

考虑网络拓扑结构变化的 SIRS 模型的建立与稳定性分析

刘晓东 魏海平 曹宇

(辽宁石油化工大学计算机与通信工程学院 辽宁抚顺 113000)

摘要 针对经典 SIRS(易感-感染-免疫-易感)模型中没有考虑到网络拓扑结构发生变化的情况,提出了一种网络拓扑结构发生变化的 SIRS 改进模型,其利用李雅普诺夫稳定性分析方法分析得到传播阈值以及拓扑结构变化与传播过程的相关性。在传播过程中当系统满足阈值条件时,计算机病毒最终消失,从而证明了系统不满足阈值条件时地方病平衡点的存在性与唯一性,并得出了满足地方病平衡点稳定的限制条件。对比仿真实验的结果验证了上述理论结果,并表明带有网络拓扑结构发生变化的 SIRS 模型比已有的 SIRS 模型更加逼近现实生活中计算机病毒的传播过程。

关键词 复杂网络,网络拓扑结构变化,SIRS 模型,阈值条件

中图分类号 TP393 **文献标识码** A

Modeling and Stability Analysis for SIRS Model with Network Topology Changes

LIU Xiao-dong WEI Hai-ping CAO Yu

(College of Computer and Communication Engineering, Liaoning Shihua University, Fushun, Liaoning 113000, China)

Abstract This paper proposed an improved model to tackle the problem that the network topology changes is not considered in the classic SIRS (Susceptible-infected-recovered-susceptible) model. The threshold and the correlation between the topology and transmission process are deduced by Lyapunov stability theory. In the spread process of virus, computer virus will disappear ultimately when the system meets the threshold condition, which proves that there exists an equilibrium point of local virus when the system does not meet the threshold condition, and from which the limiting conditions for stability of the equilibrium point is also reached. Simulated experiment results indicate that the theoretical conclusions are valid and the SIRS model with network topology changes can simulate the spread process of actual computer virus better than the existing SIRS model.

Keywords Complex networks, Network topology changes, SIRS model, Threshold condition

1 引言

生物学领域很早就开始了对传染病传播的研究,且建立了完善的数学流行病学,早在 1927 年 Kermack 与 McKendrick 在研究流行于伦敦的黑死病时就提出了经典的 SIR 仓室模型,随后于 1932 年建立了 SIS 模型,在这些模型研究的基础上提出了传染病动力学中的阈值理论。Kermack 与 McKendrick 所提出的 SIR 模型是传染病模型中最经典且最基本的模型,为传染病动力学的研究做出了奠基性的贡献。

随着人类广泛地运用网络实现信息共享,特别是物联网和泛在网时代的来临,计算机病毒的传播途径呈现出多元化、隐蔽化、迅捷化、智能化等特点,这给信息社会带来了巨大的威胁。为了能更有效地对抗计算机病毒,增强互联网抵御病毒袭击的能力,我们有必要深刻理解计算机病毒在互联网中的传播机理,以期在没有有效杀毒的情况下尽可能地降低计算机病毒对网络造成的破坏。

20 世纪 90 年代初 Kephart 等就注意到了病毒(无论是生物病毒还是计算机病毒)的一些通性,文献[1]第一次用流行病学数学模型对计算机病毒的传播进行了全面的分析。此后,许多研究人员运用该模型做了大量关于计算机病毒的研究

[2-5]。时至今日,流行病学模型的基本思想仍是建立计算机病毒传播模型的重要基础。借鉴生物流行病毒宏观研究所取得的巨大成功,根据计算机病毒与生物病毒在传播方面的相似性[6],借鉴生物病毒传播模型,计算机病毒传播模型得到了广泛的研究。Kephart 等[7]最早提出 SIS 模型,该模型运用生物流行病学方法首次从宏观上将网络中的计算机划分为易感染(Susceptible)和感染(Infected)两种状态,在不考虑计算机病毒在机器内的细节的情况下,宏观上认为一个处于易感染状态的计算机被病毒感染后会变成感染状态,处于感染状态中的计算机通过某种措施(例如安装杀毒软件进行杀毒或重新安装操作系统)将该计算机病毒清除后,该计算机又重新成为易感染计算机,该模型简单地描述了计算机病毒在网络中的传播情况,为后续计算机病毒模型的研究奠定了基础。随后, Kim 等[8]提出了 SIR 模型,考虑杀毒软件的效果,并假定 R 计算机一旦从计算机病毒中恢复过来便不会再被相同的病毒所感染,也不会向其他计算机传播病毒,该模型在 SIS 模型的基础上增加了一个恢复状态(Recovered),为此后计算机病毒模型的研究拓展了思路。随着 SIS 模型和 SIR 模型等经典模型研究的深入,人们开始考虑更多的现实因素。SIRS^[9-11]模型综合了 SIS 和 SIR 两种模型,能更好地刻画计

