 设(U,C)为一覆盖近似空间，$X\subseteq U$，则 X 关于(U,C)的下近似和上近似定义为：

$$\underline{C}(X)=\{x\in U \mid (\bigcap Md(x))\subseteq X\}$$
$$\overline{C}(X)=\{x\in U \mid (\bigcap Md(x))\cap X\neq\emptyset\} \tag{1}$$

2.2 多重代价决策粗糙集

文献[20]首先给出了一组决策代价矩阵 $M=\{M_1,M_2,M_3,\cdots,M_m\}$，第 i 个决策代价矩阵如表 1 所列，由此分别导出 m 个 α 值和 β 值。考虑到$\min\limits_{i=1}^{m}\alpha_i>\min\limits_{i=1}^{m}\beta_i$，$\max\limits_{i=1}^{m}\alpha_i>\max\limits_{i=1}^{m}\beta_i$，给出第 i 个 α 值和 β 值的计算公式：

$$\alpha_i=\frac{\lambda_{pn}^i-\lambda_{bn}^i}{(\lambda_{pn}^i-\lambda_{bn}^i)+(\lambda_{bp}^i-\lambda_{pp}^i)}$$
$$\beta_i=\frac{\lambda_{bn}^i-\lambda_{nn}^i}{(\lambda_{bn}^i-\lambda_{nn}^i)+(\lambda_{np}^i-\lambda_{bp}^i)} \tag{2}$$

其中，$0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i\leqslant1$。

表 1 第 i 个决策代价矩阵

Table 1 i-th cost matrix

	X	$\sim X$
a_p	λ_{pp}^i	λ_{pn}^i
a_b	λ_{bp}^i	λ_{bn}^i
a_n	λ_{np}^i	λ_{nn}^i

文献[20]针对多个决策代价矩阵的融合机制，给出了乐观、悲观和 θ 可变多重代价决策粗糙集 3 种模型的定义。

定义 5[20] 设(U,AT)为决策信息系统，$M=\{M_1,M_2,M_3,\cdots,M_m\}$为 m 个决策代价矩阵，$\forall A\subseteq AT$，$\forall x\in U$，乐观多重代价决策粗糙集的下、上近似和边界域定义为：

$$\underline{A}_{ODT}^{M}(X)=\{x\in U:Pr(X \mid [x]_A)\geqslant\min_{i=1}^{m}\alpha_i\}$$
$$\overline{A}_{ODT}^{M}(X)=\{x\in U:Pr(X \mid [x]_A)>\min_{i=1}^{m}\beta_i\}$$
$$BND_{ODT}^{M}(X)=\{x\in U:\min_{i=1}^{m}\beta_i<Pr(X \mid [x]_A)<\min_{i=1}^{m}\alpha_i\} \tag{3}$$

其中，$Pr(X \mid [x]_A)=\frac{|[x]_A\cap X|}{|[x]_A|}$为条件概率。

$\forall A\subseteq AT$，$\forall x\in U$，悲观多重代价决策粗糙集的下、上近似和边界域定义为：

$$\underline{A}_{PDT}^{M}(X)=\{x\in U:Pr(X \mid [x]_A)\geqslant\max_{i=1}^{m}\alpha_i\}$$
$$\overline{A}_{PDT}^{M}(X)=\{x\in U:Pr(X \mid [x]_A)>\max_{i=1}^{m}\beta_i\}$$
$$BND_{PDT}^{M}(X)=\{x\in U:\max_{i=1}^{m}\beta_i<Pr(X \mid [x]_A)<\max_{i=1}^{m}\alpha_i\} \tag{4}$$

