命题逻辑中单元子句及其负文字和冗余子句

刘 婷 徐 扬 陈秀兰
(西南交通大学系统可信性自动验证国家地方联合工程实验室 成都 610031)

摘 要 针对命题逻辑中逻辑公式的某个单元子句及其负文字和冗余子句,给出了含单元子句的子句集的等价条件,同时刻画了子句集中文字和子句的冗余性,得到了一些冗余文字和冗余子句的判定方法,还提出了与子句集可满足性的等价条件。所提方法可以使命题逻辑的逻辑公式更简单,为命题逻辑中逻辑公式的简化提供一定的理论支撑。

关键词 命题逻辑,可满足性,冗余文字,负文字,冗余子句

中图法分类号 O141.1 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2019.08.042

Unit Clauses and Their Complementary Literals and Redundant Clauses in Propositional Logic

LIU Ting XU Yang CHEN Xiu-lan
(National-Local Joint Engineering Laboratory of System Credibility Automatic Verification,
Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract In the logical formula of propositional logic, some equivalence conditions for the set of clauses containing an unit clause was given by studying the unit clause and its complementary literal, and the redundancy of literals and clauses in the set of clauses were described. The methods of judging redundant literals and redundant clauses were obtained, and the equivalence conditions of the satisfiability of clause sets were also proposed. These methods can simplify the logic formula and provide some theoretical support for simplifying the logic formula in propositional logic.

Keywords Propositional logic, Satisfiability, Redundant literals, Complementary literals, Redundant clauses

1 引言

命题逻辑中逻辑公式的简化是计算机科学和人工智能领域的重要研究方向。在命题逻辑的逻辑公式中,冗余是一种非常普遍的现象,会占用存储空间,耗费计算时间,而且命题逻辑中逻辑公式的大量冗余可能会影响表示知识的含义,而消除冗余后的公式既没有改变原公式想表达的含义又能使知识更容易理解,因此消除冗余具有十分重要的意义。实际可满足性判定过程中消除冗余的方法已经被许多学者进行了广泛的研究。2005 年,Liberatore[1]研究了命题逻辑中逻辑公式的子句集分类,结合不冗余等价子集,分别提出了必要子句、有用子句和无用子句的概念及其等价定义,并相应给出了必要子句、有用子句和无用子句的性质及其等价条件。2007 年,Fourdrinoy 等[2]从 SAT 实例中消除一类冗余子句,在一定程度上提高了可满足性证明的效率,提出了一个删除冗余子句的方法。2011 年,Grimm 等[3]研究了消除本体中冗余的方法,讨论了冗余的典型案例,提出了证明间接计算不可冗余的方法,并利用命中集树算法和模块提取技术对证明过程进行优化。2014 年,Tang[4]研究了逻辑公式中子句的 3 种冗余性,即绝对冗余性、相对冗余性和不冗余性。上述研究在求解逻辑公式的过程中取得了显著成果,但对单元子句及其负文字的研究仍然不足。本文主要研究命题逻辑中逻辑公式的单元子句及其负文字和冗余子句,以及它们与子句集的冗余关系。本文基于命题逻辑的基础知识及冗余文字和冗余子句的概念,进一步研究了单元子句及其负文字和冗余子句的关系,并得到一些与子句集等价的条件,为命题逻辑中逻辑公式的简化奠定了一定的理论基础。

2 预备知识

定义 1[5] 在命题逻辑的逻辑公式中,对于变量 x,有两种文字(literal),即正文字(positive literal)x 和负文字(negative literal)$\bar{x}$。一个子句(clause)是有限文字的析取,记为 $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$。一个合取范式(Conjunctive Normal Form, CNF)是有限子句的合取,记为 $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$,或者是若干个子句的集合,记为子句集 $S=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$。

某个文字 x 属于一个子句 C,记为 $x \in C$;文字 x 不属于

到稿日期:2018-06-30 返修日期:2018-09-22 本文受国家自然科学基金项目(61673320),中央高校研究基础基金项目(2682017ZT12,2682016CX119)资助。

刘 婷(1992-),女,硕士生,主要研究方向为逻辑与推理;**徐 扬**(1956-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为逻辑代数、代数逻辑、不确定性推理和自动推理,E-mail:xuyang@swjtu.edu.cn(通信作者);**陈秀兰**(1994-),女,硕士生,主要研究方向为自动推理。