本文受辽宁省教育科学“十三五”规划立项课题(JG18DA031),辽宁省教育科学“十三五”规划项目(JG18DB306)资助。

刘晓东(1991-),男,硕士,主要研究方向为复杂网络、网络安全;魏海平(1964-),男,硕士,教授,CCF 高级会员,主要研究方向为网络安全、信息安全;曹宇(1984-),男,博士,主要研究方向为复杂网络,E-mail:yucao_lnshu@163.com(通信作者)。

算机状态。在 SIR 模型的基础上, SIRS 模型考虑到处于感染状态的计算机通过安装杀毒软件、重新安装操作系统等方式将该计算机病毒清除后, 该计算机又重新成为了易感染计算机(S)。

上述研究模型较为细致地刻画了计算机病毒的传播过程, 主要研究了这些模型的动力稳定性行为, 其研究方法具有重要的参考价值, 结果也具有较高的理论价值。但是, 这些模型只是简单地调整与修改了相对应的生物传播模型, 忽略了网络拓扑结构发生变化的情况, 这与计算机病毒的网络传播实际情况并不完全相符。本文针对此问题提出了一种网络拓扑结构发生变化的 SIRS 模型, 该模型在经典 SIRS 模型的基础上加入网络拓扑信息 $K(I)$, 当病毒在网络上传播时, 使得计算机网络的拓扑结构始终都随着感染计算机节点数量的变化而发生变化, 进而影响计算机病毒在网络上的传播。与文献[1-11]提出的模型相比, 本文提出的模型能够更加精确地描述计算机病毒在网络中的实际传播情况。通过对模型进行动力稳定性分析得到了一些有意义的结论。

2 模型的建立与分析

下文将介绍本文用到的定理。

2.1 平衡点的稳定性

先考虑一般二维系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

定理 1 若点 (x_0, y_0) 使 $P(x_0, y_0) = 0, Q(x_0, y_0) = 0$, 则称 (x_0, y_0) 为系统(1)的平衡点^[12]。

定理 2 当系统(1)的雅克比矩阵

$$J = \begin{pmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

的所有特征值都有负实部时, 系统(1)在平衡点 (x_0, y_0) 处是渐进稳定的^[13]。

定理 3(HURWITZ 定理) 设给定常系数的 n 次代数方程为:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

其中, $a_0 > 0$, 作行列式: $\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 =$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, 其中 $a_i = 0$ (对一切 $i > n$)。那

么, 方程(1)的一切根均具有负实部的充分必要条件是下列不等式同时成立^[14]。

$$a_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0$$

2.2 经典 SIRS 模型的建立与分析

2.2.1 经典 SIRS 模型的建立

SIRS 模型主要针对一些可以丧失免疫力的传染病, 其传播机理图如图 1 所示。

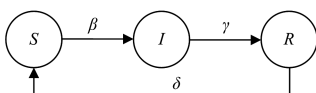


图 1 SIRS 传播机理图

在经典 SIR 模型的基础上, 免疫者会以概率 σ 丧失免疫力重新成为易感者。借助传播机理图建立经典的仓室 SIRS^[15] 模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \delta R \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \delta R \end{cases} \quad (2)$$

假设网络规模固定, 即 $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ 。

2.2.2 经典 SIRS 模型分析

由于假设条件 $S(t) + I(t) + R(t) = 1$, 系统(2)可以化简成系统(3):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \delta(1 - S - I) \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \end{cases} \quad (3)$$

