

# 灰色预测模型在隧道洞顶楔形体稳定性预测中的应用

吴发友 王林峰 翁其能

(重庆交通大学山区公路水运交通地质减灾重庆市高校市级重点实验室 重庆 400047)

**摘要** 目前我国在交通方面投建了大量的基础设施,隧道是其中不可避免的工程,特别是在西部地区。在隧道中,洞顶楔形体失稳是施工中存在的危害之一,对楔形体进行监测和预测以保证隧道施工及后期的安全具有重要的意义。通过预测,施工方能及时采取有效措施来消除危险,避免经济损失和人员伤亡。隧道楔形体失稳的影响因素复杂,影响因子难以量化且具有不确定性,符合灰色系统的特性。将灰色系统理论应用于隧道楔形体变形的预测,在原始监测数据的基础上建立隧道楔形体变形的  $G(1,1)$  单点预测模型。通过工程实例,验证了该模型的精度。预测模型中,后验差比为  $C=0.1195$ ,小误差频率为  $P=1$ 。结果表明,预测模型的精度达到了较高的水平,该预测的结果可以很好地指导实际施工。

**关键词** 隧道,楔形体,灰色理论,灰色预测,单点预测模型

中图分类号 TU457 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2019.05.051

## Application of Grey Prediction Model in Prediction of Stability of Wedge-shaped Body of Tunnel

WU Fa-you WANG Lin-feng WENG Qi-neng

(Key Laboratory of Geological Hazards Mitigation for Mountainous Highway and Waterway, Chongqing Municipal Education Commission, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

**Abstract** With the construction of a large number of transport infrastructure in China, tunnel engineering is inevitable, especially in the western region. In the tunnel, the stability of the roof wedge is one of the harms existing in the construction. It is of great significance to monitor and predict the wedge to ensure the safety of the tunnel construction and the later period. Through prediction, timely and effective measures are taken to eliminate risks and avoid economic losses and casualties. The influence factors of tunnel wedge instability are complex and difficult to quantify and are uncertain, which accords with the characteristics of grey system. This paper applied the grey system theory to the prediction of tunnel wedge deformation, and established the  $G(1,1)$  single point prediction model of tunnel wedge deformation based on the original monitoring data. The accuracy of the model was verified by an engineering example. In the prediction model, the posterior error ratio  $C$  is 0.1195 and the frequency of small error  $P$  is 1. The results show that the precision of the prediction model reaches a higher level, and the prediction results can guide the actual construction very well.

**Keywords** Tunnel, Wedge, Grey theory, Grey prediction, Single point prediction model

## 1 引言

近几十年来,随着经济和社会的发展,我国在公路、铁路等基础建设方面的投资力度大大提升。在公路、铁路修建过程中,隧道是常常遇到的工程,特别是在山区<sup>[1]</sup>。岩体中常存在组合多样的结构面,楔形体是完整岩体被两个交叉的结构面相互切割形成的<sup>[2]</sup>。在隧道开挖过程中,隧道顶部常出现楔形体围岩。楔形体围岩存在极大的垮塌危险,一旦发生,将会造成严重的后果,轻则造成经济损失,重则导致人员伤亡。楔形体围岩临空后其变形过程具有渐进性,失稳破坏过程具有突发性。由于楔形体围岩失稳可能造成严重的后果,因此对楔形体围岩失稳过程进行监测具有重要的意义。通过监

测,施工方可以尽快采取措施,以防止发生围岩垮塌。

目前,楔形体的失稳监测在地下洞室中仍是一个难点,前人对其进行了较多的研究。Anagnostou等<sup>[3-4]</sup>提出了考虑地下渗流压力情况的楔形体计算模型。张利<sup>[5]</sup>在改进 sarma 理论的基础上建立了隧洞楔形体的物理模型和力学计算模型,推导出楔形体稳定性计算的临界加速度系数,并提出了楔形体正应力的计算方法,从而达到了量化隧道楔形体稳定性的目的。唐红梅等<sup>[6]</sup>通过楔形体破坏的 3 个假定建立了地下室楔形体物理模型,提出了楔形体稳定性分析的极限平衡法,推导出了楔形体稳定性系数的计算方法,并根据楔形体的几何形态判断其稳定状态;并且进一步探讨了楔形体在动荷载下的稳定性,指出楔形体在动荷载下的稳定性显著降低。刘辉