为满足一定数量的决策代价矩阵进行决策，文献[20]构建了 θ 可变多重代价决策粗糙集模型。

定义 6[20] 设(U,AT)为决策信息系统，$M=\{M_1,M_2,M_3,\cdots,M_m\}$为 m 个决策代价矩阵，$\forall A\subseteq AT$，$\forall x\in U$，θ 可变多重代价决策粗糙集的下、上近似和边界域定义为：

$$\underline{A}_{\theta DT}^{M}(X)=\{x\in U:\frac{|\{i:Pr(X \mid [x]_A)\geqslant\alpha_i,1\leqslant i\leqslant m\}|}{m}\geqslant\theta\}$$
$$\overline{A}_{\theta DT}^{M}(X)=\{x\in U:\frac{|\{i:Pr(X \mid [x]_A)>\beta_i,1\leqslant i\leqslant m\}|}{m}\geqslant\theta\}$$
$$BND_{\theta DT}^{M}(X)=\{x\in U:\frac{|\{i:\beta_i<Pr(X \mid [x]_A)<\alpha_i,1\leqslant i\leqslant m\}|}{m}\geqslant\theta\} \tag{5}$$

其中，$\theta\in(0,1]$。

3 基于覆盖的多重代价决策粗糙集

传统多重代价决策粗糙集模型建立在等价关系之上，当条件属性数量过多时，易导致论域划分粒度过细，甚至出现大量的单点集，使决策模型失去实际应用价值。因此，本节用覆盖代替划分，构建了基于覆盖的多重代价决策粗糙模型。

定义 7 设(U,C)为一覆盖近似空间，C 为 U 的一个覆盖，$Md(x)$表示 $X\subseteq U$ 的最小描述，$M=\{M_1,M_2,M_3,\cdots,M_m\}$为 m 个决策代价矩阵，则 $\forall x\in U$，关于(U,C)基于覆盖的乐观多重代价决策粗糙集的下、上近似和边界域定义为：

$$\underline{C}_{ODT}^{M}(X)=\{x\in U:Pr(X \mid \bigcap Md(x))\geqslant\min_{i=1}^{m}\alpha_i\}$$
$$\overline{C}_{ODT}^{M}(X)=\{x\in U:Pr(X \mid \bigcap Md(x))>\min_{i=1}^{m}\beta_i\}$$
$$BND_{ODT}^{M}(X)=\{x\in U:\min_{i=1}^{m}\beta_i<Pr(X \mid \bigcap Md(x))<\min_{i=1}^{m}\alpha_i\} \tag{6}$$

其中，$Pr(X \mid \bigcap Md(x))=\frac{|(\bigcap MD(x))\cap X|}{|\bigcap MD(x)|}$为条件概率。

$\forall x\in U$，关于(U,C)基于覆盖的悲观多重代价决策粗糙集的下、上近似和边界定义为：

$$\overline{C}_{PDT}^{M}(X)=\{x\in U:Pr(X \mid \bigcap Md(x))\geqslant\max_{i=1}^{m}\alpha_i\}$$
$$\overline{C}_{PDT}^{M}(X)=\{x\in U:Pr(X \mid \bigcap Md(x))>\max_{i=1}^{m}\beta_i\}$$
$$BND_{PDT}^{M}(X)=\{x\in U:\max_{i=1}^{m}\beta_i<Pr(X \mid \bigcap Md(x))<\max_{i=1}^{m}\alpha_i\} \tag{7}$$

$\forall x\in U$，关于(U,C)基于覆盖的 θ 可变多重代价决策粗糙集的下、上近似和边界域定义为：

$$\overline{C}_{\theta DT}^{M}(X)=\{x\in U:\frac{|i:Pr(X \mid \bigcap Md(x))\geqslant\alpha_i,1\leqslant i\leqslant m\}|}{m}\geqslant\theta\}$$
$$\overline{C}_{\theta DT}^{M}(X)=\{x\in U:$$

$$\frac{|\{i:Pr(X|\cap Md(x))>\beta_i,1\leqslant i\leqslant m\}|}{m}\geqslant\theta\}$$

$$BND_{\theta DT}^{M}(X)=\{x\in U:\frac{|\{i:\beta_i<Pr(X|\cap Md(x))<\alpha_i,1\leqslant i\leqslant m\}|}{m}\geqslant\theta\} \quad (8)$$

其中，$\theta\in(0,1]$。

若在近似空间(U,C)中，$\forall A\subseteq AT$，$C=U/A=\{[X]_A|x\in U\}$构成U上的覆盖，$\cap Md(x)=[x]_A$，则以上模型退化为文献[20]中的θ可变多重代价决策粗糙模型。