子句 C，记为 $x\notin C$。

给定一个变量 x，其真值赋值 v 是一个函数 $v:x\mapsto\{0,1\}$，即如果 x 在 v 的赋值下是真值，那么 $v(x)=1$，因此 $v(\bar{x})=0$，否则 x 为假值，$v(x)=0$，那么 $v(\bar{x})=1$。

定义 2[1] 在命题逻辑的逻辑公式中，如果子句 C 只包含某一个文字 x，那么称子句 C 是单元子句(unit clause)；如果子句 C 同时包含文字 x 及其负文字 $\bar{x}$，那么称子句 C 是重言式子句(tautology clause)。

定义 3[1] 在命题逻辑的逻辑公式中，给定两个子句集 S 和 S'，对于任何一组赋值，如果满足子句集 S 当且仅当满足子句集 S'，那么称子句集 S 和 S' 是等价的。

定义 4[1] 在命题逻辑的逻辑公式中给定一个子句集 $S=\{D,C_1,C_2,\cdots,C_n\}$，如果该子句集满足 $D\wedge C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_n\leftrightarrow C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_n$，那么称子句 D 是子句集 S 的冗余子句。

定义 5[7] 在命题逻辑的逻辑公式中给定一个子句集 $S=\{D,C_1,C_2,\cdots,C_n\}$，其中 $D=x\vee D_1$，如果该子句集满足 $D\wedge C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_n\leftrightarrow D_1\wedge C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_n$，那么称文字 x 在 D 中关于 S 冗余。

定理 1[7] 在命题逻辑的逻辑公式中给定一个子句集 $S=\{D,C_1,C_2,\cdots,C_n\}$，且其中的子句 D 不是重言式子句，那么子句 D 是子句集 S 中的冗余子句当且仅当子句集 $S_1=\{C_1-D,C_2-D,\cdots,C_n-D\}$ 不可满足，其中 $C_i-D=\{x\mid x\in C_i$ 且 $x\notin D\}$，$1\leqslant i\leqslant n$。

定理 2[4] 在命题逻辑的逻辑公式中给定一个子句集 $S=\{D,C_1,C_2,\cdots,C_n\}$，其中 $D=x\vee D_1$，且其中的子句 D_1 不是重言式子句，那么文字 x 在 D 中是关于 S 冗余的当且仅当子句集 $S_2=\{x,C_1-D_1,C_2-D_1,\cdots,C_n-D_1\}$ 不可满足，其中 $C_i-D_1=\{x\mid x\in C_i$ 且 $x\notin D_1\}$，$1\leqslant i\leqslant n$。

3 单元子句及其负文字和冗余子句

下面对含单元子句的子句集的等价性质进行讨论。

定理 3[6] 在命题逻辑公式中给定一个子句集 $S_3=\{x,C_1,C_2,\cdots,C_n\}$，且 S_3 中不存在单元子句($\bar{x}$)，那么子句集 S_3 和 S_4 是等价的，且子句集 S_3 和 S_5 是等价的，其中 $S_4=(S\backslash S(x))\cup\{x\}$，$S_5=(S_1\backslash S(\bar{x}))\cup(S(\bar{x})\backslash\{\bar{x}\})$，$S(x)=\{C\mid x\in C,C\in S\}$，$S(\bar{x})=\{C\mid \bar{x}\in C,C\in S\}$。

由定理 1 易知，子句集 S_4 和子句集 S_5 是等价的。

定理 4 在命题逻辑的逻辑公式中给定子句集 $S_3=\{x,C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 和 $S_4=(S\backslash S(x))\cup\{x\}$，如果子句集 S_3 中的存在一个子句 C 不包含文字 x 及其负文字 $\bar{x}$，那么子句 C 在子句集 S_3 中冗余当且仅当它在子句集 S_4 中冗余。

证明：设子句集 $S_3=\{x,C_1,\cdots,C_r,C_{r+1},\cdots,C_m,C_{m+1},\cdots,C_n\}$。其中子句 $C_1,\cdots,C_r$ 都包含文字 x，子句 $C_{r+1},\cdots,C_m$ 都包含文字 $\bar{x}$，子句 $C_{m+1},\cdots,C_n$ 都不包含文字 x 及其负文字 $\bar{x}$，那么子句集 $S_4=\{x,C_{r+1},\cdots,C_m,C_{m+1},\cdots,C_n\}$。不妨设定理中的子句 C 为 C_n，证明如下：

