第 46 卷 第 10 期
2019 年 10 月
计 算 机 科 学
COMPUTER SCIENCE
Vol. 46 No. 10
Oct. 2019

基于指数加权的区间直觉模糊熵及其应用

张毛银 郑婷婷 郑婉容
(安徽大学数学科学学院 合肥 230601)

摘 要 熵是刻画模糊集不确定性程度的一个重要手段。为刻画区间直觉模糊集的不确定性,首先基于区间数的 Hukuhara 差(简称 H-差)提出区间直觉模糊集的核区间的概念,其能够有效反映区间直觉模糊集中隶属度与非隶属度的力量对比所产生的模糊性。考虑到区间直觉模糊集的不确定性由模糊性和犹豫性共同决定,提出了更符合人们直觉的区间直觉模糊集不确定度量的基本准则,由于区间直觉模糊集的模糊程度和犹豫程度所占比重并不能完全确定,因此为更好地描述两者对区间直觉模糊集不确定性程度的影响,利用指数函数加权的方法构造出一种新的区间直觉模糊熵。通过性质讨论和不同方法下区间直觉模糊熵的对比实例分析可知,在犹豫度区间长度相同的情况下,区间直觉模糊熵随着核区间的左右区间数的增大而减小;在核区间相同的情况下,区间直觉模糊熵随着犹豫度区间的左右区间数的增大而增大,符合其不确定性度量的基本准则。所提方法能充分反映不确定性随模糊性和犹豫性的增加而增加,这符合人们的直觉。其次,分析并验证了当区间直觉模糊集退化为直觉模糊集时,该方法构造的直觉模糊熵也能够有效度量直觉模糊集的不确定性程度。最后,将新的熵公式有效地应用到属性权重完全未知的多属性决策分析中,并通过实例验证了其合理性,为解决多属性决策问题提供了一种新的思路。

关键词 区间直觉模糊熵,模糊性,犹豫性,犹豫度区间,核区间,Hukuhara 差(H-差)
中图法分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/jsjkx.180901738

Interval-valued Intuitionistic Fuzzy Entropy Based on Exponential Weighting and Its Application

ZHANG Mao-yin ZHENG Ting-ting ZHENG Wan-rong
(School of Mathematical Sciences,Anhui University,Hefei 230601,China)

Abstract Entropy is an important means to describe the uncertainty degree of fuzzy sets. To depict the uncertainty of interval-valued intuitionistic fuzzy sets,this paper first put forward the definition of core interval of interval-valued intuitionistic fuzzy sets based on Hukuhara difference (H-difference) of interval numbers,which can effectively reflect the fuzziness generated by the force comparison between membership degree and non-membership degree of interval-valued intuitionistic fuzzy sets. Considering the uncertainty of interval-valued intuitionistic fuzzy sets is codetermined by the fuzziness and hesitancy,this paper proposed the basic criterion of the uncertainty measurement of interval-valued intuitionistic fuzzy sets,which more accords with human intuition. Due to the difficulty for completely determining the proportion of fuzziness and hesitancy,in order to better describe the influence of the fuzziness and hesitancy on the uncertainty degree of interval-valued intuitionistic fuzzy sets,this paper presented a new interval-valued intuitionistic fuzzy entropy based on the exponential weighted method. Comparison example analysis under properties discussion and different for interval-valued intuitionistic fuzzy entropy demonstrates that when hesitancy degree interval is the same,the interval-valued intuitionistic fuzzy entropy decreases with the increase of the number of left and right intervals of the core interval,and when core interval is the same,the new fuzzy entropy increases with the increase of the number of left and right intervals of the hesitancy degree interval,which are accord with basic principle of uncertainty measurement. The proposed method completely shows that the uncertainty can increase with the increase of the fuzziness and hesitancy,which is accordance with human intuition. Secondly,this paper analyzed and verified that when the interval-valued intuitionistic fuzzy sets degenerate into the intuitionistic fuzzy sets,the new fuzzy entropy constructed by the proposed method can measure the degree of uncertainty of the intuitionistic fuzzy sets effectively. Finally,the proposed new entropy formula is applied effectively in multiple attributes decision-making analysis with unknown attribute weights and the rationality of the method is verified by an example,which provides a new way to solve multi-attribute decision-making problem.

到稿日期:2018-09-15 返修日期:2019-02-26 本文受国家自然科学基金项目(61806001),安徽省自然科学基金项目(1708085MF163)资助。
张毛银(1993-),女,硕士生,主要研究方向为粒计算与知识发现,E-mail:1006227208@qq.com;**郑婷婷**(1978-),女,博士生,副教授,主要研究方向为粒计算与知识发现,E-mail:tt-zheng@163.com(通信作者);**郑婉容**(1992-),女,硕士生,主要研究方向为粒计算与知识发现。

Keywords Interval-valued intuitionistic fuzzy entropy, Fuzziness, Hesitancy, Hesitancy degree interval, Core interval, Hukuhara difference (*H*-difference)

1 引言

Zadeh[1]于1965年提出模糊集理论，它是一种处理模糊性和不确定性知识的重要数学工具，已被广泛应用于控制、决策、聚类分析等众多领域。随着研究的深入，很多学者进行了有益的推广，例如Zadeh[2]于1975年提出了 n 型模糊集；Atanassov[3]于1986年提出了直觉模糊集(IFS)的概念，并在此基础上系统地提出并定义了直觉模糊集及其一系列运算和定理，奠定了直觉模糊集的理论基础，从而更加细腻地刻画了客观世界的模糊性本质；Atanassov等[4]于1989年把隶属度和非隶属度的范围从单纯的[0,1]之间的实数推广到[0,1]的子区间，提出了区间直觉模糊集(IVIFS)。由于区间直觉模糊集中的隶属度和非隶属度不是某个数值，而是区间数，因此在处理不精确、信息不完备的问题时，区间直觉模糊集有更强的表达不确定性的能力，因此区间直觉模糊集得到了不断的发展与完善，被广泛应用到各个领域，如决策分类[5-6]、模式识别[7-8]、人工智能[9]等。

熵是模糊集理论中的一个重要概念，其最先出现在信息论中，表示事物出现的不确定性，直觉模糊熵的概念最先是由Burillo等[10]提出，用以测量直觉模糊集的模糊程度。在此基础上，Szmidt等[11]利用直觉模糊集的几何解释，给出了新的直觉模糊熵的计算公式，Hung等[12]提出了直觉模糊熵及区间直觉模糊熵的公理化定义。但对于区间直觉模糊集的熵的研究并不多，高志海[13]基于三角函数式提出了区间直觉模糊熵；Zhang等[14]将区间直觉模糊集转化为直觉模糊集来研究区间直觉模糊熵。但它们的研究没有深入考虑区间直觉模糊集的未知程度和犹豫程度，有些方法虽然考虑了未知程度和犹豫程度，但将两方面对不确定性的贡献比例固定为1∶1，在某些特殊情况下，这种不确定度量可能会出现与人们的直观认识相悖的情形。