到稿日期:2018-10-10 返修日期:2019-02-15 本文受国家自然科学基金(51478073),国家重点研发计划项目(2016YFC0802203)资助。

吴发友(1994—),男,硕士生,主要研究方向为地质灾害减灾理论与技术,E-mail:1296725556@qq.com;王林峰(1983—),男,教授,硕士生导师,主要研究方向为地质灾害减灾理论与技术,E-mail:wanglinfeng@cqjtu.edu.cn(通信作者);翁其能(1976—),男,副教授,硕士生导师,主要研究方向为隧道工程及岩土工程。

东等<sup>[7]</sup>根据隧道沿线的结构面组合形式,利用赤平投影法和实体比例几何预测不稳定楔形体的体积和重量,为支护措施的设计提供了依据。陈愿成<sup>[8]</sup>将楔形体中结构面抗剪强度参数作为模糊数,采用模糊数、模糊集理论以及蒙特卡罗模拟法,提出了模糊蒙特卡罗模拟法和模糊可靠度理论,分析了楔形体失稳的不确定性。在楔形体稳定性研究方面,还发展出许多方法,如极限平衡法<sup>[9-11]</sup>、可靠度分析<sup>[12]</sup>、块体理论<sup>[13]</sup>、数值计算<sup>[14]</sup>、程序设计<sup>[15-16]</sup>等,这些方法丰富了隧道楔形体的稳定性计算研究。前人更多的是研究楔形体的稳定性,而楔形体的稳定性受多种因素影响,如结构面的粗糙程度、结构面填充物及其性质、地下水、施工扰动等,在隧道施工过程中获取这些参数的难度大,而且成本高,因此已有的稳定性计算公式难免存在局限。目前,对楔形体变形预测进行研究的学者亦甚少。

隧道开挖使得楔形体临空,其稳定性受多种因素耦合的影响,如岩体结构、岩体性质、结构面性质、自重、地下水、开挖方法、振动等。由于楔形体围岩失稳受诸多因素的影响,而且以目前的科学技术,这些因素对其失稳的影响程度是不确定且难以量化的。因此,我们可以将围岩失稳过程看作一个灰色系统<sup>[17]</sup>,利用灰色预测模型对楔形体围岩监测数据进行预测。

## 2 灰色预测模型

邓聚龙教授于 1982 年创立了灰色系统理论<sup>[18-19]</sup>。灰色系统是指部分信息已知而部分信息未知的系统,其具有小样本、贫信息、不确定性的特点。灰色系统理论自提出后,被广泛应用于工程、社会等各个领域的研究,同时大大地推动了灰色系统理论的发展。灰色系统最早出现于控制理论领域,所有的信息都已知时,称其为“白系统”;所有信息都未知时,称其为“黑系统”;部分信息已知,部分信息未知时,则称其为“灰色系统”。

根据建模目的,可以基于灰色系统理论建立预测模型、决策模型和控制模型<sup>[20]</sup>。其中,常见的几种预测模型为 G(n, h)模型、DGM(2, 1)模型、Verhulst 模型。G(1, 1)模型是G(n, h)的特殊形式,也是最常用的灰色预测模型。灰色预测模型不需要大量样本,不要求原始数据规律分布、定性分析结果与定量分析结果一致,且准确度高<sup>[21]</sup>。

灰色时间序列预测<sup>[22]</sup>是灰色预测的一个分类,这个预测模型是用已测得的数据构建预测模型,通过构建好的模型可以预测未来某一时刻的特征量或者达到某一特征量的时间。在楔形体围岩变形监测中,每次的监测值为等长时间内围岩变形量的累积值。监测数据为楔形体围岩只随时间变化的变形量,无法考虑其他因素的影响,符合灰色预测模型的使用要求。因此,用此模型在等长的监测时间间隔下,根据已有的监测数据对其变形量进行预测。