(必要性)如果子句 C_n 在子句集 S_4 中不冗余，那么 $x\wedge C_{r+1}\wedge\cdots\wedge C_{n-1}\wedge C_n$ 与 $x\wedge C_{r+1}\wedge\cdots\wedge C_{n-1}$ 不等价，因此存在一组赋值 v，使得 $v(x)=v(C_{r+1})=\cdots=v(C_{n-1})=1$，而 $v(C_n)=0$。因为子句 $C_1,\cdots,C_r$ 都包含文字 x，所以有 $v(C_1)=\cdots=v(C_r)=1$，故 $v(x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_{n-1})=1$，但由于 $v(x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_{n-1}\wedge C_n)=0$，即 $x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_{n-1}$ 与 $x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_{n-1}\wedge C_n$ 不等价，因此子句 C_n 在子句集 S_3 中不冗余。与子句 C 在子句集 S_3 中冗余矛盾，所以如果子句 C 在子句集 S_3 中冗余，则它在子句集 S_4 中冗余。

(充分性)如果子句 C_n 在子句集 S_3 中不冗余，那么 $x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_{n-1}\wedge C_n$ 与 $x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_{n-1}$ 不等价，因此存在一组赋值 v，使得 $v(x)=v(C_1)=\cdots=v(C_{n-1})=1$，而 $v(C_n)=0$。故 $v(x\wedge C_{r+1}\wedge\cdots\wedge C_{n-1})=1$，但 $v(x\wedge C_{r+1}\wedge\cdots\wedge C_{n-1}\wedge C_n)=0$，即 $x\wedge C_{r+1}\wedge\cdots\wedge C_{n-1}$ 与 $x\wedge C_{r+1}\wedge\cdots\wedge C_{n-1}\wedge C_n$ 不等价，因此子句 C_n 在子句集 S_4 中不冗余。与子句 C 在子句集 S_4 中冗余矛盾，所以如果子句 C 在子句集 S_4 中冗，则它在子句集中 S_3 冗余。

综上所述，子句 C 在子句集 S_3 中冗余当且仅当它在子句集 S_4 中冗余。

推论 1 在命题逻辑的逻辑公式中给定子句集 $S_3=\{x,C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 和 $S_5=(S_1\backslash S(\bar{x}))\cup(S(\bar{x})\backslash\{\bar{x}\})$，如果子句集 S_3 中存在一个子句 C 不包含文字 x 及其负文字 $\bar{x}$，那么子句 C 在子句集 S_3 中冗余当且仅当它在子句集 S_5 中冗余。

推论 2 在命题逻辑的逻辑公式中给定子句集 $S_4=(S\backslash S(x))\cup\{x\}$ 和 $S_5=(S_1\backslash S(\bar{x}))\cup(S(\bar{x})\backslash\{\bar{x}\})$，如果子句集 S_4 中存在一个子句 C 不包含文字 x 及其负文字 $\bar{x}$，那么子句 C 在子句集 S_4 中冗余当且仅当它在子句集 S_5 中冗余。

定理 5 在命题逻辑的逻辑公式中给定子句集 $S_3=\{x,C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 和 $S_4=(S\backslash S(x))\cup\{x\}$，如果子句集 S_3 中存在一个子句 C 包含文字 $\bar{x}$，那么子句 C 在子句集 S_3 中冗余当且仅当它在子句集 S_4 中冗余。

证明：设子句集 $S_3=\{x,C_1,\cdots,C_r,C_{r+1},\cdots,C_m,C_{m+1},\cdots,C_n\}$，其中子句 $C_1,\cdots,C_r$ 都包含文字 x，子句 $C_{r+1},\cdots,C_m$ 都包含文字 $\bar{x}$，子句 $C_{m+1},\cdots,C_n$ 都不包含文字 x 及其负文字 $\bar{x}$，那么子句集 $S_4=\{x,C_{r+1},\cdots,C_m,C_{m+1},\cdots,C_n\}$。不妨设定理中的子句 C 为 C_{r+1}，证明如下：