当系统稳定时必然得到下列方程组:

$$\begin{cases} -\beta SI + \delta(1 - S - I) = 0 \\ \beta SI - \gamma I = 0 \end{cases} \quad (4)$$

由方程(4)可以很容易得到系统(2)的两组平衡点分别为:

$$E_0 = (1, 0), E_1 = \left(\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\delta(\beta - \gamma)}{\beta(\delta + \gamma)} \right)$$

求取系统(2)在点 $E_0 = (1, 0)$ 处的雅克比矩阵为:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\delta & -\beta - \delta \\ 0 & \beta - \gamma \end{bmatrix}$$

它的两个特征根分别是 $\lambda_1 = -\delta, \lambda_2 = \beta - \gamma$, 那么当 $R_0 = \beta/\gamma < 1$ 时, 系统(2)在平衡点 $E_0 = (1, 0)$ 处全局渐进稳定, 当 $R_0 = \beta/\gamma > 1$ 时, 系统在 $E_0 = (1, 0)$ 处不稳定, 系统在 E_1 处全局渐进稳定^[16]。

2.3 改进 SIRS 模型的建立与分析

2.3.1 改进 SIRS 模型的建立

基于经典传染病仓室模型建立的思想, 将整个计算机节点 $N(t)$ 划分为 3 个仓室: 易感状态 $(S(t))$ 、感染状态 $(I(t))$ 、和免疫状态 $(R(t))$, 其中 t 为时间, 根据实际情况, 单位时间内一个健康计算机节点与一个被计算机病毒感染的计算机节点接触的次称为接触率, 它与网络中总体计算机数量 $N(t)$ 有着密切的关系, 记为 $C(N)$, 健康计算机节点与被病毒感染的计算机节点每次接触时被其感染的平均概率为 β , β 被称为传染概率, 我们把传染概率 β 的接触率称为有效接触率, 即 $\beta C(N)$, 它可以反映健康计算机节点的抗病能力、环境条件等实际因素, 处于易感状态的计算机节点 S 在整个计算机节点中的比例为 S/N , 因此处于易感状态的计算机节点的平均感染率为 $\beta C(N)S/N$, 由上可得 t 时刻由易感状态转换为感染状态的计算机数量为 $\beta C(N)S(t)/N(t)$ 。假设接触率与网络中个体总数的关系为 $C(N) = K(I)N$, 其中 $K(I)$ 表示节点的度, $K(I)$ 随着 I 的增大而减小。综上, 本文提出了一种网络拓扑结构发生变化的改进 SIRS 模型, 传播机理如图 2 所示。

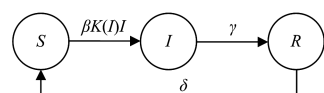


图 2 改进 SIRS 模型传播机理图

易感节点与感染节点接触后以概率 $\beta K(I)I$ 转化为感染者,因为计算可能安装有杀毒软件,随着时间的推移,杀毒软件会更新病毒库,查杀现有病毒,感染节点会以概率 γ 进入免疫状态,在处于免疫状态的计算机通过杀毒软件进行杀毒或重装操作系统等方式将该计算机病毒清除后,当新型病毒入侵网络后该计算机又有可能重新成为易感染者(S),结合SIRS传染病机理图以及原有的SIRS模型可得到带有网络拓扑结构发生变化的SIRS模型。

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta K(I)SI + \delta R \\ \frac{dI}{dt} = \beta K(I)SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \delta R \end{cases} \quad (5)$$

2.3.2 改进SIRS模型的稳定性分析

根据计算机病毒入侵到网络的特征可以分为以下几种情况。

(1)在新型计算机病毒入侵计算机网络的初期,杀毒软件一般是没有能力将此类新型病毒查杀的,也就是说式(5)中的 $\gamma=0$,计算机使用者可以通过重装系统等方式将计算机病毒从机器内清除,重装系统后的计算机虽然清除了原来的病毒但是并不能对该病毒免疫,将再次以 δ 概率成为易感者, δ 表示免疫丧失率。那么本文提出的改进的SIRS模型将演变成改进的SIS模型,该模型的传播机理图如图3所示。