灰色预测模型 G(1, 1)的建模方法是将原始数据做一阶累加处理,目的是减小随机性和波动性对原始数据的影响,得到的新数据序列具有近似指数的规律。根据这种近似指数的规律建立微分方程组,进而以微分方程组的解构建微分方程的影子方程,最后得出预测函数。建模过程如下<sup>[23]</sup>:

1) 设有 n 个原始数据,设为集合  $x^{(0)}$ ,对 n 个数据做一阶累加(1-AGO),累加后得到新的数据序列,令其集合为  $x^{(1)}$ ,则:

$$x^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), x^{(1)}(3), \dots, x^{(1)}(k), \dots, x^{(1)}(n)\} \tag{1}$$

其中,  $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k=1, 2, 3, \dots, n$ 。

2) 预测模型的灰微分方程为<sup>[23]</sup>:

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b, k=2, 3, 4, \dots, n \tag{2}$$

其中,  $z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}[x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)]$ ; a 为发展系数; b 为灰作用量。构造灰微分方程的影子方程<sup>[23]</sup>:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b \tag{3}$$

将原始数据及处理后的数据代入灰微分方程,可以解出 a 和 b 的值。进而得到影子方程的解<sup>[23]</sup>:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = [x^{(0)} - \frac{b}{a}]e^{-ak} + \frac{b}{a} \tag{4}$$

其中,  $k=0, 1, 2, 3, \dots, n$ 。

3) 将得到的解进行逆变换操作,得到预测模型方程<sup>[23]</sup>:

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \tag{5}$$

其中,  $k=0, 1, 2, 3, \dots, n$ 。方程中令  $\hat{x}^{(1)}(0) = 0$ 。

## 3 灰色预测模型的检验

建立模型后,为了保证预测的准确性,还需要对其进行检验;检验符合要求后,预测值才更加具有可信度。主要的检验法有残差检验法、后验差检验法,以及关联度检验法,一般常用后验差检验法进行检验<sup>[24-25]</sup>。本文即使用后验差检验法进行验证。具体过程如下。

后验差检验法根据实测值和预测值之间的关系,用数理统计方法进行验证。具体过程如下。

1) 计算原始数据的平均值及方差

令原始数据的平均值为  $\bar{x}^{(0)}$ ,则:

$$\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k) \tag{6}$$

令原始数据的方差为  $S_1^2$ ,则:

$$S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x^{(0)}(k) - \bar{x}^{(0)})^2 \tag{7}$$

2) 计算残差的均值及方差

令残差为  $\epsilon(k)$ ,则:

$$\epsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k) \tag{8}$$

其中,  $\hat{x}^{(0)}(k)$  为预测值。

令残差的均值为  $\bar{\epsilon}$ ,则:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \epsilon(k) \tag{9}$$

令残差的方差为  $S_2^2$ ,则:

$$S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\epsilon(k) - \bar{\epsilon})^2 \tag{10}$$

3) 后验差检验法中,将  $S_2/S_1$  记为 C,即:

$$C = \frac{S_2}{S_1} \tag{11}$$

将小误差频率记为 P:

$$P = P\{|\epsilon(k) - \bar{\epsilon}| < 0.6745 \times S_1\} \tag{12}$$

在该检验法中,C 和 P 是两个重要的指标。C 的值越小越好,C 越小表明  $S_2$  越小而  $S_1$  越大。 $S_1$  大可以表明原始数

据的离散型大。 $S_2$  小表明残差的离散程度小,残差越小表明原始数据与预测值拟合得越好。指标  $P$  的值越大越好, $P$  值越大表明残差值与残差均值的差小于  $0.6745 \times S_1$  的点越多。因此用  $C$  与  $P$  综合评价预测模型精度的好坏。预测精度评价关系如表 1 所列。

表 1 预测模型精度的等级划分  
Table 1 Rating of predictive model accuracy

预测模型精度等级	$P$	$C$
好	$P \geq 0.95$	$C \leq 0.35$
合格	$0.80 \leq P < 0.95$	$0.35 < C \leq 0.50$
勉强	$0.70 \leq P < 0.80$	$0.50 < C \leq 0.65$
不合格	$P < 0.70$	$C > 0.65$