事实上，未知程度可通过隶属度区间与非隶属度区间的力量对比来体现。在犹豫度区间长度保持不变的情况下，区间直觉模糊集的不确定性会随着这种力量对比的增加而减弱，这时将其权数减小，符合其对总体不确定性的贡献程度降低的趋势；当在隶属度与非隶属度的力量对比保持不变的情况下，不确定性会随着犹豫度区间长度的增加而增加，这时将其权数增加，也符合其对总体不确定性的贡献程度增强的趋势，指数加权平均值可以满足这一特征。本文基于区间数的 H-差和区间数绝对值的相关知识，定义了区间直觉模糊集的核区间，其能够有效反映区间直觉模糊集中隶属度与非隶属度的对比情况。在此基础上，本文利用指数函数加权得到新的区间直觉模糊熵，并提出区间直觉模糊集的不确定度量的基本准则。最后将这一方法应用到属性权重完全未知的区间直觉模糊多属性决策中，为解决多属性决策问题提供了一种新的思路，并通过实例验证了其合理性及有效性。

本文第2节简要介绍区间数的 H-差和区间直觉模糊集的相关知识；第3节通过总结已有区间直觉模糊集不确定性度量的不足，提出了核区间的概念，并给出了区间直觉模糊熵的公理化准则和新的区间直觉模糊熵，并讨论了其性质；第4节通过对比实验，说明了新方法的合理性；第5节给出了新的模糊熵在多属性决策中的应用；最后总结全文。

2 预备知识

2.1 区间数的 *H*-差

定义1[15] 设 R 为实数集，任意 $a^-,a^+\in R$ 且 $a^-\leqslant a^+$，称有界闭区间 $[a^-,a^+]$ 为区间数，记为 $a=[a^-,a^+]$，区间数的全体构成的集合记为 $[R]$，并称 $[R]$ 为区间数空间。若 $a^-=a^+$，则 $a=[a^-,a^+]$ 化为普通的实数，即 $a=a^-=a^+$。

定义2[16] 任意 $a=[a^-,a^+]$，$b=[b^-,b^+]\in[R]$，$k\in R$，对区间数的关系及运算的定义如下。

1)若 $a^-\leqslant b^-$，$a^+\leqslant b^+$，则称 $a\leqslant b$；若 $a^-=b^-$ 且 $a^+=b^+$，则称 $a=b$。

2)区间数加法：$a+b=[a^-+b^-,a^++b^+]$。

3)区间数数乘：$ka=[ka^-,ka^+]$，$k\geqslant 0$，$ka=[ka^+,ka^-]$，$k\leqslant 0$。

定义3[17] 设 $a=[a^-,a^+]$，$b=[b^-,b^+]\in[R]$，若存在 $c=[c^-,c^+]\in[R]$，使得 $a=b+c$，则称 c 为 a 与 b 的 Hukuhara差，简记 H-差，记为 $c=a-_Hb$，且 $a-_Hb=[a^--b^-,a^+-b^+]$。

定义4[15] 设 $a=[a^-,a^+]\in[R]$，则区间数 a 的绝对值定义为：

$$|a|=|[a^-,a^+]|=[\min\{|a^-|,|a^+|\},\max\{|a^-|,|a^+|\}]$$

2.2 区间直觉模糊集

定义5[4] 设 X 是一个给定的论域，X 上的一个区间直觉模糊集定义为：$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in X\}$。其中，$\mu_A:X\rightarrow\mathrm{int}([0,1])$ 为 A 的隶属度函数；$\nu_A:X\rightarrow\mathrm{int}([0,1])$ 为 A 的非隶属度函数，且满足对任意 $x\in X$，$0\leqslant sup(\mu_A(x))+sup(\nu_A(x))\leqslant 1$ 成立。$\mathrm{int}([0,1])$ 表示 $[0,1]$ 区间中所有闭子区间的集合。X 上区间直觉模糊集的全体记为 $IVIFS(X)$。

如果令 $\mu_A(x)=[\mu_A^-(x),\mu_A^+(x)]$，$\nu_A(x)=[\nu_A^-(x),\nu_A^+(x)]$，则区间直觉模糊集 A 可记为：

$$A=\{\langle x,[\mu_A^-(x),\mu_A^+(x)],[\nu_A^-(x),\nu_A^+(x)]\rangle|x\in X\}$$

显然若 $\forall x\in X$，$\mu_A^-(x)=\mu_A^+(x)$，$\nu_A^-(x)=\nu_A^+(x)$，则区间直觉模糊集 A 就退化为直觉模糊集。

定义6[4] 对于任意 $A,B\in IVIFS(X)$，定义：

1)$A\subseteq B$，当且仅当对于 $\forall x\in X$，有 $\mu_A^-(x)\leqslant\mu_B^-(x)$，$\mu_A^+(x)\leqslant\mu_B^+(x)$，$\nu_A^-(x)\geqslant\nu_B^-(x)$，$\nu_A^+(x)\geqslant\nu_B^+(x)$。

2)$A=B$，当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$。

3)交集 $A\cap B=\{\langle x,[\mu_{A\cap B}^-(x),\mu_{A\cap B}^+(x)],[\nu_{A\cap B}^-(x),\nu_{A\cap B}^+(x)]\rangle|x\in X\}$。其中，$\mu_{A\cap B}^-(x)=\min\{\mu_A^-(x),\mu_B^-(x)\}$，$\mu_{A\cap B}^+(x)=\min\{\mu_A^+(x),\mu_B^+(x)\}$；$\nu_{A\cap B}^-(x)=\max\{\nu_A^-(x),\nu_B^-(x)\}$，$\nu_{A\cap B}^+(x)=\max\{\nu_A^+(x),\nu_B^+(x)\}$。

4)并集 $A\cup B=\{\langle x,[\mu_{A\cup B}^-(x),\mu_{A\cup B}^+(x)],[\nu_{A\cup B}^-(x),$

$\nu_{A\cup B}^{+}(x)]\rangle | x\in X\}$。其中，$\mu_{A\cup B}^{-}(x)=\max\{\mu_A^{-}(x),\mu_B^{-}(x)\}$，$\mu_{A\cup B}^{+}(x)=\max\{\mu_A^{+}(x),\mu_B^{+}(x)\}$；$\nu_{A\cup B}^{-}(x)=\min\{\nu_A^{-}(x),\nu_B^{-}(x)\}$，$\nu_{A\cup B}^{+}(x)=\min\{\nu_A^{+}(x),\nu_B^{+}(x)\}$。

5)补集 $A^C=\{\langle x,[\nu_A^{-}(x),\nu_A^{+}(x)],[\mu_A^{-}(x),\mu_A^{+}(x)]\rangle | x\in X\}$。