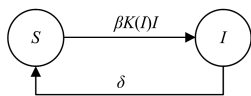


图3 SIS传播机理图

根据SIS传染病机理图建立如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta K(I)IS + \delta I \\ \frac{dI}{dt} = \beta K(I)IS - \delta I \end{cases} \quad (6)$$

当系统(6)稳定时必然得到方程组(7):

$$\begin{cases} -\beta K(I)IS + \delta I = 0 \\ \beta K(I)IS - \delta I = 0 \end{cases} \quad (7)$$

由方程组(7)易得到系统(6)的两组平衡点分别为:

$$E_0 = (1, 0), E_1 = \left(\frac{\delta}{\beta K(I)}, 1 - \frac{\delta}{\beta K(I)} \right)$$

E_0 被称为无病平衡点,如果系统最终稳定在无病平衡点 E_0 ,则表示最后计算机病毒消失; E_1 被称为地方病平衡点,如果系统最终稳定在地方病平衡点,则表示计算机病毒最后不消失,其中 s, i 分别代表处于易感状态的计算机节点和处于感染状态的计算机节点在总计算机节点中所占的比例。

将方程(6)化为如下形式:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta K(I)(1-S)S + \gamma(1-S)$$

即:

$$\frac{dS}{dt} = (1-S)(\delta - \beta K(I)S)$$

$$\frac{dS}{dt} = \beta K(I)(1-S) \left(\frac{\delta}{\beta K(I)} - S \right)$$

如果 $\delta/\beta K(I) > 1$, 即 $\beta K(I)/\delta < 1$, 那么无病平衡点是不存在的,因为 $\delta/\beta K(I)$ 表示的是易感节点在总计算机节点中

的比例,且 $S(t) + I(t) = 1$ 。易感节点在总计算机节点中的比例最大值是不可能大于1的,因此,当 $\beta K(I)/\delta < 1$ 时系统逐渐稳定于平衡点 E_0 , 当 $\beta K(I)/\delta > 1$ 时, 即 $\delta/\beta K(I) < 1$, 系统在无病平衡点是不稳定的,系统最终收敛到 E_1 , 即计算机病毒不消失,最终感染计算机病毒节点的比例稳定在 $1 - \delta/\beta K(I)$ 。

通过以上分析可以得出结论:在计算机病毒入侵计算机网络初期,杀毒软件并不能及时查杀计算机病毒,此时计算机使用者通过重装系统等方式将计算机病毒从机器内清除,但是重装完系统的计算机对原有病毒是不免疫的,在联网的状态下极有可能再次感染病毒。在这样的一个过程中,传染概率 β 和免疫丧失率 δ 可以认为是基本稳定的,那么当 $\beta K(I)/\delta < 1$ 时系统逐渐稳定于平衡点 E_0 , 当 $\beta K(I)/\delta > 1$ 时, 即 $\delta/\beta K(I) < 1$, 系统最终收敛到 E_1 , 即计算机病毒不消失。最终感染计算机病毒节点的比例稳定在 $1 - \delta/\beta K(I)$ 。当 δ, β 保持稳定时,计算机网络拓扑结构的变化显然对病毒最终在计算机网络中的存在状态是有深刻影响的。

(2)经过一段时间后杀毒软件能针对该病毒制定查杀策略,及时地将病毒从计算机网络中清除,在这种情况下本文所建立的改进SIRS模型将演变成SIR模型,根据文献[16]中2.3小节对SIR模型的分析,最终计算机病毒将从网络中消亡。

(3)在讨论了上述两种情况后,在本小节着重阐述一种较为常见的情况,即病毒在网络中传播一段时间后,杀毒软件能以一定概率将联网计算机节点中的病毒查杀,通过分析可以得知计算机病毒最终将从网络中消失,但是当另外一种计算机病毒入侵到网络中,或者该病毒发生变异时,处于免疫状态的计算机节点势必会再次成为易感者,对此状态进行分析。

引理3 平衡点 $(s, i) = (1, 0)$ 是系统(6)的一组局部稳定解,当满足 $\beta K(0)/\gamma < 1$ 时,系统(6)收敛于 $(s, i) = (1, 0)$, 计算机病毒最终从网络中消失。

