

基于 M-3WD 的多阶段区域转化策略研究

郭豆豆 姜春茂

(哈尔滨师范大学计算机科学与信息工程学院 哈尔滨 150025)

摘要 三支决策的基本思想是三分而治。三支决策的提出者加拿大学者姚一豫教授在 2018 年基于分治模型(Trisecting-and-acting),进一步提出第三个要素——效(Outcome),从而形成了分治效结合的三支决策 TAO 模型。分、治(施加的策略)、效构成了三支决策的 3 个基本要素。在基于移动的三支决策模型中,对象在“治”的作用下在 3 个区间移动,从而形成 3 个新区域,形成这 3 个新区域的过程被称为区域转化。在“治”这一步上,考虑“治”可以是一次性的,也可以是多次性的,具有多次可重入性,从而导致三分区域的转化可以是一次性的转化,也可以是多次性的转化。在这一过程中,涉及到成本或者收益等代价问题,从而需要从经济性的角度进一步考虑“治”。鉴于此,文中从广义三支决策的视角出发,提出了一个带有多阶段区域转化的三支决策模型,通过“治”后效果的度量来寻找最优的“治”。文中研究了最优转化策略,即一次性转化和多次性转化的费用优化问题。在带有多阶段区域转化的三支决策模型中,分析区域转化的费用,并按照区域转化次数划分阶段数,设计多阶段区域转化“治略”的动态规划算法,寻找最优的转化治略,进而给出在收益最大化的情况下的最优的转化治略。最后通过一个实例分析了区域一次性和多次性转化的费用,进一步得到多阶段区域转化的最佳转化次数以及最优转化费用,实现了转化治略的费用最优,说明了算法的有效性和实用性。

关键词 三支决策,基于移动的三支决策,TAO 模型,区域转化,治略

中图分类号 TP301 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/jsjcx.180801609

Multi-stage Regional Transformation Strategy in Move-based Three-way Decisions Model

GUO Dou-dou JIANG Chun-mao

(School of Computer Science Technology and Information Engineering, Harbin Normal University, Harbin 150025, China)

Abstract The basic ideas of three-way decisions (3WD) proposed by Prof Yao is dividing a whole set into three parts and developing different strategies on the three parts. Furthermore, Yao proposed the trisecting-acting-outcome model. Trisecting, acting and outcome are three basic elements of 3WD. In the movement-based 3WD model, the movement of objects leads regional changes, and this change is called regional transformation. In the step of “acting”, that “acting” can be one-time or multiple times should be considered. In this process, costs or benefits are involved, so the “acting” needs to be further considered from the perspective of economy. Based on three-way decisions from the view of generalization, this paper proposed a three-way decisions model with multi-stage regional transformation, and sought the optimal “acting” by measuring the outcome of “acting”. The optimal transformation strategy was studied, that is the cost optimization of one-time transformation and multiple transformation. In the three-way decisions models with multi-stage regional transformation, the cost of regional transformation is analyzed, and the number of stages is divided according to the number of regional transformation times. A dynamic programming algorithm was proposed to find the optimal transformation strategy, and then the optimal transformation strategy was presented in the case of maximizing the benefit. Finally, an example was given to analyze the one-time and multiple transformation costs of the region, and the optimal transformation times and the optimal transformation costs of multi-stage regional transformation were further obtained. This paper illustrated the effectiveness and the practicability of the algorithm by an example.

Keywords Three-way decisions, Move-based three-way decisions, Trisecting-acting-outcome model, Region transformation, Strategies and actions

1 引言

基于粗糙集理论中一个概念的正域、负域和边界域的语义解释,特别是决策粗糙集理论,姚一豫教授提出了三支决策理论^[1],其决策从狭义的角度可以描述为接受、不承诺(延迟决策)和拒绝;广义的“决策”可以理解为分析、处理和计算等。刘盾教授在总结三支决策近年来的研究成果的基础上,基于现有的三支决策模型算法及其应用,总结了广义三支决策理论和狭义三支决策理论^[2]。在文献[3-4]中,姚一豫教授分析了三支决策的基本成分以及其与其他理论的关系,并提出了三支决策理论基本框架。刘保相教授总结和展望了三支决策和其他理论之间可以相互借鉴、相互渗透的地方^[5]。殷业博士基于马云成功案例分析了三支决策是处理不确定性信息的有效方法^[6]。