在实际决策场景中，基于不同决策时间、地域或主体得到的多重代价矩阵对最终决策结果的影响程度往往是不同的。因此，本文综合考虑代价矩阵的数量关系和相对重要程度，对模型做如下改进。

定义 8　设(U,C)为一覆盖近似空间，C为U的一个覆盖，$Md(x)$表示$x\in U$的最小描述，$M=\{M_1,M_2,M_3,\cdots,M_m\}$为$m$个决策代价矩阵，$\rho=\{\rho_1,\rho_2,\rho_3,\cdots,\rho_m\}$为$m$个决策代价矩阵对应的权重，且$\sum_{i=1}^{m}\rho_i=1$，则$\forall x\in U$，关于$(U,C)$基于覆盖的加权多重代价决策粗糙集的下、上近似和边界域定义为：

$$\underline{C}_{\omega DT}^{M}(X)=\{x\in U:\forall M_i\subseteq T,Pr(X|\cap Md(x))\geqslant\alpha_i,T\subseteq M\wedge\sum_{j=1}^{|T|}\rho_j\geqslant\omega\}$$

$$\overline{C}_{\omega DT}^{M}(X)=\{x\in U:\forall M_i\subseteq T,Pr(X|\cap Md(x))>\beta_i,T\subseteq M\wedge\sum_{j=1}^{|T|}\rho_j\geqslant\omega\}$$

$$BND_{\omega DT}^{M}(X)=\{x\in U:\forall M_i\subseteq T,\beta_i<Pr(X|\cap Md(x))<\alpha_i,T\subseteq M\wedge\sum_{j=1}^{|T|}\rho_j\geqslant\omega\} \quad (9)$$

其中，$\omega\in(0,1]$。

定理 1　设(U,C)为一覆盖近似空间，$\rho=\{\rho_1,\rho_2,\rho_3,\cdots,\rho_m\}$为$m$个决策代价矩阵对应的权重，且$\sum_{i=1}^{m}\rho_i=1$，当$\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_m=\frac{1}{m}$时，对于$\forall x\in U$，有：

1）$\underline{C}_{\omega DT}^{M}(X)=\underline{C}_{\theta DT}^{M}(X)$；

2）$\overline{C}_{\omega DT}^{M}(X)=\overline{C}_{\theta DT}^{M}(X)$；

3）$BND_{\omega DT}^{M}(X)=BND_{\theta DT}^{M}(X)$。

证明：当$\sum_{i=1}^{m}\rho_i=1$，$\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_m=\frac{1}{m}$时，$\sum_{i=1}^{|T|}\rho_i=\frac{|T|}{m}$，则基于覆盖的加权多重代价决策粗糙集转化为基于覆盖的θ可变多重代价决策粗糙集。

定理 2　设(U,C)为一覆盖近似空间，则对于$\forall x\in U$，4种基于覆盖的多重代价决策粗糙集之间存在如下关系：

1）$\underline{C}_{ODT}^{M}(X)\supseteq\underline{C}_{\omega DT}^{M}(X)\supseteq\underline{C}_{PDT}^{M}(X)$；

2）$\overline{C}_{ODT}^{M}(X)\supseteq\overline{C}_{\omega DT}^{M}(X)\supseteq\overline{C}_{PDT}^{M}(X)$；

3）$\underline{C}_{ODT}^{M}(X)\supseteq\underline{C}_{\theta DT}^{M}(X)\supseteq\underline{C}_{PDT}^{M}(X)$；

4）$\overline{C}_{ODT}^{M}(X)\supseteq\overline{C}_{\theta DT}^{M}(X)\supseteq\overline{C}_{PDT}^{M}(X)$。

证明：对于关系1），由于$\forall x\in\underline{C}_{PDT}^{M}(X)$，由定义7可知$Pr(X|\cap Md(x))\geqslant\max_{i=1}^{m}\alpha_i$，则$\forall M_i\subseteq M$，$Pr(X|\cap Md(x))\geqslant\alpha_i$，即$\sum_{j=1}^{|T|}\rho_j=1\geqslant\omega(\omega\in(0,1])$，由定义8可得$x\in\underline{C}_{\omega DT}^{M}(X)$；