证明:设 $f(I) = K(I)\beta I$, 根据归一化条件 $S(t) + I(t) + R(t) = 1$, 式(6)可以写为如下形式:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -K(I)\beta SI + \sigma(1-S-I) \\ \frac{dI}{dt} = K(I)\beta SI - \gamma I \end{cases} \quad (8)$$

当式(8)满足如下形态时系统(6)达到稳态:

$$\begin{cases} -K(I)\beta SI + \sigma(1-S-I) = 0 \\ K(I)\beta SI - \gamma I = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$f(0) = 0, f'(I) = \beta(K'(I)I + K(I))$, 则式(9)可以改写为如下形式:

$$\begin{cases} -f(I)S + \sigma(1-S-I) = 0 \\ f(I)S - \gamma I = 0 \end{cases} \quad (10)$$

通过计算易得(10)的一个平衡点为 $E_0 = (s, i) = (1, 0)$ 。

式(10)的雅克比矩阵为:

$$J = \begin{pmatrix} -f(I) - \sigma & -f'(I)S - \sigma \\ f(I) & f'(I)S - \gamma \end{pmatrix}$$

将无病平衡点代入式(10)得:

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & -f'(0) - \sigma \\ 0 & f'(0) - \gamma \end{pmatrix}$$

为使系统(6)在该平衡点处稳定,必须满足其特征方程的特征值全具有负实部,因此需满足 $f' - \gamma < 0$, 即 $\frac{(\beta K(I)I)'}{\gamma} <$

1, 即当 $\frac{\beta}{\gamma}(K(0)) < 1$ 时, 系统在 $(1, 0)$ 点处是稳定的。

引理 5 平衡点 $(s, i) = (S^*, I^*)$ 是方程组 (6) 的一组局部稳定解, 当满足 $\beta K(0)/\gamma > 1$ 且 $f'(I) < 0$ 时系统 (6) 收敛到 $(s, i) = (S^*, I^*)$, 感染计算机病毒的节点比例最终稳定在 $i = I^*$, 计算机病毒将始终存在于计算机网络中。

证明: 根据阈值理论及文献 [17-19], 系统 (6) 应存在另一组平衡点, 但是其求解过程极其繁琐, 首先证明系统 (6) 存在第二组平衡点, 第二组平衡点为 $(S, I) = (S^*, I^*) \neq (1, 0)$, 将其代入式 (10) 整理得:

$$\begin{cases} -f(I^*)S^* + \sigma(1 - S^* - I^*) = 0 \\ f(I^*)S^* - \gamma I^* = 0 \end{cases}$$

消元得:

$$-\gamma I^* + \sigma(1 - \gamma I^* / f(I^*) - I^*) = 0$$

设:

$$H(I) = -\gamma I + \sigma(1 - \gamma I / f(I) - I)$$

$f(i)$ 满足 $f(0) = 0, f'(I) < 0$, 因此

$$H(0) > 0$$

$$H(1) = -\gamma + \sigma(1 - \gamma / f(1) - 1)$$

$$H(1) < 0$$

$$H'(I) = -\gamma + \sigma(\gamma I^2 K'(I) / f^2(I) - 1)$$

$$K'(I) < 0, \text{ 故 } \gamma I^2 K'(I) / f^2(I) < 0, H'(I) < 0, \text{ 因为 } H(0) > 0, H(1) < 0, H'(I) < 0, \text{ 所以系统存在另一组平衡点 } E^* = (S^*, I^*).$$

系统 (8) 在平衡点 E^* 处的雅克比矩阵为:

$$J = \begin{pmatrix} -f(I^*) - \sigma & -f'(I^*)S^* - \sigma \\ f(I^*) & f'(I^*)S^* - \gamma \end{pmatrix}$$

其特征方程为:

$$\lambda^2 + (f(I^*) + \delta + \gamma - f(I^*)S^*)\lambda + (f(I^*) + \delta)\gamma + f(I^*)\delta - f(I^*)S^*\delta$$

$$a_0 = 1, a_1 = (f(I^*) + \delta + \gamma - f(I^*)S^*), a_2 = (f(I^*) + \delta)\gamma + f(I^*)\delta - f(I^*)S^*$$