三分而治是三支决策的基本思想,分、治、效是三支决策的3个基本要素。分是基础,治是手段,而效才是目标。我们需要的治略是一种合理的、具有可操作性的策略。在关于治略的有效性研究上,高聪博士给出一种基于移动的三支决策模型^[7]。姜春茂教授和姚一豫教授首次提出了基于对象在3个区域移动的三支决策模型的有效度量的方法,提出了一种度量三支决策的效的共性方法^[8]。文献[8]没有提及在现有成本下对于特定区域如何选择“治”的问题,以及区域在对象转移过程中如何追求最小代价或最大收益等费用的问题。

本文针对某一特定区域进行转化治略的研究,在上述文献的基础上,提出了一种多阶段三支决策区域转化治略模型。该模型旨在从多次的“治”中选择一个最优的“治”,它可能是收益最大或者代价最小的“治”。

本文第2节对三支决策及其相关工作进行了回顾;第3节对带有区域转化的三支决策问题进行了描述;第4节建立了带有区域转化的三支决策模型,并进行了对“治”的成本和收益的费用分析,提出了一次性的转化治略;第5节介绍了一种多阶段三支决策区域转化模型,提出了一次性和多次性转化治略方案;第6节使用实例来说明算法的有效性和实用性;最后总结全文。

2 三支决策及其相关工作

自三支决策理论提出以来,已经产生了大量的三支决策理论和应用研究成果,例如,三支决策空间理论^[9-10]、三支分类^[11-14]、三支聚类^[15-17]、三支概念分析^[18-23]、三支博弈理论^[24]、三支推荐系统^[25-27]、三支决策支持系统^[28-29]、模糊集的三值近似^[30]、多值逻辑的三值近似^[31]、三支垃圾邮件过滤^[32-33]、三支政府决策^[34]、序列三支决策^[35-38]、动态三支决策^[39-40]等。这些研究成果极大地拓展了三支决策的研究视野,促进了该领域的发展。2018年,姚一豫教授基于现有的三支决策研究成果,分析了三支决策、认知计算以及粒计算之间的关系,讨论了广义三支决策,并提出一种分、治、效相结合的TAO模型^[41]。

本文从广义三支决策的视角出发,定义一个将整体分成3个独立部分,并分别对每一个部分进行治略的三支决策模型。

定义1 假设 OB 是一个有限非空集合, C 是一个有限的标准集。基于标准集 C , OB 被划分成3个两两不相交的区域 P_1, P_2, P_3 ,记为 $\pi = \{P_1, P_2, P_3\}$,即 $f: OB \rightarrow \pi$ 。其中, $P_1 \cup P_2 \cup P_3 = OB, P_1 \cap P_2 = \emptyset, P_1 \cap P_3 = \emptyset, P_2 \cap P_3 = \emptyset$ 。

三支决策的有效性既依赖于对三分区域的合理划分,也依赖于针对3个区域所采取的策略。姚一豫教授在文献[42]中详细分析了3个区域的关系问题,3个区域可能存在着全序关系、无任何关系以及部分偏序关系等。基于对象在3个区域间移动的三支决策问题,本文考虑关系为全序关系的三支决策问题,即每个区域的对象之间是可以进行比较的。当对象在不同区域间转移时,三分区域其实已经发生了变化。不失一般性,我们定义区域转化这一名词。

定义2 对象在所选择的治略促使下,发生了区域转移,不妨假设治略对象所在位置从原区域 P_i 转移到区域 P_j ,这种由对象移动导致的区域变化被称为区域转化。

3 问题描述

对象在一个特定的“治”的作用下发生了所属区域的变化,从而形成了新区域,这一变化被称为区域转化为。我们考虑对“治”后的三分区域,继续进行“治”,伴随着区域的转化可能会产生收益或者代价。有时需要考虑“治”的成本和收益,在一个特定成本下,进行一次治略的区域转化。当然,我们也可以根据实际情况进行下一步的“治”。通过对指定区域进行再次“治”,使区域的转化能够带来更多的收益或者更少的代价。因此,一个合理的“治”显得尤为重要,也就是说治略的选择问题是关系到三支决策的“效”的重要问题。现实生活中一个最优方案的制定往往需要考虑收益或者成本的优化。值得注意的是,成本或者收益等费用包括的不仅是“治”所产生的收益或者代价、“治”本身的成本、“治”之前的3个区域的初始状态,还包括时间等因素。例如,生产商的费用不仅包括产品的生产加工或配送所产生的费用,产品的加工时间也同样是成本的一部分,需要计算在内。