3　现有的区间直觉模糊熵及其存在的问题

目前已有部分学者研究区间直觉模糊集的模糊熵，采用的方法包括三角函数方法、Hamming 距离方法、将区间直觉模糊集转化为直觉模糊集等，这些方法大多考虑了除隶属度和非隶属度以外仍然存在犹豫度，但大多缺乏考虑隶属度与非隶属度之间的力量对比，因此都或多或少存在一些不符合人们直觉认识的问题。

定义 7　对于任意的 $A\in IVIFS(X)$，$x\in X$，犹豫度区间为：

$$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)\overset{\triangle}{=}[\pi_A^{-}(x),\pi_A^{+}(x)]$$

其中，$\pi_A^{-}(x)=1-\mu_A^{+}(x)-\nu_A^{+}(x)$，$\pi_A^{+}(x)=1-\mu_A^{-}(x)-\nu_A^{-}(x)$。

方法 1　王培等给出的区间直觉模糊熵公式为[18]：

$$E_1(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\min\{\mu_A^{-}(x_i),\nu_A^{-}(x_i)\}+\min\{\mu_A^{+}(x_i),\nu_A^{+}(x_i)\}+\pi_A^{-}(x_i)+\pi_A^{+}(x_i)}{\max\{\mu_A^{-}(x_i),\nu_A^{-}(x_i)\}+\max\{\mu_A^{+}(x_i),\nu_A^{+}(x_i)\}+\pi_A^{-}(x_i)+\pi_A^{+}(x_i)}\tag{1}$$

方法 2　高志海给出的基于三角函数的区间直觉模糊熵公式为[13]：

$$E_2(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{|\mu_A^{-}(x_i)-\nu_A^{-}(x_i)|+|\mu_A^{+}(x_i)-\nu_A^{+}(x_i)|}{2(2+\pi_A^{-}(x_i)+\pi_A^{+}(x_i))}\pi\tag{2}$$

方法 3　屈克给出的区间直觉模糊熵公式为[19]：

$$E_3(A)=\frac{\pi_A^{-}(x_i)+\pi_A^{+}(x_i)}{2}+\frac{(\pi_A^{+}(x_i))^2-(\pi_A^{-}(x_i))^2}{4}+\frac{(\mu_A^{+}(x_i))^2-(\mu_A^{-}(x_i))^2}{4}+\frac{(\nu_A^{+}(x_i))^2-(\nu_A^{-}(x_i))^2}{4}\tag{3}$$

方法 4　刘洪伟等给出的区间直觉模糊熵公式为[20]：

$$E_4(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2-|\mu_A^{-}(x_i)-\nu_A^{-}(x_i)|+|\mu_A^{+}(x_i)-\nu_A^{+}(x_i)|+\pi_A^{-}(x_i)+\pi_A^{+}(x_i)}{2+|\mu_A^{-}(x_i)-\nu_A^{-}(x_i)|+|\mu_A^{+}(x_i)-\nu_A^{+}(x_i)|+\pi_A^{-}(x_i)+\pi_A^{+}(x_i)}\tag{4}$$

方法 5　Zhang 等给出的区间直觉模糊熵公式为[14]：

$$E_5(A)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(1-(\mu_A^{*}(x_i)+\nu_A^{*}(x_i)))\mathrm{e}^{(1-(\mu_A^{*}(x_i)+\nu_A^{*}(x_i)))}\tag{5}$$

其中，$\mu_A^{*}(x)=\mu_A^{-}(x)+\tau\Delta\mu_A(x)$，$\nu_A^{*}(x)=\nu_A^{-}(x)+\tau\Delta\nu_A(x)$，$\tau\in(0,1)$。而文献[14]中 τ 取值为 0.5。

方法 6　高志海给出的基于 Hamming 距离的区间直觉模糊熵公式为[13]：

$$E_6(A)=\frac{\min\{d(A,P),d(A,Q)\}}{\max\{d(A,P),d(A,Q)\}}\tag{6}$$

其中，清晰集为 $P=\{\langle x,[1,1],[0,0]\rangle | x\in X\}$，$Q=\{\langle x,[0,0],[1,1]\rangle | x\in X\}$。

集合 A,B 的 Hamming 距离为：

$$d(A,B)=\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}[|\mu_A^{+}(x_i)-\mu_B^{+}(x_i)|+|\mu_A^{-}(x_i)-\mu_B^{-}(x_i)|+|\nu_A^{+}(x_i)-\nu_B^{+}(x_i)|+|\nu_A^{-}(x_i)-\nu_B^{-}(x_i)|+|\pi_A^{+}(x_i)-\pi_B^{+}(x_i)|+|\pi_A^{-}(x_i)-\pi_B^{-}(x_i)|]$$

方法 1、方法 2 和方法 4 的主要问题在于：对于任意的 $x\in X$，只要 $[\mu_A^{-}(x),\mu_A^{+}(x)]=[\nu_A^{-}(x),\nu_A^{+}(x)]$，即 $\mu_A^{-}(x)=\nu_A^{-}(x)$，$\mu_A^{+}(x)=\nu_A^{+}(x)$，则这 3 种方法下的区间直觉模糊熵均取最大值 1，其说明在此情况下，这些方法并没有考虑不同的犹豫度区间长度对不确定性的影响。

方法 3 虽然认识到了模糊性和未知性对区间直觉模糊熵的影响，但该方法若退化成直觉模糊集，则其满足只要犹豫度相同，不确定度量就相同，因此未能考虑到隶属度与非隶属度之间的模糊性差异。

方法 5 先把区间直觉模糊集转化为直觉模糊集，再构造模糊熵。由于从区间数转化成数值，其所含的信息会有所减少，区间直觉模糊集与直觉模糊集之间不存在一一对应的关系，因此在转化过程中必定有信息丢失，依据方法 5，只要 $\mu_A^{*}(x)+\nu_A^{*}(x)$ 相同，模糊熵就相同，故不能准确度量区间直觉模糊集的模糊程度。

根据方法 6，假设 $G,M,N\in IVIFS(X)$，$G=\{\langle x,[0.1,0.6],[0.3,0.4]\rangle | x\in X\}$，$M=\{\langle x,[0.2,0.3],[0.2,0.3]\rangle | x\in X\}$，$N=\{\langle x,[0.15,0.15],[0.15,0.15]\rangle | x\in X\}$，可计算得 $E_6(G)=E_6(M)=E_6(N)=1$，即只要区间直觉模糊集分别到两个清晰集 $\{\langle x,[1,1],[0,0]\rangle | x\in X\}$ 和 $\{\langle x,[0,0],[1,1]\rangle | x\in X\}$ 之间的 Hamming 距离相等，此时的模糊熵就相等且达到最大。其不足之处是没有考虑到区间直觉模糊集的隶属度区间与非隶属度区间之间的差异所产生的模糊性。