(必要性)如果子句 C_{r+1} 在子句集 S_4 中不冗余，那么 $x\wedge C_{r+1}\wedge C_{r+2}\wedge\cdots\wedge C_n$ 与 $x\wedge C_{r+2}\wedge\cdots\wedge C_n$ 不等价，因此存在一组赋值 v，使得 $v(x)=v(C_{r+2})=\cdots=v(C_n)=1$，而 $v(C_{r+1})=0$。又因为子句 $C_1,\cdots,C_r$ 都包含文字 x，所以有 $v(C_1)=\cdots=v(C_r)=1$，因此 $v(x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_r\wedge C_{r+2}\wedge\cdots\wedge C_n)=1$，但 $v(x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_r\wedge C_{r+1}\wedge C_{r+2}\wedge\cdots\wedge C_n)=0$，即 $x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_r\wedge C_{r+2}\wedge\cdots\wedge C_n$ 与 $x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_r\wedge C_{r+1}\wedge C_{r+2}\wedge\cdots\wedge C_n$ 不等价，因此子句 C_{r+1} 在子句集 S_3 中不冗余，与子句 C 在子句集 S_3 中冗余矛盾。所以如果子句 C 在子句集 S_3 中冗余，则它在子句集 S_4 中冗余。

（充分性）如果子句 C_{r+1} 在子句集 S_3 中不冗余，那么 $x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_r\wedge C_{r+1}\wedge C_{r+2}\wedge\cdots\wedge C_n$ 与 $x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_r\wedge C_{r+2}\wedge\cdots\wedge C_n$ 不等价，因此存在一组赋值 v，使得 $v(x)=v(C_1)=\cdots=v(C_r)=v(C_{r+2})=\cdots=v(C_n)=1$，而 $v(C_{r+1})=0$。故有 $v(x\wedge C_{r+2}\wedge\cdots\wedge C_n)=1$，但 $v(x\wedge C_{r+1}\wedge C_{r+2}\wedge\cdots\wedge C_n)=0$，即 $x\wedge C_{r+2}\wedge\cdots\wedge C_n$ 与 $x\wedge C_{r+1}\wedge C_{r+2}\wedge\cdots\wedge C_n$ 不等价，因此子句 C_{r+1} 在子句集 S_4 中不冗余，与子句 C 在子句集 S_4 中冗余矛盾。所以如果子句 C 在子句集 S_4 中冗余，则它在子句集中 S_3 冗余。

综上所述，子句 C 在子句集 S_3 中冗余当且仅当它在子句集 S_4 中冗余。

推论 3　在命题逻辑的逻辑公式中给定子句集 $S_3=\{x, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 和 $S_5=(S_1\backslash S(\bar{x}))\cup(S(\bar{x})\backslash\{\bar{x}\})$，如果子句集 S_3 中存在一个子句 C 包含文字 $\bar{x}$，那么子句 C 在子句集 S_3 中冗余当且仅当子句 $C'=C\backslash\{\bar{x}\}$ 在子句集 S_5 中冗余。

推论 4　在命题逻辑的逻辑公式中给定子句集 $S_4=(S\backslash S(x))\cup\{x\}$ 和 $S_5=(S_1\backslash S(\bar{x}))\cup(S(\bar{x})\backslash\{\bar{x}\})$，如果子句集 S_4 中存在一个子句 C 包含文字 $\bar{x}$，那么子句 C 在子句集 S_4 中冗余当且仅当子句 $C'=C\backslash\{\bar{x}\}$ 在子句集 S_5 中冗余。

推论 5　在命题逻辑的逻辑公式中给定子句集 $S_3=\{x, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$，$S_4=(S\backslash S(x))\cup\{x\}$ 和 $S_5=(S_1\backslash S(\bar{x}))\cup(S(\bar{x})\backslash\{\bar{x}\})$，如果子句集 S_3 中存在一个不包含文字 x 的冗余子句，那么该子句是子句集 S_3 的冗余子句当且仅当该子句是子句集 S_4 的冗余子句，该子句是子句集 S_3 的冗余子句当且仅当该子句或该子句删去文字 $\bar{x}$ 后的子句是子句集 S_4 的冗余子句。

例如：如果子句集 S_3 中存在一个不包含文字 x 的冗余子句 C，那么对于子句 C，存在两种情况：

1）不包含文字 $\bar{x}$，分别由定理 4 和推论 1 可知，子句 C 在子句集 S_3 中冗余当且仅当它在子句集 S_4 中冗余，子句 C 在子句集 S_3 中冗余当且仅当它在子句集 S_5 中冗余。

2）包含文字 $\bar{x}$，分别由定理 5 和推论 3 可知，子句 C 在子句集 S_3 中冗余当且仅当它在子句集 S_5 中冗余，子句 C 在子句集 S_3 中冗余当且仅当子句 $C'=C\backslash\{\bar{x}\}$ 在子句集 S_5 中冗余。