成本的存在自然而然会引出这样两类问题。一类是不考虑成本限制的决策区域转化,例如三支聚类将一个整体分为3个部分,需要做的是通过设定新的条件标准,再次对边界域进行三支决策,逐步将所有的边界域的对象转化到其余两个确定的区域,在类似问题中我们的目标就是对整体进行划分,一般认为中间过程产生的成本就是分类的时间复杂度,对于这类问题,我们通常不考虑成本。另一类是具有成本限制的转化,这类区域转化治略过程会产生一定的收益或者代价,并且不同的转化方案也会造成不同的收益或者代价,从而引起整体收益的变化或是风险代价的变化。

在具有成本限制的区域转化过程中,对于对象相互独立的3个区域,考虑区域中对象本身存在一个表明它们各自费用的属性,即意味着它们本身存在一个值。在不同的情形下,对象本身的这个值有不同的含义,例如它可以解释为收益值或者代价值,这个值往往与对象本身所处区域有关。也就是说,可以认为对象本身的这个值会随着其自身所处的区域的不同而发生改变。例如,存在这样一类物品,根据物品的使用价值,将这类物品分成3个不同的档次,每一个档次有其相应

的价格对外出售,当物品所处的档次发生改变时,出售的价格也会发生变化,获得的利润也会发生变化,从而会改变整体收益。

费用值的确定是一个重要的问题,它根据不同的实际情况有不同的解释,可解释为收益或风险代价,我们假定本文中区域转化所产生的收益或风险代价是给定的,例如通过特定领域的专家进行打分确定。

通过对区域中的对象进行“治”,使区域发生变化,这个过程会产生一定的“治”的成本,我们希望经过区域转化使获得的收益最大或者代价最小,因此需要对采取的“治”进行费用度量以寻找最佳治略。

本文研究具有成本限制的区域转化问题,主要讨论具有转化代价的指定区域转化的费用问题。即考虑 3 方面的问题:“治”之前区域的初始状态、“治”之后区域的状态、“治”本身的成本。不失一般性,针对具有全序关系的 3 个区域的中间域的转化,考虑收益最大化原则下的指定区域转化问题以及最优转化方案,并给出这种情况下的动态规划算法。

4 区域转化的三支决策模型

4.1 一次区域转化治略

三支决策的基本思想是将全集划分为 3 个两两不重叠的部分,然后分别对这 3 个部分进行治略。首先将整体 OB 划分为 3 个部分,即 $\pi = \{P_1, P_2, P_3\}$,然后通过进一步的信息处理和判断,对其中一个域进行再次决策,将该域中的对象向其余两个域进行转化,将转化后 3 个区域记为 $\pi' = \{P_1', P_2', P_3'\}$,指定区域向另外两个域的转化会有 3 种转化方案,本文用 \rightsquigarrow 表示指定域中对象转化的方向,例如 $X \rightsquigarrow Y$ 表示对象由 X 转化到 Y 。图 1 展示的是带有指定区域转化的三支决策模型,图中虚线表示 P_2 域转化的 3 种方案。

定义 3^[8] 给定三分区域 $\pi = \{P_1, P_2, P_3\}$,分别用 p_1, p_2, p_3 表示对象在区域 P_1, P_2, P_3 中的位置。对于 $\forall x \in OB$,让 $p_\pi(x)$ 表示一个对象 x 在三分区域 π 中的位置,即:

$$p_\pi(x) = p_i, i = 1, 2, 3$$

定义 4 通过对指定域 P_i 中的对象进行再次决策,会产生至多 3 种决策方案,分别是指定域 P_i 中的对象由 P_i 域转化到 P_1, P_i 中的对象由 P_i 域转化到 P_2, P_i 域中的对象由 P_i 域转化到 P_3 ,分别记为: $P_i \rightsquigarrow P_1, P_i \rightsquigarrow P_2, P_i \rightsquigarrow P_3$ 。