由$x\in\underline{C}_{\omega DT}^{M}(X)$，根据定义8可知$\forall M_i\subseteq T$，$Pr(X|\cap Md(x))\geqslant\alpha_i$且$T\subseteq M\wedge\sum_{j=1}^{|T|}\rho_i=\omega>0$，则$\exists i=\{1,2,\cdots,m\}$使得$Pr(X|\cap Md(x))\geqslant\alpha_i$，即$Pr(X|\cap Md(x))\geqslant\min_{i=1}^{m}\alpha_i$，由定义7得$x\in\underline{C}_{ODT}^{M}(X)$。

同理可证关系2）－关系4）成立。

定理 3　设(U,C)为一覆盖近似空间，则$\forall x\in U$，基于覆盖的加权多重代价决策粗糙集关于ω满足以下单调性：

1）$\omega_1\leqslant\omega_2\Rightarrow\underline{C}_{\omega_1 DT}^{M}(X)\supseteq\underline{C}_{\omega_2 DT}^{M}(X)$；

2）$\omega_1\leqslant\omega_2\Rightarrow\overline{C}_{\omega_1 DT}^{M}(X)\supseteq\overline{C}_{\omega_2 DT}^{M}(X)$；

3）$\omega_1\leqslant\omega_2\Rightarrow BND_{\omega_1 DT}^{M}(X)\supseteq BND_{\omega_2 DT}^{M}(X)$。

证明：对于关系1），因为$\forall x\in\underline{C}_{\omega_2 DT}^{M}(X)$，由定义8得$Pr(X|\cap Md(x))\geqslant\alpha_i$，$T\subseteq M\wedge\sum_{j=1}^{|T|}\rho_j\geqslant\omega_2>\omega_1$，所以$x\in\underline{C}_{\omega_1 DT}^{M}(X)$，$\underline{C}_{\omega_1 DT}^{M}(X)\supseteq\underline{C}_{\omega_2 DT}^{M}(X)$。

同理可证关系2）、关系3）成立。

定义 9　设(U,C)为一覆盖近似空间，$\forall x\in U$，关于(U,C)基于覆盖的乐观、悲观、θ可变和加权多重代价决策粗糙集的分类质量可定义为：

$$\gamma(C_{ODT}^{M},X)=\frac{|\underline{C}_{ODT}^{M}(X)|}{|X|}$$

$$\gamma(C_{PDT}^{M},X)=\frac{|\underline{C}_{PDT}^{M}(X)|}{|X|}$$

$$\gamma(C_{\theta DT}^{M},X)=\frac{|\underline{C}_{\theta DT}^{M}(X)|}{|X|}$$

$$\gamma(C_{\omega DT}^{M},X)=\frac{|\underline{C}_{\omega DT}^{M}(X)|}{|X|} \quad (10)$$

定理 4　设(U,C)为一覆盖近似空间，$\forall x\in U$，关于(U,C)基于覆盖的乐观、悲观、θ可变和加权多重代价决策粗糙集的分类质量间具有如下关系：

1）$\gamma(C_{ODT}^{M},X)\geqslant\gamma(C_{\theta DT}^{M},X)\geqslant\gamma(C_{PDT}^{M},X)$；

2）$\gamma(C_{ODT}^{M},X)\geqslant\gamma(C_{\omega DT}^{M},X)\geqslant\gamma(C_{PDT}^{M},X)$。

证明：根据定义9和定理2易证。

4　实例分析

为验证基于覆盖的乐观、悲观及θ可变多重代价决策粗糙集模型的相关性质和定理，用医疗诊断实例对模型进行验证。设论域$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\}$表示9位病人；$AT=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$为条件属性集合，分别代表5种症状；$d$为决策属性，表示该病人是否患病。医疗诊断决策信息系统表如表2所列。

表 2　医疗诊断决策信息系统表

Table 2　Decision information system of medical diagnosis

U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	d
x_1	是	否	否	否	是	是
x_2	是	是	否	否	是	是
x_3	是	是	是	否	是	是
x_4	否	否	否	是	否	否
x_5	是	是	是	是	是	否
x_6	否	是	是	是	否	否
x_7	是	是	是	是	是	是
x_8	是	是	是	是	是	否
x_9	是	是	否	是	是	是