下面将对子句集中文字和子句的冗余性进行讨论，首先引入引理 1。

引理 1　设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 $S_6=\{x, D_1, C_1, \cdots, C_r, C_{r+1}, \cdots, C_n\}$，如果存在子句 $C_i(1\leqslant i\leqslant r)$，使得 $C_i=\bar{x}\vee C_i'$，那么子句集 S_6 与 S_7 是等价的，其中 $S_7=\{x, D_1, C_1', \cdots, C_r', C_{r+1}, \cdots, C_n\}$。

证明：对于子句集 S_6，有：

$$
\begin{aligned}
& x\wedge D_1\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_r\wedge C_{r+1}\wedge\cdots\wedge C_n \\
&\quad\leftrightarrow x\wedge D_1\wedge(\bar{x}\vee C_1')\wedge\cdots\wedge(\bar{x}\vee C_r')\wedge C_{r+1}\wedge\cdots\wedge C_n \\
&\quad\leftrightarrow D_1\wedge[(x\wedge\bar{x})\vee(x\wedge C_{1'})]\wedge\cdots\wedge(x\vee C_r')\wedge C_{r+1}\wedge\cdots\wedge C_n \\
&\quad\leftrightarrow D_1\wedge x\wedge C_1'\wedge\cdots\wedge(\bar{x}\vee C_r')\wedge C_{r+1}\wedge\cdots\wedge C_n \\
&\quad\leftrightarrow x\wedge D_1\wedge C_1'\wedge\cdots\wedge C_r'\wedge C_{r+1}\wedge\cdots\wedge C_n
\end{aligned}
$$

因此子句集 S_6 与 S_7 是等价的。

由引理 1 的证明过程可得推论 6。

推论 6　设在命题逻辑的逻辑公式中有子句 $S_6=\{x, D_1, C_1, \cdots, C_r, C_{r+1}, \cdots, C_n\}$，如果存在子句 $C_i(1\leqslant i\leqslant r)$，使得 $C_i=\bar{x}\vee C_i'$，那么文字 $\bar{x}$ 在 $C_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 中关于子句集 S_6 冗余。

定理 6　设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 $S_6=\{x, D_1, C_1, \cdots, C_n\}$ 和 $S=\{D, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$，其中 $D=x\vee D_1$，那么子句 D_1 在子句集 S_6 中冗余当且仅当文字 x 在 D 中关于 S 冗余。

证明：因为若子句 D_1 在子句集 S_6 中冗余，则有 $x\wedge D_1\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n\leftrightarrow x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n$，所以在子句集 S 中有：

$$
\begin{aligned}
& D\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n \\
&\quad\leftrightarrow(x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n)\vee(D_1\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n) \\
&\quad\leftrightarrow(x\wedge D_1\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n)\vee(D_1\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n) \\
&\quad\leftrightarrow D_1\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n
\end{aligned}
$$

即文字 x 在 D 中关于 S 冗余。

推论 7　设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 $S_7=\{x, D_1, C_1', \cdots, C_r', C_{r+1}, \cdots, C_n\}$ 和 $S=\{D, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$，其中 $C_i=\bar{x}\vee C_i'(1\leqslant i\leqslant r)$，$D=x\vee D_1$，如果子句 D_1 在子句集 S_7 中冗余，那么文字 x 在 D 中关于 S 冗余。

定理 7　设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 $S=\{D, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$，其中 $D=x\vee D_1$，如果子句 D_1 在子句集 $S_8=\{D_1, C_1, \cdots, C_n\}$ 中冗余，那么子句 D 在子句集 S 中冗余。

证明：因为子句 D_1 在子句集 S_8 中冗余，即：

$$D_1\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n\leftrightarrow C_1\wedge\cdots\wedge C_n$$

所以在子句集 S 中：

$$
\begin{aligned}
& D\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n \\
&\quad\leftrightarrow(x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n)\vee(D_1\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n) \\
&\quad\leftrightarrow(x\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n)\vee(C_1\wedge\cdots\wedge C_n) \\
&\quad\leftrightarrow C_1\wedge\cdots\wedge C_n
\end{aligned}
$$

因此子句 D 在子句集 S 中冗余。

推论 8　设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 $S=\{D, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$，其中 $D=x\vee D_1$，如果子句 D_1 在子句集 $S_8=\{D_1, C_1, \cdots, C_n\}$ 中冗余，那么子句集 S_1 不可满足。