4　基于指数加权的区间直觉模糊熵

4.1　区间直觉模糊集的不确定度量的基本准则

事实上，区间直觉模糊集的不确定性既与概念的未知性有关，也与隶属度和非隶属度间的模糊力量的对比有关。由于隶属度函数与非隶属度函数均为区间函数，在考虑它们之间的力量对比时必然牵涉到两个区间数之间的比较，借用 H-差的思想，我们提出如下的辅助定义。

定义 8　对于任意的 $A\in IVIFS(X)$，$x\in X$，核区间定义为：

$$S_A(x)=|\mu_A(x)-\nu_A(x)|\overset{\triangle}{=}[S_A^{-}(x),S_A^{+}(x)]$$

其中，$S_A^{-}(x)=\min\{|\mu_A^{-}(x)-\nu_A^{-}(x)|,|\mu_A^{+}(x)-\nu_A^{+}(x)|\}$，$S_A^{+}(x)=\max\{|\mu_A^{-}(x)-\nu_A^{-}(x)|,|\mu_A^{+}(x)-\nu_A^{+}(x)|\}$。

通过以上分析可以发现，现有区间直觉模糊集的模糊熵大多没有考虑到核区间的差异情况。事实上，区间直觉模糊集的不确定性会随着犹豫度区间的增加而增加，随着核区间的增大而减小。本文提出了更加合理的区间直觉模糊集不确定度量的基本准则。

定义 9(区间直觉模糊集不确定度量的基本准则)　一个映射 $E:IVIFS(X)\rightarrow[0,1]$ 称为区间直觉模糊集的不确定性度量，如果对于任意 $A\in IVIFS(X)$，$E(A)$ 满足下列条件：

1)$E(A)=0$ 当且仅当 A 为一个清晰集，即 $A=\{\langle x,[0,

$0],[1,1]\rangle|x\in X\}$,或者 $A=\{\langle x,[1,1],[0,0]\rangle|x\in X\}$;

2)$E(A)=1$ 当且仅当 $A=\{\langle x,[0,0],[0,0]\rangle|x\in X\}$;

3)$E(A)=E(S_A^-,S_A^+,\pi_A^-,\pi_A^+)$,其中 $E(A)$ 是关于 S_A^- 的单调递减函数,关于 S_A^+ 的单调递减函数,关于 π_A^- 的单调递增函数,关于 π_A^+ 的单调递增函数;

4)$E(A)=E(A^C)$。

若 $\forall x\in X,\mu_A^-(x)=\mu_A^+(x)$ 且 $\nu_A^-(x)=\nu_A^+(x)$,则区间 $[\mu_A^-(x),\mu_A^+(x)]$ 和 $[\nu_A^-(x),\nu_A^+(x)]$ 分别退化为实数轴上的两个点,即 $\mu_A(x)$ 和 $\nu_A(x)$,此时 A 退化为直觉模糊集:$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in X\}$。

相应地,犹豫度区间 $[\pi_A^-(x),\pi_A^+(x)]$ 以及核区间 $[S_A^-(x),S_A^+(x)]$ 分别退化为犹豫度 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$ 和核 $S_A(x)=|\mu_A(x)-\nu_A(x)|$。

作为区间直觉模糊集的特例,直觉模糊集的模糊熵也应该满足上述基本准则,由此可得定义 10。

定义 10(直觉模糊集不确定度量的基本准则) 一个映射 $E:IFS(X)\to[0,1]$ 称为直觉模糊集的不确定性度量,如果对于任意 $A\in IFS(X)$,$E(A)$ 满足下列条件:

1)$E(A)=0$ 当且仅当 A 是清晰集,即 $A=\{\langle x,0,1\rangle|x\in X\}$ 或 $A=\{\langle x,1,0\rangle|x\in X\}$;

2)$E(A)=1$ 当且仅当 $A=\{\langle x,0,0\rangle|x\in X\}$;

3)$E(A)=E(S_A,\pi_A)$,其中 $E(A)$ 是关于 S_A 的单调递减函数,关于 π_A 的单调递增函数;

4)$E(A)=E(A^C)$。

4.2 指数函数加权的区间直觉模糊熵

直觉模糊集的“模糊”是由于概念外延边界不清晰而表现出来的不确定性,是事物的客观属性,受概念的未知性和模糊性两方面的影响,而两者之间所占比重并不能完全固定。基于郑婷婷等[21]提出的基于指数的 Vague 熵的思想,本文提出如下的基于指数函数加权的区间直觉模糊熵。

定义 11 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$A\in IVIFS(X)$,定义 A 的区间直觉模糊熵为:

$$E(A)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{e^{1-S_A^-(x_i)}(1-S_A^-(x_i))+e^{\pi_A^-(x_i)}\pi_A^-(x_i)}{e^{1-S_A^-(x_i)}+e^{\pi_A^-(x_i)}}+\frac{e^{1-S_A^+(x_i)}(1-S_A^+(x_i))+e^{\pi_A^+(x_i)}\pi_A^+(x_i)}{e^{1-S_A^+(x_i)}+e^{\pi_A^+(x_i)}}\Big] \tag{7}$$

性质 1 区间直觉模糊熵满足区间直觉模糊集的不确定性度量准则。

证明:1)若 A 为清晰集,即 $A=\{\langle x,[1,1],[0,0]\rangle|x\in X\}$,或 $A=\{\langle x,[0,0],[1,1]\rangle|x\in X\}$,显然 $E(A)=0$。

若 $E(A)=0$,则对于任意 $x\in X,S_A(x)=[1,1],\pi_A(x)=[0,0]$。由 $S_A^-(x)=S_A^+(x)=1$,即 $\min\{|\mu_A^-(x)-\nu_A^-(x)|,|\mu_A^+(x)-\nu_A^+(x)|\}=1$,$\max\{|\mu_A^-(x)-\nu_A^-(x)|,|\mu_A^+(x)-\nu_A^+(x)|\}=1$,可推得 $|\mu_A^-(x)-\nu_A^-(x)|=|\mu_A^+(x)-\nu_A^+(x)|=1$,又由 $\pi_A^-(x)=\pi_A^+(x)=0$,可推得 $\mu_A^-(x)+\nu_A^-(x)=1$ 且 $\mu_A^+(x)+\nu_A^+(x)=1$,最后可推得 $\mu_A^-(x)=\mu_A^+(x)=1,\nu_A^-(x)=\nu_A^+(x)=0$ 或者 $\mu_A^-(x)=\mu_A^+(x)=0,\nu^-{}_A(x)=\nu_A^+(x)=1$(注:若 $\mu_A(x)=\nu_A(x)=0.5$ 与 $|\mu_A^-(x)-\nu_A^-(x)|=|\mu_A^+(x)-\nu_A^+(x)|=1$ 矛盾,则不满足条件 $E(A)=0$),即可以推出:$A=\{\langle x,[0,0],[1,1]\rangle|x\in X\}$ 或者 $A=\{\langle x,[1,1],[0,0]\rangle|x\in X\}$,故 A 为清晰集。