来自A,B,C,D,E 5个不同国家的医生对应的决策代价矩阵为$\{\{\lambda_{\Delta\nabla}^{1}\},\{\lambda_{\Delta\nabla}^{2}\},\{\lambda_{\Delta\nabla}^{3}\},\{\lambda_{\Delta\nabla}^{4}\},\{\lambda_{\Delta\nabla}^{5}\}\}$，如表3－表7所

列。根据式(2)计算出 m 个 α 值和 β 值。以 α_1 和 β_1 为例，由式(2)可得 $\alpha_1=\frac{6-2}{(6-2)+(4.5-0.5)}=\frac{4}{7}$，$\beta_1=\frac{2-1}{(2-1)+(7.5-4.5)}=\frac{1}{4}$，同理可求 $\alpha_2-\alpha_5$ 和 $\beta_2-\beta_5$，分别为 $(\alpha_2,\beta_2)=(\frac{3}{5},\frac{2}{5})$，$(\alpha_3,\beta_3)=(\frac{11}{20},\frac{2}{5})$，$(\alpha_4,\beta_4)=(\frac{5}{7},\frac{1}{2})$，$(\alpha_5,\beta_5)=(\frac{3}{4},\frac{1}{2})$。同时根据相关专家意见，对应权重为$\{0.2,0.1,0.1,0.3,0.3\}$，阈值为 $\omega=\theta=0.6$。

表3 A国医生的决策代价矩阵

Table 3 Multiple cost matrix of doctor in country A

	X	$\sim X$
a_p	0.5	6
a_b	4.5	2
a_n	7.5	1

表4 B国医生的决策代价矩阵

Table 4 Multiple cost matrix of doctor in country B

	X	$\sim X$
a_p	1.5	8.5
a_b	5.5	2.5
a_n	8.5	0.5

表5 C国医生决策的代价矩阵

Table 5 Multiple cost matrix of doctor in country C

	X	$\sim X$
a_p	1	13
a_b	10	2
a_n	13	0

表6 D国医生的决策代价矩阵

Table 6 Multiple cost matrix of doctor in country D

	X	$\sim X$
a_p	2	9
a_b	4	4
a_n	8	0

表7 E国医生的决策代价矩阵

Table 7 Multiple cost matrix of doctor in country E

	X	$\sim X$
a_p	1	8
a_b	2	5
a_n	6	1

下面采用基于覆盖的多重代价决策粗糙方法计算表2的上、下近似及分类质量。具体步骤如下。

Step 1 根据定义2和定义3，求出 U 的覆盖 C 和 x 的最小包含：

$$C=\{\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_7,x_8,x_9\},\{x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\},\{x_3,x_5,x_6,x_7,x_8\},\{x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\},\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_7,x_8,x_9\}\}$$

$$\cap Md(x_1)=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_7,x_8,x_9\}\cap Md(x_2)=\{x_2,x_3,x_5,x_7,x_8,x_9\}$$