证明：由定理 7 可知，如果子句 D_1 在子句集 S_8 中冗余，那么子句 D 在子句集 S 中冗余。又由定理 1 可知，子句 D 是子句集 S 中的冗余子句当且仅当子句集 S_1 不可满足。因此如果子句 D_1 在子句集 S_8 中冗余，那么子句集 S_1 不可满足。

定理 8　设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 $S=\{D, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$，其中 $D=x\vee D_1$，如果子句 D_1 在子句集 $S_8=\{D_1, C_1, \cdots, C_n\}$ 中冗余，那么文字 x 在 D 中关于 S 冗余。

证明：由定理 7 的证明过程可知 $D\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_n\leftrightarrow C_1\wedge\cdots\wedge C_n$，因子句 D_1 在子句集 S_8 中冗余，即 $D_1\wedge C_1\wedge\cdots\wedge$

$C_n \leftrightarrow C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$，故有 $D \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_n \leftrightarrow D_1 \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$，因此文字 x 在 D 中关于 S 冗余。

推论9 设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 $S=\{D, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$，其中 $D=x \vee D_1$，如果子句 D_1 在子句集 $S_8=\{D_1, C_1, \cdots, C_n\}$ 中冗余，那么子句集 S_2 不可满足。

证明：由定理8可知，如果子句 D_1 在子句集 S_8 中冗余，那么文字 x 在 D 中关于 S 冗余。又由定理2可知，文字 x 在 D 中是关于 S 冗余的当且仅当子句集 S_2 不可满足。因此如果子句 D_1 在子句集 S_8 中冗余，那么子句集 S_2 不可满足。

4 子句集的可满足性判定

下面将对冗余文字及冗余子句和子句集的可满足性进行讨论。

定理9 设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 S_2 和 $S_6=\{x, D_1, C_1, \cdots, C_n\}$，且其中的子句 D_1 不是重言式子句，那么子句 D_1 在子句集 S_6 中不冗余当且仅当子句集 S_2 可满足。

证明：（必要性）因为子句 D_1 在子句集 S_6 中不冗余，所以 $x \wedge D_1 \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$ 与 $x \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$ 不等价。故存在一组赋值 v，使得 $v(x)=v(C_1)=\cdots=v(C_n)=1$，而 $v(D_1)=0$，即对于任意的文字 $x_k \in D_1$，都有 $v(x_k)=0$。从而在每个子句 $(C_i-D_1)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 中都存在赋值为1的文字，因此有 $v(C_i-D_1)=1(1 \leqslant i \leqslant n)$，$v(x \wedge (C_1-D_1) \wedge \cdots \wedge (C_n-D_1))=1$，故子句集 S_2 可满足。

（充分性）假设子句 D_1 在子句集 S_6 中冗余，由定理6可知，文字 x 在 D 中关于 $S=\{D, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 冗余。又由定理2可知，文字 x 在 D 中是关于 S 冗余的当且仅当子句集 S_2 不可满足。因此如果子句 D_1 在子句集 S_6 中冗余，那么子句集 S_2 不可满足，与子句集 S_2 可满足矛盾。所以如果子句集 S_2 可满足，则子句 D_1 在子句集 S_6 中不冗余。

综上所述，子句 D_1 在子句集 S_6 中不冗余当且仅当子句集 S_2 可满足。

推论10 设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 S_2 和 $S_7=\{x, D_1, C_1', \cdots, C_r', C_{r+1}, \cdots, C_n\}$，其中 $C_i=\bar{x} \vee C_i'(1 \leqslant i \leqslant r)$，且其中的子句 D_1 不是重言式子句，那么子句 D_1 在子句集 S_7 中不冗余当且仅当子句集 S_2 可满足。

定理10 设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 $S_6=\{x, D_1, C_1, \cdots, C_n\}$ 和 S_2，且其中的子句 D_1 不是重言式子句，如果子句 D_1 在子句集 S_6 中冗余，那么子句集 S_2 不可满足。

证明：由定理6可知，如果子句 D_1 在子句集 S_6 中冗余，那么文字 x 在 D 中关于 $S=\{D, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 冗余，其中 $D=x \vee D_1$。又由定理2可知，文字 x 在 D 中是关于 S 冗余的当且仅当子句集 S_2 不可满足。因此如果子句 D_1 在子句集 S_6 中冗余，那么子句集 S_2 不可满足。