2)$E(A)=1$ 当且仅当 $\frac{e^{1-S_A^-(x)}(1-S_A^-(x))+e^{\pi_A^-(x)}\pi_A^-(x)}{e^{1-S_A^-(x)}+e^{\pi_A^-(x)}}=1$ 且 $\frac{e^{1-S_A^+(x)}(1-S_A^+(x))+e^{\pi_A^+(x)}\pi_A^+(x)}{e^{1-S_A^+(x)}+e^{\pi_A^+(x)}}=1$,即 $e^{1-S_A^-(x)}(1-S_A^-(x))+e^{\pi_A^-(x)}\pi_A^-(x)=e^{1-S_A^-(x)}+e^{\pi_A^-(x)}$ 等价于 $e^{1-S_A^-(x)}(-S_A^-(x))+e^{\pi_A^-(x)}(\pi_A^-(x)-1)=0$,且 $e^{1-S_A^+(x)}(1-S_A^+(x))+e^{\pi_A^+(x)}\pi_A^+(x)=e^{1-S_A^+(x)}+e^{\pi_A^+(x)}$ 等价于 $e^{1-S_A^+(x)}(-S_A^+(x))+e^{\pi_A^+(x)}(\pi_A^+(x)-1)=0$。

又因为 $-S_A^-(x)\leqslant0,\pi_A^-(x)-1\leqslant0,-S_A^+(x)\leqslant0,\pi_A^+(x)-1\leqslant0$,可推出 $S_A^-(x)=0,S_A^+(x)=0,\pi_A^-(x)-1=0,\pi_A^+(x)-1=0$,可推得 $\mu_A^-(x)=0,\nu_A^-(x)=0,\mu_A^+(x)=0,\nu_A^+(x)=0$,所以推得 $A=\{\langle x,[0,0],[0,0]\rangle|x\in X\}$。

3)对于 $\forall x\in X$,令 $S_A^-(x)=x_1,\pi_A^-(x)=y_1,S_A^+(x)=x_2,\pi_A^+(x)=y_2$,则 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant1,0\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant1$。再设:

$$f(x_1,y_1,x_2,y_2)=\frac{e^{1-x_1}(1-x_1)+e^{y_1}y_1}{e^{1-x_1}+e^{y_1}}+\frac{e^{1-x_2}(1-x_2)+e^{y_2}y_2}{e^{1-x_2}+e^{y_2}}$$

则有:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{e^{1-x_1-y_1}(x_1+y_1-2)-(e^{1-x_1})^2}{(e^{1-x_1}+e^{y_1})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}=\frac{e^{1+y_1-x_1}(x_1+y_1)+(e^{y_1})^2}{(e^{1-x_1}+e^{y_1})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{e^{1-x_2-y_2}(x_2+y_2-2)-(e^{1-x_2})^2}{(e^{1-x_2}+e^{y_2})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2}=\frac{e^{1+y_2-x_2}(x_2+y_2)+(e^{y_2})^2}{(e^{1-x_2}+e^{y_2})^2}$$

故 $\frac{\partial f}{\partial x_1}\leqslant0,\frac{\partial f}{\partial x_2}\leqslant0,\frac{\partial f}{\partial y_1}\geqslant0,\frac{\partial f}{\partial y_2}\geqslant0$。

因此,$E(A)$ 是关于 S_A^- 的单调递减函数,关于 S_A^+ 的单调递减函数,关于 π_A^- 的单调递增函数,关于 π_A^+ 的单调递增函数。

4)已知 $A=\{\langle x,[\mu_A^-(x),\mu_A^+(x)],[\nu_A^-(x),\nu_A^+(x)]\rangle|x\in X\}$,则 $A^C=\{\langle x,[\nu_A^-(x),\nu_A^+(x)],[\mu_A^-(x),\mu_A^+(x)]\rangle|x\in X\}$。因此,$S_A^-(x)=S_{A^C}^-(x),S_A^+(x)=S_{A^C}^+(x),\pi_A^-(x)=\pi_{A^C}^-(x),\pi_A^+(x)=\pi_{A^C}^+(x)$,故 $E(A)=E(A^C)$。

进一步,得出如下特例情形。

定义 12 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$A\in IFS(X)$,定义 A 的直觉模糊熵为:

$$E(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{1-S_A(x_i)}(1-S_A(x_i))+e^{\pi_A(x_i)}\pi_A(x_i)}{e^{1-S_A(x_i)}+e^{\pi_A(x_i)}} \tag{8}$$

性质 2 直觉模糊熵满足直觉模糊集不确定性度量的基本准则。

证明:1)若 $A=\{\langle x,0,1\rangle|x\in X\}$ 或者 $A=\{\langle x,1,0\rangle|x\in X\}$,则显然 $E(A)=0$。

若 $E(A)=0$,则对于任意 $x\in X,S_A(x)=1,\pi_A(x)=0$。由 $S_A(x)=1$ 知,$|\mu_A(x)-\nu_A(x)|=1$;由 $\pi_A(x)=0$ 知,$\mu_A(x)+\nu_A(x)=1$。故 $\mu_A(x)=1$ 且 $\nu_A(x)=0$,或 $\mu_A(x)=0$ 且 $\nu_A(x)=1$,由此可得 $A=\{\langle x,1,0\rangle|x\in X\}$,或者 $A=\{\langle x,0,1\rangle|x\in$

$X\}$,故 A 为清晰集。

2)$E(A)=1$ 当且仅当 $e^{1-S_A(x)}(1-S_A(x))+e^{\pi_A(x)}\pi_A(x)=e^{1-S_A(x)}+e^{\pi_A(x)}$ 等价于 $e^{1-S_A(x)}(-S_A(x))+e^{\pi_A(x)}(\pi_A(x)-1)=0$,又因为 $-S_A(x)\leqslant 0,\pi_A(x)-1\leqslant 0$,所以 $S_A(x)=0$ 且 $\pi_A(x)=1$,进而 $\mu_A(x)=0,\nu_A(x)=0$。因此,$A=\{\langle x,0,0\rangle|x\in X\}$。

3)对于任意 $x\in X,S_A(x)=x,\pi_A(x)=y$,则 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$。再设 $f(x,y)=\dfrac{e^{1-x}(1-x)+e^y y}{e^{1-x}+e^y}$,则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{e^{1-x+y}(x+y-2)-(e^{1-x})^2}{(e^{1-x}+e^y)^2}$,$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{(x+y)e^{1+y-x}-(e^y)^2}{(e^{1-x}+e^y)^2}$,故 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\leqslant 0,\dfrac{\partial f}{\partial y}\geqslant 0$。因此,$E(A)$ 是关于 S_A 的单调减函数,关于 π_A 的单调增函数。

4)已知 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in X\}$,则 $A^C=\{\langle x,\nu_A(x),\mu_A(x)\rangle|x\in X\}$。因此,$S_A(x)=S_{A^C}(x),\pi_A(x)=\pi_{A^C}(x)$,故 $E(A)=E(A^C)$。证毕。