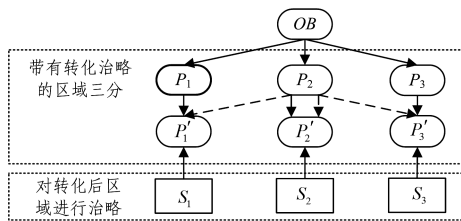


图 1 带有指定区域转化的三支决策模型

Fig. 1 Three-way decisions models with specified region transformation

4.2 一次区域转化治略的费用

通过对指定区域中的对象采取再次治略,域中对象会发生位置转移,有 3 种转化方案,不同的转化方案会产生不同的转化费用,每个对象在发生转化时需要付出一定的代价,记转

化代价分别为 $v(p_i \rightsquigarrow p_1), v(p_i \rightsquigarrow p_2)$ 和 $v(p_i \rightsquigarrow p_3)$,转化的代价与作用在这个域上的进行转化的标准有关。同时自身的费用值也随着转化对象所处区域的改变而发生变化,记此时 $g_i(x)$ 表示在 3 个不同区域的对象的费用值。

对于 $\forall x \in P_2$,基于新的标准条件集 C' , x 发生区域位置变化,对 P_2 域的再治略会使得 3 个区域的对象基数发生变化。表 1 是由移动引起的区域转化的各区域的基数矩阵。

表 1 区域基数
Table 1 Cardinality of region

	P_1'	P_2'	P_3'	total
P_1	$ P_1 \cap P_1' $	$ P_1 \cap P_2' $	$ P_1 \cap P_3' $	$ P_1 $
P_2	$ P_2 \cap P_1' $	$ P_2 \cap P_2' $	$ P_2 \cap P_3' $	$ P_2 $
P_3	$ P_3 \cap P_1' $	$ P_3 \cap P_2' $	$ P_3 \cap P_3' $	$ P_3 $
total	$ P_1' $	$ P_2' $	$ P_3' $	$ OB $

表 1 中 $|\cdot|$ 表示集合的基数, $|OB| = |P_1| + |P_2| + |P_3| = |P_1'| + |P_2'| + |P_3'|$ 。

用 $E(\pi)$ 和 $E(\pi')$ 表示转化前后 3 个区域的费用之和,计算此时的总费用分别为:

$$E(\pi) = \sum_{i=1}^3 |P_i| g_i(x) \tag{1}$$

$$E(\pi') = \sum_{i=1}^3 |P_i'| g_i(x) \tag{2}$$

记转化的“治”的成本为 B ,此时的“治”的成本为:

$$B = \sum_{i=1}^3 |P_2 \cap P_i'| v(p_2 \rightsquigarrow p_i) \tag{3}$$

转化结果为:

$$E(\pi \rightsquigarrow \pi') = E(\pi') - E(\pi) - B \tag{4}$$

5 多阶段三支决策区域转化模型

5.1 区域转化费用

由于在不同的实际应用中费用有着不同的含义,可表示收益、代价或时间等,在此我们讨论在代价为收益的情况下的费用最优,类似地,也可以将其表示为风险、代价等情况下的费用最优问题进行讨论。

5.1.1 基于收益原则的转化治略

在基于收益最大化原则的区域转化模型中,三支决策首先是根据收益的不同将整体划分成利润值不同的 3 个区域,例如:高、中、低 3 个区域,此时区域转化的费用问题就变成了转化的收益问题,希望得到最大化的收益。

此时,令 g_i 表示各区域中的对象可以产生的收益,在基于收益最大化原则的条件下,我们划分全集到 3 个区域,并设计指定 P_2 域中的对象向其他两个域进行转化的方案。

此时,转化前后的收益为:

$$\begin{aligned}
 E(\pi \rightsquigarrow \pi') &= E(\pi') - E(\pi) - B \\
 &= \sum_{i=1}^3 |P_i'| g_i(x) - \sum_{i=1}^3 |P_i| g_i(x) - \sum_{i=1}^3 |P_2 \cap P_i'| \\
 &\quad P_i' | v(p_2 \rightsquigarrow p_i) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \{ (|P_i'| - |P_i|) g_i(x) - |P_2 \cap P_i'| \\
 &\quad v(p_2 \rightsquigarrow p_i) \} \tag{5}
 \end{aligned}$$

通过上述讨论,可以得出如下结论。

结论 1 在基于收益最大化原则的三支决策区域转化模型中,存在费用表示为收益的情形,给出如下区域转化的方案:

- 1) 当 $E(\pi \rightsquigarrow \pi') > 0$ 时, 经过转化增加的收益值高于动作成本, 转化收益为正值, 本次区域转化治略有效;
- 2) 当 $E(\pi \rightsquigarrow \pi') < 0$ 时, 经过转化增加的收益值低于动作成本, 转化收益为负值, 本次区域转化治略失效;
- 3) 当 $E(\pi \rightsquigarrow \pi') = 0$ 时, 经过转化增加的收益值等于动作成本, 转化收益为 0, 区域转化治略待定。

5.2 多阶段区域转化治略的动态规划模型

根据对多阶段区域转化的费用问题的讨论, 本文设计了如下动态规划模型。

将阶段按转化次数划分, 记为 $k=1, 2, \dots, n$, 定义状态 S_k 为指定区域要进行第 k 次转化时的各区域的状态, 策略 $u_k(S_k)$ 表示指定区域要进行第 k 次转化处于状态 S_k 时做出的治略选择。

从初始状态 S_1 开始的全过程策略集为 $p_{1n}(S_1)$, 即:

$$p_{1n}(S_1) = \{u_1(S_1), u_2(S_2), \dots, u_n(S_n)\} \quad (6)$$

状态转移方程为:

$$S_{k+1} = T_k(S_k, u_k) \quad (7)$$

转化过程在第 k 阶段的阶段指标(即转化费用)取决于状态 S_k 和决策 u_k , 用 $v_k(S_k, u_k)$ 表示; 定义全过程上的数量函数为 $V_{1,n}(S_1, u_1, S_2, \dots, u_n, S_{n+1})$, 则阶段指标之和为:

$$V_{1,n}(S_1, u_1, S_2, \dots, u_n, S_{n+1}) = \sum_{j=1}^n v_j(S_j, u_j) \quad (8)$$

结合状态转移方程, 指标函数 $V_{1,n}$ 可以是表示状态 S_k 和策略集 p_{1n} 的函数, 即 $V_{1,n}(S_k, p_{1n})$, 在状态 S_{k+1} 给定时, 前 k 阶段的指标函数 $V_{1,k}$ 对 p_{1k} 的最优值被称为最优目标函数, 记为 $f_k(S_{k+1})$, 即

$$f_k(S_{k+1}) = \underset{p_{1k} \in p_{1n}(S_1)}{\text{opt}} V_{1,k}(S_{k+1}, p_{1k}), k=1, \dots, n \quad (9)$$

其中, opt 根据实际应用取最大值和最小值。

递归方程为:

$$\begin{cases} f_0(S_1) = 0 \\ f_k(S_{k+1}) = \underset{u_k}{\text{opt}} \{f_{k-1}(S_k), v_k(S_k, u_k) + f_{k-1}(S_k)\} \end{cases} \quad (10)$$

其中, $k=1, 2, \dots, n$ 。

最优转化次数为:

$$k^* = \min\{k \mid \text{opt}\{f_k(S_{k+1}) : 1 \leq k \leq n\}\} \quad (11)$$

因此, 最优转化费用为 $F^* = f_{k^*}(S_{k^*+1})$, 最优转化次数为 k^* 。

图 2 为多阶段区域转化治略的动态规划流程图。

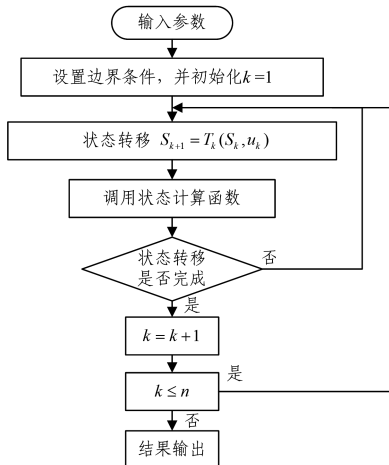


图 2 动态规划流程图

Fig. 2 Flow chart of dynamic programming

根据图 1 带有区域转化的三支决策模型, 在此基础上, 给出了一个改进的带有指定区域多阶段转化的三支决策模型(见图 3), 图中 $P_i^{(k)}$ 表示进行了 k 次区域转化后的 3 个区域, S_i' 表示对经过转化的 3 个区域采用的相应治略。