$$\cap Md(x_3)=\{x_3,x_5,x_7,x_8\}$$

$$\cap Md(x_4)=\{x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\}$$

$$\cap Md(x_5)=\{x_5,x_7,x_8\}$$

$$\cap Md(x_6)=\{x_6,x_7,x_8\}$$

$$\cap Md(x_7)=\{x_7,x_8\}$$

$$\cap Md(x_8)=\{x_5,x_7,x_8\}$$

$$\cap Md(x_9)=\{x_5,x_7,x_8,x_9\}$$

Step 2 由决策属性 d 计算决策类如下：

$$U/IND(d)=\{D_1,D_2\}=\{\{x_1,x_2,x_3,x_7,x_9\},\{x_4,x_5,x_6,x_8\}\}$$

Step 3 以 D_1 即患病人群为例计算条件概率：

$$Pr(D_1|\cap Md(x_1))=\frac{5}{7},Pr(D_1|\cap Md(x_2))=\frac{2}{3}$$

$$Pr(D_1|\cap Md(x_3))=\frac{1}{2},Pr(D_1|\cap Md(x_4))=\frac{1}{3}$$

$$Pr(D_1|\cap Md(x_5))=\frac{1}{3},Pr(D_1|\cap Md(x_6))=\frac{1}{3}$$

$$Pr(D_1|\cap Md(x_7))=\frac{1}{2},Pr(D_1|\cap Md(x_8))=\frac{1}{3}$$

$$Pr(D_1|\cap Md(x_9))=\frac{1}{2}$$

Step 4 根据定义7和定义8，分别计算决策类 D_1 在4种基于覆盖的多重代价决策粗糙集中的下近似、上近似和边界域：

1) $\underline{C}^M_{ODT}(D_1)=\{x_1,x_2,x_3,x_7x_9\}$，$\overline{C}^M_{ODT}(D_1)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\}$，$BND^M_{ODT}(D_1)=\{x_4,x_5,x_6,x_8\}$；

2) $\underline{C}^M_{PDT}(D_1)=\{x_1\}$，$\overline{C}^M_{PDT}(D_1)=\{x_1,x_2\}$，$BND^M_{PDT}(D_1)=\{x_2\}$；

3) $\underline{C}^M_{\theta DT}(D_1)=\{x_1,x_2\}$，$\overline{C}^M_{\theta DT}(D_1)=\{x_1,x_2,x_3,x_7,x_9\}$，$BND^M_{\theta DT}(D_1)=\emptyset$；

4) $\underline{C}^M_{\omega DT}(D_1)=\{x_1,x_2\}$，$\overline{C}^M_{\omega DT}(D_1)=\{x_1,x_2\}$，$BND^M_{\omega DT}(D_1)=\emptyset$。

由计算结果可知：

1) $\underline{C}^M_{ODT}(D_1)\supseteq\underline{C}^M_{\theta DT}(D_1)\supseteq\underline{C}^M_{PDT}(D_1)$；

2) $\overline{C}^M_{ODT}(D_1)\supseteq\overline{C}^M_{\theta DT}(D_1)\supseteq\overline{C}^M_{PDT}(D_1)$；

3) $\underline{C}^M_{ODT}(D_1)\supseteq\underline{C}^M_{\omega DT}(D_1)\supseteq\underline{C}^M_{PDT}(D_1)$；

4) $\overline{C}^M_{ODT}(D_1)\supseteq\overline{C}^M_{\omega DT}(D_1)\supseteq\overline{C}^M_{PDT}(D_1)$。

由此验证了定理2成立。

Step 5 根据定义9，计算决策类 D_1 基于4种模型的分类质量如下：

$$\gamma(C^M_{ODT},D_1)=1,\gamma(C^M_{PDT},D_1)=\frac{1}{5}$$

$$\gamma(C^M_{\theta DT},D_1)=\frac{2}{5},\gamma(C^M_{\omega DT},D_1)=\frac{2}{5}$$

$$\gamma(C^M_{ODT},D_1)>\gamma(C^M_{\theta DT},D_1)>\gamma(C^M_{PDT},D_1)$$

$$\gamma(C^M_{ODT},D_1)>\gamma(C^M_{\omega DT},D_1)>\gamma(C^M_{PDT},D_1)$$

由此验证了定理4成立。

上述实例中，采用基于等价关系的多重代价决策粗糙方法计算得到的决策信息系统等价类为$\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5,x_7,x_8\},\{x_6\},\{x_9\}\}$，结果中出现较多的单点集，表明分类过细，难以进一步挖掘有效信息，这就使得基于等价关系的多重代价决策粗糙模型失去了实际应用价值。本文用覆盖关系代替传统模型中的等价关系，有效地避免了传统多重代价决策粗糙集分类过细使得模型失效的不足，进而说明了

基于覆盖的多重代价决策粗糙模型与传统多重代价决策粗糙模型相比具有一定的优越性。

此外，以下近似为例，在阈值相同的情况下，利用基于覆盖的 θ 可变多重代价决策粗糙集模型时只需满足 3 个较小的决策阈值 α，即 A，B，C 3 国医生判断其为患病即可；在引入权重之后，由于 A，B，C 3 国医生的权重值较小，利用基于覆盖的加权多重代价粗糙模型时需至少满足阈值 α_5，即至少 E 国医生判断其为患病。由此可见，后者更贴近实际应用场景，其不仅考虑到多重代价矩阵的数量关系，并且充分体现了多重代价矩阵间的相对重要程度。