当 $f'(I) < 0$ 时:

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0$$

由赫尔维茨判据可知在地方病平衡点处是稳定的。

由引理 3 和引理 4 可以看出: 当满足 $\beta K(0)/\gamma < 1$ 时, 系统 (6) 收敛于 $(s, i) = (1, 0)$, 计算机病毒最终从网络中消失; 当满足 $\beta K(0)/\gamma > 1$ 且 $f'(I) < 0$ 时, 系统 (6) 收敛到 $(s, i) = (S^*, I^*)$, 感染计算机病毒的节点比例最终稳定在 $i = I^*$, 计算机病毒将始终存在于计算机网络中, 那么在此种情况下, 当系统中的 β, γ 取值稳定时, 网络拓扑结构的变化对病毒最终在计算机网络中是否存在是有极大影响的。

综上所述, 无论计算机病毒在网络中以何种状态进行传播, 均可以看成是本文所改进的 SIRS 模型的特殊情况, 在任何一种状态下, 网络拓扑结构的变化对病毒在计算机网络中的传播状态都是有着深刻影响的。

4 数值模拟与仿真实验

计算机病毒在网络中的传播数据难以获取, 而进行实际

实验也存在一定的安全隐患。文献 [20] 采用复杂网络仿真建模工具 Netlogo, 分析了其所建立的计算机网络病毒传播模型, 并取得了良好的效果。文献 [21-22] 运用 MATLAB 并结合相应数据进行了数值模拟实验, 均取得了相应的效果, 相较于文献 [20-22] 中均采用单一实验方式, 本文采用 Netlogo 与 MATLAB 相结合的方式验证本文理论分析所得的结果。

4.1 改进 SIRS 模型无病平衡点仿真

采用复杂网络仿真建模工具 netlogo, 通过添加界面工具和后台程序构造仿真系统, 根据设置不同 turtles 的颜色来表示节点 (代表计算机) 的不同状态。观察并记录各网络节点的动态变化, 统计每个时间节点处于不同状态时的节点数量, 画出统计图。

仿真中, 网络规模为 300, 平均度分别为 3 和 6, 假设传染率 $\beta = 0.1, \gamma = 0.7$, 初始感染节点均为 180 个, 此时 $\beta K(0)/\gamma < 1$, 根据引理 3, 计算机病毒将从网络中消失。

对比图 4(a) 和图 4(b) 不难发现, 在同样满足引理 3 的情况下, 在较为稀疏的网络中由于计算机节点之间的联系不是那么密切, 当病毒在网络中传播时, 可以有效地抑制病毒在网络上的传播, 而在联系较为密切的网络中, 由于计算机之间的联系较为密切, 当网络中爆发病毒时, 计算机病毒可以在网络中迅速蔓延, 并在计算机网络中驻留较长时间。

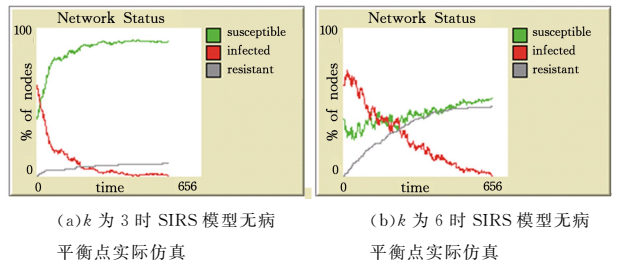


图 4 SIRS 无病平衡点仿真

4.2 SIRS 地方病平衡点仿真

仿真中, 网络规模为 300, 平均度分别为 3 和 6, 假设传染率 $\beta = 0.1, \gamma = 0.7$, 初始感染节点均为 3 个, 此时 $\beta K(0)/\gamma > 1$, 根据引理 4, 计算机病毒将不会从网络中消失。

对比图 5(a) 和图 5(b) 不难发现, 当平均度为 15 时, 因为当计算机之间的连接比平均度为 10 时更加紧密, 在病毒在网络中爆发的初期, 计算机病毒能够在网络中迅速传播, 所达到的最大峰值比平均度为 10 时大许多。在同样满足阈值条件的情况下, 度更大的网络中易感者所占的比例低于度小的网络, 这充分说明了在计算机病毒入侵网络时, 网络拓扑结构对病毒的传播是有深刻影响的。