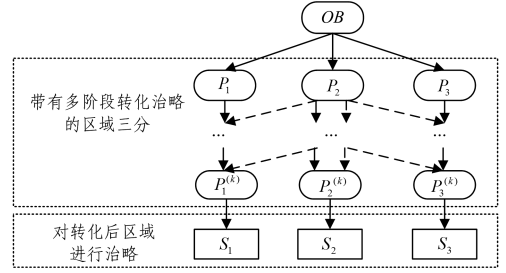


图 3 带有指定区域多阶段转化的三支决策模型

Fig. 3 Three-way decisions model with multi-stage transformation of specified region

5.3 收益最大化原则下的治略选择

对于收益问题, 按照转化次数划分阶段, 根据 5.2 节的讨论直接给出状态转移方程:

$$S_{k+1} = T_k(S_k, u_k) \quad (12)$$

对指定区域进行第 k 次转化时, 三分区由 $\pi^{(k-1)}$ 转化为 $\pi^{(k)}$, 特别地, 当 $k=1$ 时, 区域转化治略问题变为一次转化治略问题。第 k 次转化产生的收益为 $v_k(S_k, u_k)$, 区域 P_2 向 3 个不同的区域转化的转化成本为 $v^{(k)}(p_2 \rightsquigarrow p_i)$, 转化的动作成本费用记为 B_k 。此时有:

$$\begin{aligned} v_k(S_k, u_k) &= E(\pi^{(k-1)} \rightsquigarrow \pi^{(k)}) \\ &= E(\pi^{(k)}) - E(\pi^{(k-1)}) - B_k \\ &= \sum_{i=1}^3 |P_i^{(k)}| g_i(x) - \sum_{i=1}^3 |P_i^{(k-1)}| g_i(x) - \\ &\quad \sum_{i=1}^3 |P_2^{(k-1)} \cap P_i^{(k)}| v^{(k)}(p_2 \rightsquigarrow p_i) \\ &= \sum_{i=1}^3 \{ (|P_i^{(k)}| \cap P_i^{(k-1)}|) g_i(x) - |P_2^{(k-1)}| - |P_i^{(k)}| v^{(k)}(p_2 \rightsquigarrow p_i) \} \end{aligned}$$

经过 k 次转化后收益之和为:

$$\begin{aligned} V_{1,k}(S_1, u_1, S_2, \dots, S_{k+1}) &= \sum_{j=1}^k v_j(S_j, u_j) \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^3 \{ (|P_i^{(j)}| \cap P_i^{(j-1)}|) g_i(x) - |P_2^{(j-1)}| \cap P_i^{(j)}| v^{(j)}(p_2 \rightsquigarrow p_i) \} \end{aligned} \quad (14)$$

最优目标函数为:

$$f_k(S_{k+1}) = \max_{u_k} \{f_{k-1}(S_k), v_k(S_k, u_k) + f_{k-1}(S_k)\}, k=1, 2, \dots, n \quad (15)$$

最优转化次数为:

$$k^* = \min\{k \mid \max\{f_k(S_{k+1}) : 1 \leq k \leq n\}\} \quad (16)$$

因此, 记最优转化收益为 F^* , 此时 $F^* = f_{k^*}(S_{k^*+1})$, 其中 k^* 为最佳转化次数。

定理 1 基于收益最大化原则, 如果区域转化治略有效, 那么必存在正整数 k , 当 $k \geq 1$ 时, 有 $V_{1,k}(S_1, u_1, S_2, \dots, S_{k+1}) > 0$ 。

证明: 令 $k=n, n_i \geq 1$, 此时, 经过 n_i 次转化的收益之和为:

$$V_{1,n_i}(S_1, u_1, S_2, \dots, S_{n_i+1}) = \sum_{j=1}^{n_i} v_j(S_j, u_j)$$

此时,三支决策模型由区域 π 转化为 $\pi^{(n_i)}$,产生的转化收益为 $E(\pi \rightsquigarrow \pi^{(n_i)})$,根据多阶段区域转化性质,三分区 π 转化为 $\pi^{(n_i)}$ 会依次经历: $\pi \rightsquigarrow \pi^{(1)}, \pi^{(1)} \rightsquigarrow \pi^{(2)}, \dots, \pi^{(n_i-1)} \rightsquigarrow \pi^{(n_i)}$, n_i 次转化的收益依次为 $E(\pi^{(1)} \rightsquigarrow \pi^{(2)}), \dots, E(\pi^{(n_i-1)} \rightsquigarrow \pi^{(n_i)})$ 。此时有:

$$\begin{aligned} E(\pi \rightsquigarrow \pi^{(n_i)}) &= E(\pi \rightsquigarrow \pi^{(1)}) + \dots + E(\pi^{(n_i-1)} \rightsquigarrow \pi^{(n_i)}) \\ &= v_1(S_1, u_1) + \dots + v_{n_i}(S_{n_i}, u_{n_i}) \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} v_j(S_j, u_j) \\ &= V_{1,n_i}(S_1, u_1, S_2, \dots, S_{n_i+1}) \end{aligned}$$