#### 4 工程应用

在某隧道建设过程中,隧道围岩为 III 级,全断面开挖。开挖至一断面时,隧道洞顶发现了一块被多个结构面切割的楔形体,3 组主要结构面的性质如下。结构面 1:产状  $N16^\circ W/NE \angle 32^\circ$ ,延伸较长;结构面 2:产状  $N18^\circ W/SW \angle 58^\circ$ ,剪性结构面,延伸长;结构面 3: $N57^\circ E/SE \angle 45^\circ$ ,张性结构面,延伸长达 13m。围岩在施工过程中随时可能出现垮塌,威胁到施工人员的安全和施工机械的安全。围岩一旦发生垮塌,将会造成严重的后果。因此,对其进行监测并预测其进一步发展有着重要的作用。

本文采用监测到的变形累计值,首先建立灰色预测模型,然后再进行预测计算。隧道监测时间间隔为 1 天,已测得的原始数据为 0, 6.42 mm, 10.85 mm, 12.52 mm, 13.76 mm, 14.34 mm, 15.63 mm, 17.14 mm, 18.86 mm, 将前 8 个数据用于预测模型的建立,将最后 1 个数据用于预测的检验。

原始数据序列  $x^{(0)}$  为:

$$x^{(0)} = \{0, 6.42, 10.85, 12.52, 13.76, 14.34, 15.63, 17.14\}$$

将原始数据做一次累加处理(1-AGO):

$$x^{(1)} = \{0, 6.42, 15.27, 25.79, 37.55, 50.89, 65.52, 81.66\}$$

灰微分方程为:

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$$

其中,  $z^{(1)}(k) = \{3.21, 10.845, 20.53, 31.67, 44.22, 58.205, 73.59\}$ 。

将  $x^{(0)}$ ,  $x^{(1)}$  数值逐个代入灰微分方程,通过变换,代入后的数据满足方程式:

$$y_N = A \hat{a}$$

其中,  $y_N = \{3.21, 10.845, 20.53, 31.67, 44.22, 58.205, 73.59\}$ 。

$$A = \begin{bmatrix} -3.21 & 1 \\ -10.845 & 1 \\ -20.53 & 1 \\ -31.67 & 1 \\ -44.22 & 1 \\ -58.205 & 1 \\ -73.59 & 1 \end{bmatrix}, \hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

利用最小二乘法解得灰微分方程中的  $a, b$  值:

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1135 \\ 8.5142 \end{bmatrix}$$

进而得到 GM(1,1)模型预测公式:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 55.473e^{0.1294k} - 55.473$$

将预测模型得到的数值进行逆变换,得到预测值序列

$\hat{x}^{(0)}$  为:

$$\hat{x}^{(0)} = \{0, 7.61, 8.65, 9.84, 11.19, 12.72, 14.47, 16.45\}$$

相应的残差  $\epsilon(k)$  为:

$$\epsilon(k) = \{0, 1.19, -0.2, -0.68, -0.57, -0.62, -0.16, 0.31\}$$

将用于验证的数据与预测数据作对比:验证数据的实测值为 18.86,用模型预测出的值为 18.70,残差为 0.16。

模型的后验差比值为  $C=0.1195, P=1$ ,从模型精度等级表中看出其预测精度为好。灰色预测与实测值的比较如图 1 所示。

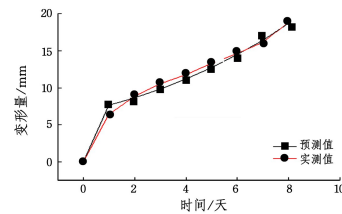


图 1 楔形体围岩的变形曲线

Fig. 1 Deformation curve of wedge surrounding rock

根据变形曲线图分析,由于实际测量值分布不规则且存在误差,因此预测值与初始值之间存在残差,但原始测量数据与预测值的拟合度较好,残差在允许范围内。然而,在离用于建模的原始数据较远的地方,残差增大,精度降低。因此可以得出,GM(1,1)模型可以用于隧道楔形体围岩变形的短期预测,可以通过短期预测值指导实际工程。

**结束语** (1) 本文将灰色预测模型应用于隧道楔形体围岩的变形预测中,通过实例分析证明了该模型应用于围岩变形预测中能取得很好的预测效果。

(2) 灰色预测模型的时间预测可以根据已获得的数据预测未来一定时间内所求数值的变化量,也可以根据变化量求得达到该数值所需要的时间。该模型在短期预测方面能取得较高的精度,且适用范围广。