4.3　与其他方法的比较

为了更好地说明新构造的区间直觉模糊熵的优势,本文通过下面的例子说明新方法的合理性。

例 1　设论域 $X=\{x\},A_i\in IVIFS(X),i=1,2,\cdots,13$。表 1 列出了这 13 种区间直觉模糊集在不同方法下得到的不确定性度量。

表 1　不同方法下区间直觉模糊熵的对比

Table 1　Comparison of interval intuitionistic fuzzy entropy under different methods

A_i	S_i	π_i	1[18]	2[13]	3[19]	4[20]	5[14]	6[13]	new
⟨[0.2,0.3],[0.4,0.5]⟩	[0.2,0.2]	[0.2,0.4]	0.73	0.97	0.37	0.73	0.06	0.73	**0.61**
⟨[0.3,0.4],[0.5,0.6]⟩	[0.2,0.2]	[0,0.2]	0.77	0.95	0.16	0.77	0.01	0.85	**0.57**
⟨[0.1,0.2],[0.5,0.6]⟩	[0.4,0.4]	[0.2,0.4]	0.53	0.93	0.67	0.53	0.06	0.53	**0.47**
⟨[0.1,0.3],[0.5,0.6]⟩	[0.4,0.4]	[0,0.4]	0.50	0.86	0.32	0.50	0.04	0.56	**0.45**
⟨[0.2,0.2],[0.4,0.6]⟩	[0.2,0.4]	[0.2,0.4]	0.63	0.93	0.38	0.63	0.06	0.63	**0.55**
⟨[0,0],[0,0]⟩	[0,0]	[1,1]	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	**1.00**
⟨[0,0],[1,1]⟩	[1,1]	[0,0]	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	**0.00**
⟨[1,1],[0,0]⟩	[1,1]	[0,0]	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	**0.00**
⟨[0.1,0.6],[0.3,0.4]⟩	[0.2,0.2]	[0,0.6]	0.73	0.97	0.50	0.73	0.06	1.00	**0.63**
⟨[0.2,0.3],[02,0.3]⟩	[0,0]	[0.4,0.6]	1.00	1.00	0.57	1.00	0.18	1.00	**0.81**
⟨[0.4,0.5],[0.4,0.5]⟩	[0,0]	[0,0.2]	1.00	1.00	0.16	1.00	0.01	1.00	**0.74**
⟨[0.2,0.2],[0.1,0.1]⟩	[0.1,0.1]	[0.7,0.7]	0.89	0.99	0.70	0.89	0.40	0.89	**0.81**
⟨[0.15,0.15],[0.15,0.15]⟩	[0,0]	[0.7,0.7]	1.00	1.00	0.70	1.00	0.40	1.00	**0.87**

首先分析 $A_{10}=\{\langle x,[0.2,0.3],[0.2,0.3]\rangle|x\in X\}$,$A_{11}=\{\langle x,[0.4,0.5],[0.4,0.5]\rangle|x\in X\}$ 和 $A_{13}=\{\langle x,[0.15,0.15],[0.15,0.15]\rangle|x\in X\}$。它们的隶属度与非隶属度相等,相应的核区间均为零区间,即 $S_{A_{10}}(x)=S_{A_{11}}(x)=S_{A_{13}}(x)=[0,0]$,$\mu_{A_{10}}(x)=\nu_{A_{10}}(x)=[0.2,0.3]$,$\mu_{A_{10}}(x)=\nu_{A_{11}}(x)=[0.4,0.5]$,$\mu_{A_{13}}(x)=\nu_{A_{13}}(x)=[0.15,0.15]$,但三者的犹豫度区间均不相等,依据方法 1、方法 2、方法 4、方法 6 计算时,得到的模糊熵均为 1,此时都是最模糊的情况,显然都不符合人们的直觉。因为其忽略了犹豫度区间产生的未知性,所以方法 1、方法 2、方法 4、方法 6 的构造均存在不足。

分析 $A_{12}=\{\langle x,[0.2,0.2],[0.1,0.1]\rangle|x\in X\}$,$A_{13}=\{\langle x,[0.15,0.15],[0.15,0.15]\rangle|x\in X\}$ 可知,两者的犹豫度区间均相等,即 $\pi_{A_{12}}(x)=\pi_{A_{13}}(x)=[0.7,0.7]$,核区间 $S_{A_{12}}(x)=[0.1,0.1]$,$S_{A_{13}}(x)=[0,0]$,按照方法 3 计算时,得到的模糊熵 $E(A_{12})=E(A_{13})=0.7$,即模糊程度一样,说明方法 3 没有考虑到这两个不同的核的影响,这与人们的直观认识不符。

再分析 $A_1=\{\langle x,[0.2,0.3],[0.4,0.5]\rangle|x\in X\}$,$A_3=\{\langle x,[0.1,0.2],[0.5,0.6]\rangle|x\in X\}$,$A_5=\{\langle x,[0.2,0.2],[0.4,0.6]\rangle|x\in X\}$,三者的犹豫度区间相等,均为 $\pi_{A_1}(x)=\pi_{A_3}(x)=\pi_{A_5}(x)=[0.2,0.4]$,但是核区间均不相等,依据方法 5 的计算可知三者的区间直觉模糊熵相等,均为 0.06,即三者的模糊情况相同。其原因是将区间直觉模糊集转化为直觉模糊集,而此两者之间不存在一一对应的关系,转化过程中存在信息丢失的情况。