推论11 设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 S_2 和 $S_7=\{x, D_1, C_1', \cdots, C_r', C_{r+1}, \cdots, C_n\}$，其中 $C_i=\bar{x} \vee C_i'(1 \leqslant i \leqslant r)$ 且子句 D_1 不是重言式子句，如果子句 D_1 在子句集 S_7 中冗余，那么子句集 S_2 不可满足。

定理11 设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 $S=\{D, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 和 $S_6=\{x, D_1, C_1, \cdots, C_n\}$，其中 $D=x \vee D_1$，那么文字 x 在 D 中关于 S 冗余当且仅当子句集 $(S_6 \backslash \{D_1\}) \cup \{\overline{D_1}\}$ 不可满足。

证明：（必要性）假设子句集 $(S_6 \backslash \{D_1\}) \cup \{\overline{D_1}\}$ 是可满足的，则存在一组赋值 v，使得 $v(x)=v(C_1)=\cdots=v(C_n)=1$，且 $v(\overline{D_1})=1$，故 $v(D_1)=0$。因为有 $v(D \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)=1$，但 $v(D_1 \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_n)=0$，所以 $D \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$ 与 $D_1 \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$ 不等价，与文字 x 在 D 中关于 S 冗余矛盾。因此如果文字 x 在 D 中关于 S 冗余，则子句集 $(S_6 \backslash \{D_1\}) \cup \{\overline{D_1}\}$ 不可满足。

（充分性）假设文字 x 在子句 D 中关于子句集 S 不是冗余的，即 $D \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$ 与 $D_1 \wedge C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$ 不等价。则存在一组赋值 v，使得 $v(x)=v(C_1)=\cdots=v(C_n)=1$，而 $v(D_1)=0$，故 $v(\overline{D_1})=1$。因此子句集 $(S_6 \backslash \{D_1\}) \cup \{\overline{D_1}\}$ 是可以满足的，与子句集 $(S_6 \backslash \{D_1\}) \cup \{\overline{D_1}\}$ 不可满足矛盾。所以如果子句集 $(S_6 \backslash \{D_1\}) \cup \{\overline{D_1}\}$ 不可满足，则文字 x 在 D 中关于 S 冗余。

综上所述，文字 x 在 D 中关于 S 冗余当且仅当子句集 $(S_6 \backslash \{D_1\}) \cup \{\overline{D_1}\}$ 不可满足。

推论12 设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 $S=\{D, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 和 $S_7=\{x, D_1, C_1', \cdots, C_r', C_{r+1}, \cdots, C_n\}$，其中 $D=x \vee D_1$，那么文字 x 在 D 中关于 S 冗余当且仅当子句集 $(S_7 \backslash \{D_1\}) \cup \{\overline{D_1}\}$ 不可满足。

定理12 设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 $S_8=\{D_1, C_1, \cdots, C_n\}$，如果子句 D_1 在子句集 S_8 中冗余，那么子句集 $(S_6 \backslash \{D_1\}) \cup \{\overline{D_1}\}$ 不可满足。

证明：由定理8可知，如果子句 D_1 在子句集 S_8 中冗余，那么文字 x 在 D 中关于 $S=\{D, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 冗余。又由定理11可知，文字 x 在 D 中关于 S 冗余当且仅当子句集 $(S_6 \backslash \{D_1\}) \cup \{\overline{D_1}\}$ 不可满足。因此如果子句 D_1 在子句集 S_8 中冗余，那么子句集 $(S_6 \backslash \{D_1\}) \cup \{\overline{D_1}\}$ 不可满足。

推论13 设在命题逻辑的逻辑公式中有子句集 $S_8=\{D_1, C_1, \cdots, C_n\}$，如果子句 D_1 在子句集 S_8 中冗余，那么子句集 $(S_7 \backslash \{D_1\}) \cup \{\overline{D_1}\}$ 不可满足。

定理13 设在命题逻辑的逻辑公式中给定一个子句集 $S=\{D, C_1, C_2, \cdots, C_n\}$，其中 $D=x \vee D_1$，如果子句 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 都包含文字 x，那么文字 x 在 D 中关于 S 不是冗余的，但是子句集 S 是可满足的。

证明：因为 $(x \vee D_1) \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \leftrightarrow (x \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \vee (D_1 \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \leftrightarrow x \vee (D_1 \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n)$，但 $x \vee (D_1 \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n)$ 与 $D_1 \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$ 不等价，所以 $(x \vee D_1) \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$ 与 $D_1 \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n$ 不等价，因此文字 x 在 D 中关于 S 不是冗余的。但是由 $x \vee (D_1 \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n)$ 可知子句集 S 是可满足的。