(3) 单点预测模型只对单个点进行了研究,并没有考虑多个点的关联作用,因此具有一定的缺陷。但该模型的预测值和实测值之间的残差在允许范围内,可以用于指导实际工程。

(4) 模型只对围岩变形的数值进行了预测,不能预测其达到变形破坏的时间,也就是说楔形体失稳时的变形数值只能凭借经验判断。因为楔形体围岩失稳时的变形受多种因素的作用,失稳时的变形值难以计算得出,所以预测模型不能起到很好的预警作用。因此,在这一方面,仍需要进行深入的研究。

#### 参考文献

[1] ZHONG L M, XIE Q M, LUO Y. Stability evaluation of tunnel surrounding rock based on game-extension theory[J]. Journal of Safety Science and Technology, 2019, 15(1): 56-61. (in Chinese) 钟里密, 谢全敏, 罗忆. 基于博弈-可拓理论的隧道围岩稳定性评价[J]. 中国安全生产科学技术, 2019, 15(1): 56-61.

[2] MA S Z, JIA H B, ZHANG Z N, et al. Stability analysis of wed-

- ges of rock slopes based on 3D network simulation of structural surface [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, 40(S2):167-172. (in Chinese)
- 马淑芝, 贾洪彪, 张致能, 等. 基于结构面网络模拟技术的边坡楔形体分析方法研究[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(S2):167-172.
- [3] ANAGNOSTOU G, KOVARI K. Face stability in slurry and EPB shield tunneling [C] // Proceedings of Geo-technical Aspects of Underground Construction in Soft Ground. Balkema [s. n.], 1996:35-42.
- [4] ANAGNOSTOU G, KOVARI K. Face stability conditions with earth pressure balanced shields [J]. Tunnels and Underground Space Technology, 1996, 11(2):165-173.
- [5] ZAHNG L. Calculation Method and Application for Wedge Rock-Mass in Surrounding Rock of Tunnel Based on the Theory of Sarma [J]. Technology of Highway and Transport, 2018, 34(3):75-79. (in Chinese)
- 张利. 基于改进 Sarma 理论的隧道围岩楔形体稳定性计算方法及应用[J]. 公路交通技术, 2018, 34(3):75-79.
- [6] TANG H M, ZHOU Y T, CHEN H K, et al. Stability analysis for wedge rockmass of underground cavities under dynamic load [J]. Journal of Engineering Geology, 2015, 23(3):485-490. (in Chinese)
- 唐红梅, 周云涛, 陈洪凯, 等. 动荷载作用下地下洞室楔形体稳定性分析[J]. 工程地质学报, 2015, 23(3):485-490.
- [7] LIU H D, LUO C B. Forecasting the place and growth depth of instable cuneiform body in tunnel wall rock [J]. Journal of North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, 2007, 28(3):81-84. (in Chinese)
- 刘辉东, 罗长保. 预测隧洞围岩不稳定楔形体的位置及其发育深度[J]. 华北水利水电学院学报, 2007, 28(3):81-84.
- [8] CHEN Y C. Stability analysis of wedge based on fuzzy set theory [J]. HIGHWAY, 2018, 63(6):12-19. (in Chinese)
- 陈愿成. 模糊集理论下的楔形体稳定性分析[J]. 公路, 2018, 63(6):12-19.
- [9] ZHU F, ZHANG Y X, ZAHNG B. A direct limiting deformation equilibrium method for wedge sliding [J]. Journal of Chongqing University (Natural Science Edition), 2003, 26(5):103-105. (in Chinese)
- 朱凡, 张永兴, 张波, 等. 滑动楔形体的简捷极限变形平衡法[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2003, 26(5):103-105.
- [10] CHEN W, WANG J X, XIN L P, et al. Lower bound method for plastic limit analysis of wedge shape stability [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(3):431-436. (in Chinese)
- 陈炜, 王均星, 辛丽萍, 等. 楔形体稳定的塑性极限分析下限法[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(3):431-436.
- [11] OU W. Calculation and Analysis of Wedge Stability Considering Seismic Force Based on Hoek Theory [J]. Subgrade engineering, 2012(3):133-136, 140. (in Chinese)