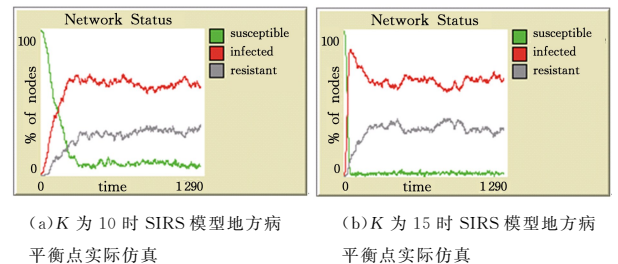


图 5 SIRS 地方病平衡点仿真与数值模拟

4.3 无病平衡点及地方病平衡点 MATLAB 数值模拟实验

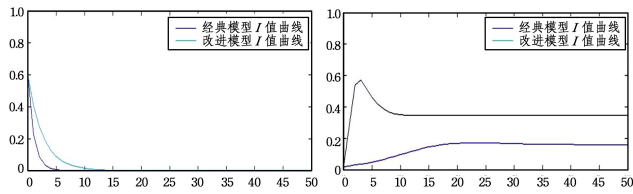
参考已有文献 [23] 所做的数值模拟, 再结合本文的研究内容, 假设一个均匀网络中每个节点的度为 $\langle k \rangle$, 则对于健康节

点的感染率 $p(t) = 1 - (1 - \beta)^{(k)i(t)}$,因此在仿真中我们假设 $f(i) = 1 - (1 - \beta)^{(k)i(t)}$ 。

首先对系统在无病平衡点处进行数值模拟,在接下来的实验中,设改进模型中 $\beta = 0.05, \gamma = 1, \sigma = 0.2, s_0 = 0.2, i_0 = 0.6, r_0 = 0.2, k = 3$,而经典模型中 $\beta = 0.05, \gamma = 1, \sigma = 0.2, s_0 = 0.2, i_0 = 0.6, r_0 = 0.2$ 。

其次对系统在地方病平衡点处进行数值模拟,在接下来的实验中,设改进模型中 $\beta = 0.5, \gamma = 0.3, \sigma = 0.2, s_0 = 0.02, i_0 = 0.98, r_0 = 0, k = 15$,而经典模型中 $\beta = 0.5, \gamma = 0.3, \sigma = 0.2, s_0 = 0.02, i_0 = 0.98, r_0 = 0$ 。

对比图6(a)和图4(a)可以很明确地得出,在无病平衡点处,本文所改进的模型更加贴近计算机病毒在网络中传播的实际曲线,而在经典模型中没有考虑到网络拓扑结构发生变化这一重要情况,同样,对比图6(b)和图5(b),在地方病平衡点处,本文改进的SIRS模型比经典SIRS模型更能精确地反映计算机病毒在网络中的实际传播情况。



(a) 无病平衡点改进模型与经典模型 $I(t)$ 跟踪图

(b) 地方病平衡点改进模型与经典模型的 $I(t)$ 跟踪图

图6 SIRS无病平衡点与地方病平衡点的数值模拟

结束语 本文在经典SIRS模型的基础上,根据实际的计算机病毒传播机理,提出了一种网络拓扑结构发生变化的SIRS模型,通过对模型的分析得出:当系统满足阈值条件时病毒最终消失,当系统不满足阈值条件时病毒不会消失,感染病毒的计算机节点的比例会逐渐稳定于常数值。通过理论分析和实验证实了网络拓扑结构的变化对计算机病毒在网络中的传播过程是有较大影响的。与此同时,通过对实验结果的对比得出,改进的SIRS模型比原有的模型能更精确地描述SIRS类传染病的传播过程。