结束语　本文侧重围绕命题逻辑的逻辑公式中子句集的结构及其性质，研究了逻辑公式中单元子句及其负文字和冗余子句的关系，并得到了一些与子句集可满足性的等价描述，为命题逻辑中逻辑公式的简化奠定了一定的理论基础。但是本文对单元子句及其负文字和冗余子的研究还比较单一，仍然需要对其做更加深入的研究，为命题逻辑公式的化简提供更多的理论基础。在接下来的工作中会继续对单元子句及其负文字和冗余子句进行研究，为命题逻辑公式的化简提供理论支撑。

参 考 文 献

[1] LIBERATORE P. Redundancy in logic I：CNF propositional formulae [J]. Artificial Intelligence，2005，163(2)：203-232.

[2] FOURDRINOY O，ÉRIC G，MAZURE B，et al. Eliminating Redundant Clauses in SAT Instances [C]∥Proceedings of International Conference on Integration of Ai and Or Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems. DBLP，2007：71-83.

[3] GRIMM S，WISSMANN J. Elimination of Redundancy in Ontologies [C]∥Extended Semantic Web Conference on the Semantic Web：Research and Applications. Springer-Verlag，2011：260-274.

[4] TANG S H. Research redundancy of set of clauses in propositional logic [D]. Chengdu：Southwest Jiaotong University，2014.（in Chinese）
唐仕辉. 命题逻辑中子句集的冗余性研究[D]. 成都：西南交通大学，2014.

[5] LAVRAC N，DZEROSKI S. Inductive Logic Programming [C]∥International Conference on Inductive Logic Programming. 1994：146-160.

[6] HEULE M，RVISALO M，LONSING F，et al. Clause elimination for SAT and QSAT[J]. Journal of Artificial Intelligence Research，2015，53(1)：127-168.

[7] ZHAI C H，QIN K Y. Redundancy clause and redundancy literal of proposition logic [J]. Computer Science，2013，40(5)：48-50.（in Chinese）
翟翠红，秦克云. 命题逻辑公式中的冗余子句及冗余文字[J]. 计算机科学，2013，40(5)：48-50.

[8] BOUFKHAD Y，ROUSSEL O. Redundancy in random SAT formulas [C]∥Seventeenth National Conference on Artificial Intelligence & Twelfth Conference on Innovative Applications of Artificial Intelligence. AAAI Press，2000：273-278.

[9] XU Y，ZOU K Q. Reducibility of literals andMintermsof Boolean Logic Formulas [J]. Journal of Southwest Jiaotong University. 1990，25(1)：108-112.（in Chinese）
徐扬，邹开其. 布尔逻辑公式中文字和小项的可消性[J]. 西南交通大学学报，1990，25(1)：108-112.

[10] XU Y，SONG Z M. Reducibility of Phrase and Literal on Lattice-Value Logic Formula [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics，1990，5(1)：172-181.（in Chinese）
徐扬，宋振明. 格值逻辑公式中短语和文字的可消性[J]. 数学季刊，1990，5(1)：172-181.

[11] HEULE M，JÄRVISALO M，BIERE A，et al. Clause Elimination Procedures for CNF Formulas [C]∥International Conference on Logic for Programming Artificial Intelligence and Reasoning. DBLP，2010：357-371.

[12] DENG P，XU Y. Classification of Concentrated Texts in Clause of Propositional Logic[J]. Journal of Intelligent Systems，2015，10(5)：736-740.（in Chinese）
邓鹏，徐扬. 命题逻辑的子句集中文字的分类[J]. 智能系统学报，2015，10(5)：736-740.

[13] PALEO B W. Reducing redundancy in cut-elimination by resolution[J]. Journal of Logic and Computation，2014，27(2)：577-606.

[14] GU A H. Research on Redundancy Elimination Method in Mobile Network Service Information Transmission[J]. Computer Simulation，2016，33(11)：294-297.（in Chinese）
顾爱华. 移动网络服务信息传输中冗余量消除方法研究[J]. 计算机仿真，2016，33(11)：294-297.

[15] YUE C L，BJORK E L. Using selective redundancy to eliminate the seductive details effect[J]. Applied Cognitive Psychology，2017，31(5)：565-571.