- 欧巍. 基于 Hoek 理论考虑地震力作用的楔形体稳定性计算分析[J]. 路基工程, 2012(3):133-136, 140.
- [12] TAN X H, SONG C Z, HOU X L. Reliability analysis of wedge slopes [J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2013, 35(S1):90-95. (in Chinese)
- 谭晓慧, 宋传中, 侯晓亮. 楔形体边坡的系统可靠度分析[J]. 土木建筑与环境工程, 2013, 35(S1):90-95.
- [13] YU Q C, CHEN D J, XUE G F, et al. Preliminary study on general block method of fractured rock mass [J]. Hydrogeology and Engineering Geology, 2005(6):42-48. (in Chinese)
- 于青春, 陈德基, 薛果夫, 等. 裂隙岩体一般块体理论初步[J]. 水文地质工程地质, 2005(6):42-48.
- [14] ZAHNG X Q, ZHOU J, GE Y, et al. Analysis method of Stability of sliding wedge based on numerical simulation [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2010, 27(11):1-7. (in Chinese)
- 张希黔, 周敬, 葛勇, 等. 基于数值计算的楔形体稳定性分析方法研究[J]. 公路交通科技, 2010, 27(11):1-7.
- [15] YANG B, LI C D. Improvement analysis method on the stability of wedge rock mass [J]. Geotechnical Engineering Technique, 2007, 21(6):292-295, 303. (in Chinese)
- 杨彪, 李长冬. 改进的楔形岩体稳定性分析方法[J]. 岩土工程技术, 2007, 21(6):292-295, 303.
- [16] TAO L N, YANG J G, CHAI H J, et al. Implementation of wedge modeling system based on vector method [J]. Technology of Highway and Transport, 2009(2):6-8. (in Chinese)
- 陶丽娜, 杨建国, 柴贺军, 等. 基于矢量法的楔形体建模系统的实现[J]. 公路交通技术, 2009(2):6-8.
- [17] WANG T, SUN W L, LI L. Study on surrounding rock deformation combined forecasting method based on regression analysis and grey theory [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2017, 13(S1):48-51. (in Chinese)
- 王涛, 孙文龙, 李磊. 基于回归分析与灰色理论的围岩变形组合预测[J]. 地下空间与工程学报, 2017, 13(S1):48-51.
- [18] 邓聚龙. 灰色系统理论教程 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990.
- [19] 肖新平, 宋中民, 李峰. 灰技术基础及其应用 [M]. 武汉: 科技出版社, 2005.
- [20] LIU N Z. Prediction and analysis of rock stability of tunnel based on the theory gray [D]. Chongqing: Chongqing University, 2007. (in Chinese)
- 刘能铸. 基于灰色理论的隧道围岩稳定性预测分析 [D]. 重庆: 重庆大学, 2007.
- [21] 邓聚龙. 灰色系统论文集 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1989.
- [22] YU T T, ZHOU Y G. The study about time series prediction based on grey theory GM(1,1) model [J]. Technique and Method, 2012, 31(13):65-67. (in Chinese)
- 于婷婷, 周玉国. 基于灰色 GM(1,1) 模型的时间序列预测研究 [J]. 微型机与应用, 2012, 31(13):65-67.
- [23] 刘思峰, 郭天榜, 党耀国, 等. 灰色系统理论及应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [24] YANG H, LIU Y L, XU H Z. Slope deformation verhulst modeling and posterior difference test [J]. Value Engineering, 2018, 37(12):110-112. (in Chinese)
- 杨豪, 刘永来, 徐瀚周. 边坡形变 Verhulst 建模及后验差检验 [J]. 价值工程, 2018, 37(12):110-112.
- [25] WEI X Y, ZHENG S. Reactor Temperature Control Based on Grey Prediction and Fuzzy Weighted PID [J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2019, 32(2):82-86. (in Chinese)
- 魏小宇, 郑晟. 运用灰色预测与模糊加权 PID 的反应釜温度控制 [J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2019, 33(2):82-86.