综合本文的分析,当计算机病毒在网络上传播时,网络拓扑结构的变化对计算机病毒在网络中的存在状态是有重要影响的,在网络爆发病毒的初期,我们可以通过采用隔离中毒电脑等方法来减弱计算机节点之间的关联性,从而达到抑制计算机病毒传播的目的。另外,本文虽然在理论上给出了相关证明,但是由于计算机病毒在计算机网络上传播的实际数据难以获取,进行实际实验又将耗费巨大的人力物力且会造成一定的经济损失,目前主要采用仿真软件进行模拟实验,在以后的研究中希望可以获取大量的实际数据,从实际数据中找出 $S(t), I(t), R(t)$ 的实际变化曲线,并与仿真和数值模拟实验所得结果做对比来探究计算机病毒在网络中的传播情况。

参考文献

[1] KEPHART J O, WHITE S R. Directed-graph epidemiological models of computer viruses[C]//Proceedings of the 1991 IEEE Symposium on Security and Privacy. Oakland, California, USA: IEEE Computer Society Press, 1991: 343-359.

[2] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic spread

ing in scale-free networks[J]. Physical Review Letters, 2001, 86(14): 3200-3203.

[3] PASTOR-SATORRAS R, VAZQUEZ A, VESPIGNANI A. Dynamical and correlation properties of the Internet[J]. Physical Review Letters, 2001, 87(25): 258701.

[4] MORENO Y, PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks[J]. Eur. Phys. J. B, 2002, 26(4): 521-529.

[5] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemics and immunization in scale-free networks[OL]. <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0205260>.

[6] KEPHART J O, WHITE S R, CHESSE D M. computers and epidemiology[J]. IEEE Spectrum, 1993, 30(5): 20-26.

[7] KEPHART J O, WHITE S R. Directed-graph epidemiological models of computer viruses[C]//Proceedings of the 1991 IEEE Computer society Symposium on Research in security and Privacy. Oakland, CA. Piscataway: IEEE Press 1991: 343-359.

[8] KIM J, RADHAKRISHNAN S, DHALL S K. Measurement and analysis of worm propagation on internet network topology [C]//Proceedings of the 13th International Conference on Computer Communications and Networks (ICCN 2004). Chicago, IL, Piscataway: IEEE Press, 2004: 495-500.

[9] HAN X, TAN Q L. Dynamical behavior of computer virus on internet [J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217(6): 2520-2526.

[10] MISHRA B K, JHA N. Fixed Period of temporary Immunity after run of antimalevolent software on computer nodes[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 190(2): 1207-1212.

[11] MISHRA B K, PANDEY S K. Fuzzy epidemic model for the transmission of worms in computer network[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications: Real World Applications, 2010, 11(5): 4335-4341.

[12] 马知恩, 周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科技出版社, 2004.

[13] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 72-85.

[14] 李从清. 系统稳定性的劳斯判据与赫尔维茨判据的等价性论证[J]. 天津城市建设学院学报, 2009, 15(3): 207-210.

[15] 何艳辉, 唐三一. 经典 SIR 模型辨识和参数估计问题[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(3): 252-258.

[16] 曹宇. 传染病动力学模型研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2014.

[17] 叶晓梦, 杨小帆. 基于两阶段免疫接种的 SIRS 计算机病毒传播模型[J]. 计算机应用, 2013, 33(3): 739-742.

[18] 彭梅, 李传东, 何兴. 基于直接免疫的 SEIR 计算机病毒传播模型[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, 30(1): 77-80.

[19] 冯丽萍, 王鸿斌, 冯素琴. 改进的 SIR 计算机病毒传播模型[J]. 计算机应用, 2011, 31(7): 1891-1893.

[20] 张安勇, 邵世芬, 苏丽君. 基于 Netlogo 的计算机网络病毒传播模型 SIRH 及仿真[J]. 青岛大学学报(自然科学版), 2014, 27(2): 39-44.

[21] 徐兰芳, 习爱民, 范小峰. 计算机网络病毒传播模型 SIRH[J]. 计算机工程与科学, 2009, 31(1): 4-6, 30.

[22] 刘丹, 殷亚文, 宋明. 基于 SIR 模型的微博信息扩散规律仿真分析[J]. 北京邮电大学学报(社会科学版), 2014, 16(3): 28-33.

[23] 曹宇, 井元伟, 袁峰, 等. 复杂网络上带有非线性感染率的 SIRS 模型分析[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2012, 33(1): 17-20.