最后,根据表 1 中的新方法分析 $A_2=\{\langle x,[0.3,0.2],[0.5,0.6]\rangle|x\in X\}$,$A_9=\{\langle x,[0.1,0.6],[0.3,0.4]\rangle|x\in X\}$ 可知,$S_{A_2}(x)=S_{A_9}(x)=[0.2,0.2]$,$\pi_{A_2}^-(x)=\pi_{A_9}^-(x)=0$,$\pi_{A_2}^+(x)=0.2$,$\pi_{A_9}^+(x)=0.6$,$\pi_{A_2}^+(x)<\pi_{A_9}^+(x)$,可计算出区间直觉模糊熵为 $E(A_2)=0.57$,$E(A_9)=0.63$,$E(A_2)<E(A_9)$;再分析 $A_3=\{\langle x,[0.1,0.2],[0.5,0.6]\rangle|x\in X\}$,$A_4=\{\langle x,[0.1,0.3],[0.5,0.6]\rangle|x\in X\}$ 可知,$S_{A_3}(x)=S_{A_4}(x)=[0.4,0.4]$,$\pi_{A_3}^+(x)=\pi_{A_4}^+(x)=0.4$,$\pi_{A_3}^-(x)=0.2$,$\pi_{A_4}^-(x)=0$,$\pi_{A_3}^-(x)>\pi_{A_4}^-(x)$,可计算出区间直觉模糊熵为 $E(A_3)=0.47$,$E(A_4)=0.45$,$E(A_3)>E(A_4)$,故综上区间直觉模糊熵 $E(A)$ 分别关于 $\pi_A^+(x)$ 和 $\pi_A^-(x)$ 单调递增;分析 $A_1=\{\langle x,[0.2,0.3],[0.4,0.5]\rangle|x\in X\}$,$A_5=\{\langle x,[0.2,0.2],[0.4,0.6]\rangle|x\in X\}$ 可知,$\pi_{A_1}(x)=\pi_{A_5}(x)=[0.2,0.4]$,$S_{A_1}^-(x)=S_{A_5}^-(x)=0.2$,$S_{A_1}^+(x)=0.2$,$S_{A_5}^+(x)=0.4$,$S_{A_1}^+(x)<S_{A_5}^+(x)$,可计算区间直觉模糊熵为 $E(A_1)=0.61$,$E(A_5)=0.55$,$E(A_1)>E(A_5)$;分析 $A_3=\{\langle x,[0.1,0.2],[0.5,0.6]\rangle|x\in X\}$,$A_5=\{\langle x,[0.2,0.2],[0.4,0.6]\rangle|x\in X\}$ 可知,$\pi_{A_3}(x)=\pi_{A_5}(x)=[0.2,0.4]$,$S_{A_3}^+(x)=S_{A_5}^+(x)=0.4$,$S_{A_3}^-(x)=0.4$,$S_{A_5}^-(x)=0.2$,$S_{A_3}^-(x)>S_{A_5}^-(x)$,可计算区间直觉模糊熵为 $E(A_3)=0.47$,$E(A_5)=0.55$,$E(A_3)<E(A_5)$,因此区间直觉模糊熵 $E(A)$ 分别关于 $S_A^+(x)$ 和 $S_A^-(x)$ 单调递减。因此,本文所定义的区间直觉模糊熵公式均符合上述所列各项的具体情况。

5　新的区间直觉模糊熵在多属性决策中的应用

由于客观事物的复杂性和不确定性,以及人们思维能力、知识结构和知识水平的局限性,人们给出的决策信息往往不

能以精确数表达，而区间直觉模糊集能够很好地描述不确定的决策信息。因此，在区间直觉模糊环境下的多属性决策问题中，属性权重是我们首要考虑的问题，在处理属性权重完全未知的多属性决策问题中，最关键的步骤是确定各个属性的权重。本文提出了一种基于新的区间直觉模糊熵的确定属性权重的方法。

假设 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 为方案集，$C=(C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 为属性集，在属性集下对方案 A_i 进行评价得到区间直觉模糊集 $A_i=\{\langle C_j,[\mu_{A_i}^-(C_j),\mu_{A_i}^+(C_j)],[\nu_{A_i}^-(C_j),\nu_{A_i}^+(C_j)]\rangle|C_j\in C\}$，记 A_{ij} 为方案 A_i 在属性 C_j 下的属性值，进而得到决策矩阵 $\boldsymbol{M}=(A_{ij})_{m\times n}$。假设属性集 $C=(C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 对应的权重向量为 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$，其中，$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$，$w_i\in[0,1]$，属性向量完全未知。针对属性权重向量完全未知的决策问题，一般依据专家评价法或层次分析法(AHP)等来确定属性权重，但是这种确定方法会受到专家自身的偏好和专家专业水平的影响，使得确定过程中的主观因素过强，进而使得决策结果过于主观。针对专家评价法及层次分析法存在的缺陷，本文利用熵理论提供了确定属性权重的方法：若所有方案的某个属性所对应的熵值越大，则该属性提供给决策者的信息越少，因此该属性就应该赋予更小的权重。这种方法解决了传统赋权方法的主观性问题，使得决策结果更加客观、科学。根据这一理论，建立属性权重模型如下：

$$w_j=\frac{1-E_{C_j}}{n-\sum_{i=1}^{n}E_{C_j}} \tag{9}$$

其中，$E_{C_j}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}E(A_{ij})$，$E(A_{ij})$ 表示区间直觉模糊集 A_{ij} 的区间直觉模糊熵。

考虑到区间直觉模糊集不仅在隶属度区间、非隶属度区间之间有差异，而且在犹豫度区间和核区间之间也有所不同，本文提出改进的 Hamming 距离用于度量两个区间直觉模糊集之间的差异，同时结合上述新的区间直觉模糊熵计算属性指标的权重值，从而提出在权重完全未知的情况下针对区间直觉模糊多属性决策问题的更加合理的解决方案。

为了提供一种理论的估计标准，定义理想解 $A^*=\{\langle C_j,[1,1],[0,0]\rangle|C_j\in C\}$，并考虑每个方案 A_i 与理想解 A^* 之间的加权距离 d^*，d^* 越小表明方案 A_i 越接近理想解 A^*，此方案越好。下面给出改进的加权 Hamming 距离公式。设 $A,B\in IVIFS(X)$，定义：

$$\begin{aligned}d^-&=d(A,B)_w\\&=\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}w_i[|\mu_A^+(x_i)-\mu_B^+(x_i)|+|\mu_A^-(x_i)-\mu_B^-(x_i)|+\\&\quad|\nu_A^+(x_i)-\nu_B^+(x_i)|+|\nu_A^-(x_i)-\nu_B^-(x_i)|+|\pi_A^+(x_i)-\\&\quad\pi_B^+(x_i)|+|\pi_A^-(x_i)-\pi_B^-(x_i)|+|S_A^+(x_i)-\\&\quad S_B^+(x_i)|+|S_A^-(x_i)-S_B^-(x_i)|]\end{aligned} \tag{10}$$

此方案根据加权的 Hamming 距离 d^* 进行排序和择优，下面给出详细的决策步骤。

步骤1 根据权重模型式(9)计算决策矩阵 $\boldsymbol{M}=(A_{ij})_{m\times n}$ 的权重向量 $\boldsymbol{W}=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$。

步骤2 根据加权的 Hamming 距离式(10)计算每个方案与理想解之间的加权距离 $d_i^*=d(A_i,A^*)_w$。

步骤3 根据每个方案与理想解之间的加权距离 d^* 对方案集进行排序和择优。

例2[22] 假设一个投资公司要选一个项目进行投资，一共有下面4个项目可以考虑：1)一个汽车制造公司；2)一个食品公司；3)一个电脑公司；4)一个军火生产商。该公司需要考虑下面3个方面来做出选择：风险分析、发展前途、生存环境压力分析。决策矩阵的信息为：

$A_1=\{\langle C_1,[0.4,0.5],[0.3,0.4]\rangle,\langle C_2,[0.4,0.6],[0.2,0.4]\rangle,\langle C_3,[0.1,0.3],[0.5,0.6]\rangle\}$

$A_2=\{\langle C_1,[0.6,0.7],[0.2,0.3]\rangle,\langle C_2,[0.6,0.7],[0.2,0.3]\rangle,\langle C_3,[0.4,0.7],[0.1,0.2]\rangle\}$