结束语　覆盖粗糙集和多重代价决策粗糙集已成为当前粗糙集理论研究领域的重要方面。本文针对传统多重代价决策粗糙集处理多属性决策信息系统的局限性，引入覆盖和代价矩阵权重对现有多重代价决策粗糙集模型进行改进，综合考虑了代价矩阵的数量关系和相对重要程度，使其在决策时间、地域和主体多样化的现实决策情境中具有更好的适应性。未来将进一步研究决策代价矩阵权重的获取和属性约简，以及如何将其扩展到多分类的决策信息系统中。

参 考 文 献

[1] CHEN Y M，ZHANG Z J，ZHENG J Z，et al. Gene Selection for Tumor Classification Using Neighborhood Rough Sets and Entropy Measures [J]. Journal of Biomedical Informatics，2017，67：59-68.

[2] SANKAR K，ROY，SUSANTA B. Approximation of Rough Soft Set and Its Application to Lattice [J]. Fuzzy Information and Engineering，2015，7(3)：379-387.

[3] MANISH A. Rough Information Set and Its Application in Decision Making [J]. IEEE Transaction Fuzzy Systems，2017，25(2)：264-276.

[4] DAS A K，SENGUPTAB S，BHATTA，et al. A Group in Cremental Feature Selection for Classification Using Rough Set Theory Based Genetic Algorithm [J]. Applied Soft Computing，2018，65：400-411.

[5] PAWLAK Z. Rough Sets [J]. Information Journal of Computer and Information Sciences，1982，11(5)：314-356.

[6] PAWLAK Z. Rough Sets Decision Algorithms and Bayes' Theorem [J]. Europe Journal of Operational Research，2002，136：181-189.

[7] YAO Y Y. Relational Interpretations of Neighborhood Operators and Rough Set Approximation Operators [J]. Information Sciences，1998，111(1-4)：239-259.

[8] DEER L，CORNELIS C，YAO Y Y. A Semantically Sound Approach to Pawlak Rough Sets and Covering-based Rough Sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2016，78：62-72.

[9] MA M H，CHAKRABORTY M K. Covering Based Rough Sets and Modal Logics. Part I [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2016，77(C)：55-65.

[10] ZHANG Z P，KUDO Y，MURAI T. Neighbor Selection for User-based Collaborative Filtering Using Covering based Rough Sets [J]. Annals of Operations Research，2017，256(2)：359-374.

[11] ZAKOWSKI W. Approximations in the Space (U，Π) [J]. Demonstration Mathematics，1983，16：761-769.

[12] WILLIAM Z，WANG F Y. Reduction and Approximation of Covering Generalized Rough sets [J]. Information Sciences，2003，152(1)：217-230.

[13] SAMANTA P，CHAKRABORTY M K. Covering Based Approaches to Rough Sets and Implication Lattices [C]// RSFD Grc. 2009：127-134.

[14] LI W W，HUANG Z Q，JIA X Y，et al. Neighborhood Based Decision Theoretic Rough Set models [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2016，69(C)：1-17.

[15] KANG X P，MIAO D Q. A Variable Precision Rough Set Model Based on the Granularity of Tolerance Relation [J]. Knowledge-Based Systems，2016，102(C)：103-115.

[16] XU J F，MIAO D Q，ZHANG Y J，et al. A Three-way Decisions Model with Probabilistic Rough Set for Stream Computing [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2017，88：1-22.

[17] MA J M，ZOU C J，PAN X C. Structured Probabilistic Rough Set Approximations [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2017，90：319-332.

[18] YAO Y Y. Three-way Decision：An Interpretation of Rules in Rough Set Theory [C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Springer Verlag，2009：642-649.

[19] YAO Y Y. Three-way Decisions with Probabilistic Rough Set Model [J]. Information Sciences，2010，180：341-353.

[20] DOU H L，YANG X B，SONG X N，et al. Decision Theoretic Rough Set：A Multi cost Strategy [J]. Knowledge-Based Systems，2016，91(C)：71-83.