$A_3=\{\langle C_1,[0.3,0.6],[0.3,0.4]\rangle,\langle C_2,[0.5,0.6],[0.3,0.4]\rangle,\langle C_3,[0.5,0.6],[0.1,0.3]\rangle\}$

$A_4=\{\langle C_1,[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle,\langle C_2,[0.6,0.7],[0.1,0.3]\rangle,\langle C_3,[0.3,0.4],[0.1,0.2]\rangle\}$

步骤1 利用式(9)计算各属性的权重，得到 $w_1=\frac{49}{153}$，$w_2=\frac{58}{153}$，$w_3=\frac{46}{153}$。

步骤2 根据加权的 Hamming 距离式(10)计算每个方案与理想解之间的加权距离 d_i^*：$d_1^*=0.3269$，$d_2^*=0.2267$，$d_3^*=0.2893$，$d_4^*=0.2322$。

步骤3 根据每个方案与理想解之间的加权距离 d^* 对方案集进行排序，得 $A_2\succ A_4\succ A_3\succ A_1$，因此最优方案为 A_2，这与文献[22]的结果相同。

结束语 由于区间直觉模糊集的不确定性不仅取决于本身的隶属度、非隶属度，还取决于犹豫度所产生的未知性和隶属度与非隶属度之间力量对比产生的模糊性等。而这些均以区间形式呈现，较数值形式更为复杂。因此，本文首先利用区间数的 H-差和区间数绝对值的相关知识给出了核区间的概念，用于描述隶属度、非隶属度偏差所产生的模糊性，提出更加符合直观认识的区间直觉模糊集的不确定度量准则，然后给出了一种基于指数加权的区间直觉模糊熵。分析证明，当区间直觉模糊集退化成直觉模糊集时，该方法仍然适用。最后对属性权重完全未知的区间直觉模糊多属性决策问题进行了研究，给出了基于区间直觉模糊熵的属性权重确定方法，然后根据每个方案与理想解的加权的 Hamming 距离对方案进行排序和择优。这为区间直觉模糊集的不确定性度量开拓了新的思路，并通过实例验证了该思路的合理性及有效性。

参考文献

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning [J]. Information Sciences, 1975, 8(3): 199-249.

[3] ATANASSOV K. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[4] ATANASSOV K, GARGOVE G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[5] CHEN Z W, CHEN L, YANG Q, et al. Interval-valued intuitio-

nistic fuzzy set method for group multi-attribute decision-making with unknown attribute weights [J]. Control Theory & Applications，2014，31(8)：1025-1033.(in Chinese)
陈志旺，陈林，杨七，等.用区间直觉模糊集方法对属性权重未知的群求解其多属性决策[J].控制理论与应用，2014，31(8)：1025-1033.

[6] OZTAYSI B，ONAR S C，KAHRAMAN C，et al. Multi-criteria alternative-fuel technology selection using interval-valued intuitionistic fuzzy sets [J]. Transportation Research Part D：Transport and Environment，2017，53(53)：128-148.

[7] XU Z S. On similarity measures of interval-valued intuitionistic fuzzy sets and their application to pattern recognitions [J]. Journal of Southeast University (English Edition)，2007，23(1)：139-143.(in Chinese)
徐泽水.区间直觉模糊集相似性测度及其在模式识别中的应用[J].东南大学学报(英文版)，2007，23(1)：139-143.

[8] SHAO L P. Study on Similarities and Its Application in Intuitionistic Fuzzy Sets，Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Set [D]. Chengdu：Southwest Jiaotong University，2018.(in Chinese)
邵丽鹏.直觉模糊集、区间直觉模糊集的相似度及其应用研究[D].成都：西南交通大学，2018.

[9] LI Y B. Knowledge Discovery based on Interval Intuitionistic Fuzzy Information Systems [D]. Jinzhou：Liaoning University of Technology，2014.(in Chinese)
李一勃.区间直觉模糊信息系统的知识发现[D].锦州：辽宁工业大学，2014.

[10] BURILLO P，BUSTINCE H. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems，2001，118(3)：305-316.

[11] SZMIDT E，KACPRZYK J. Entropy for intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems，2001，118(3)：467-477.

[12] HUNG W L，YANG M S. Fuzzy entropy on intuitionistic fuzzy sets [J]. International Journal of Intelligent Systems，2006，21(4)：443-451.

[13] GAO Z H. Intuitionistic fuzzy entropy，interval-valued intuitionistic fuzzy entropy and its application [D]. Qufu：Qufu Normal University，2011.(in Chinese)
高志海.直觉模糊熵、区间直觉模糊熵及其应用[D].曲阜：曲阜师范大学，2011.

[14] ZHANG Y J，MA P J，SU X H，et al. Entropy on interval-valued intuitionistic fuzzy sets and its application in multi-attribute decision making [C]//Proceedings of the International Conference on Information Fusion. IEEE，2011：1-7.

[15] DAI B，BAO Y E. The absolute value of interval numbers and the limit of the interval value function [J]. Pure and Applied Mathematics，2016，32(6)：583-590.(in Chinese)
代兵，包玉娥.区间数的绝对值与区间值函数的极限[J].纯粹数学与应用数学，2016，32(6)：583-590.

[16] 胡启洲，张卫华.区间数理论的研究及其应用[M].北京：科学出版社，2010.

[17] WU H C. The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective function [J]. European Journal of Operational Research，2009，196(1)：49-60.

[18] WANG P，WEI C P. Constructing method of interval-valued intuitionistic fuzzy entropy [J]. Computer Engineering and Applications，2011，47(2)：43-45.(in Chinese)
王培，魏翠萍.一种区间直觉模糊熵的构造方法[J].计算机工程与应用，2011，47(2)：43-45.

[19] QU K. Intuition fuzzy reasoning and interval complex issues. The application of decision-making [D]. Chengdu：Chengdu Institute of Technology，2011.(in Chinese)
屈克.区间直觉模糊推理及其在复杂问题决策中的应用[D].成都：成都理工大学，2011.

[20] LIU H W，WANG Y P. Research on uncertainty of interval-valued intuitionistic fuzzy rough sets [J]. Transactions on Intelligent Systems，2014，9(5)：613-617.(in Chinese)
刘洪伟，王艳平.区间直觉模糊粗糙集的不确定性研究[J].智能系统学报，2014，9(5)：613-617.

[21] ZHENG T T，CHU Y F，LI B P. Further study of constructional method of Vague entropy [J]. Computer Engineering and Applications，2013，49(20)：108-111.(in Chinese)
郑婷婷，储友福，李宝萍.Vague 熵的构造方法再研究[J].计算机工程与应用，2013，49(20)：108-111.

[22] YE J. Multicriteria fuzzy decision-making method based on a novel accuracy function under interval-valued intuitionistic fuzzy environment [J]. Expert Systems with Applications，2009，36(3)：6899-6902.