由结论 1 可知, n_i 次区域转化治略有效时, $E(\pi \rightsquigarrow \pi^{(n_i)}) > 0$,故

$$V_{1,n_i}(S_1, u_1, S_2, \dots, S_{n_i+1}) > 0$$

根据定理 1 及其证明,我们有如下推论:

推论 1 基于收益最大化原则,如果存在正整数 k ,当 $k \geq 1$ 时,使得 $V_{1,k}(S_1, u_1, S_2, \dots, S_{k+1}) > 0$,则区域转化治略有效。

在以收益为目标的区域转化中,希望得到最大化的收益,在此前提下,如果转化收益为非正值,那么我们认为对指定域中的对象进行区域转化的治略失败,转化治略方案不能采用,为此对目标函数值分为 3 种情况进行讨论。

情况 1 当 $f_k(S_{k+1}) > 0$ 时,对指定域中的对象进行区域转化治略的是有效的,存在最优转化治略;

情况 2 当 $f_k(S_{k+1}) = 0$ 时,本次指定域进行区域转化治略的方案失效;

情况 3 当 $f_k(S_{k+1}) < 0$ 时,不需要对指定域中的对象进行区域转化治略,即可以直接对三分后的区域进行治略。

根据上述讨论,给出算法 1。

算法 1

```
input: the value of region parameter
output: K, F//K is the best times of the designated region transformation, F is the maximum income
1. Compute k//k is the times of the designated region transformation
2. for i=1 to k do
3. let E0=0;//Ei is the income of the designated region transformation
4. compute Ei;
5. end
6. for j=1 to k do
7. Vj=Vj-1+Ej;
8. for m=1 to j do
9. if Vm>Vm-1
10. fj=Vm;
11. else
12. fj=Vm-1;
13. endif
14. end
15. end
16. let K=0, F=0;
17. for s=1 to k do
```

- 18. if $f_s > f_{s-1}$
- 19. F= f_s , K= s ;
- 20. else
- 21. F= f_{s-1} , K= $s-1$;
- 22. endif
- 23. end
- 24. Output K and F.

6 应用实例

本节使用一个商品生产的例子来阐述本文设计的模型的应用,这里只给出基于收益最大化原则这一种情况来说明模型的实用性,其它情况与之类似。

在实际生产应用中,由于生产线和技术等原因,加工出来的产品的品质不一,根据制定的标准,将产品分为高、中、低 3 个不同的档次,分别用 P_1, P_2 和 P_3 表示。由于档次的设定,售价不同,则自然会产生不同的收益,我们记这 3 种档次的产品收益分别是 g_1, g_2 和 g_3 。然而,实际上,对于中档的产品,工厂可以对其进行再加工处理,然而经过再加工处理的产品可能会产生 3 种不同的情况,分别是变成高档 P_1' ,仍然是中档 P_2' 、降为低档 P_3' 。产品出现这 3 种情况的转化会相应地产生 3 种不同的成本,分别记为 $v(p_2 \rightsquigarrow p_1), v(p_2 \rightsquigarrow p_2)$ 和 $v(p_2 \rightsquigarrow p_3)$ 。

6.1 一次转化治略

假设一工厂从加工出来的产品中按照高、中、低 3 档选取 1 000 件产品作为采样数据,高、中、低 3 档产品的数量分别是 600, 250 和 150。详细参数如表 2 所列。

表 2 各区域参数

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
P_i	600	250	150
P_i'	700	120	180
$v(p_2 \rightsquigarrow p_i)$	0.30	0.20	0.10
g_i	10	8	6

根据 5.1 节的讨论,计算得到经过这一次转化产生的收益为:

$$\begin{aligned} E(\pi \rightsquigarrow \pi') &= (700-600) \cdot 10 - |P_2 \cap P_1'| \cdot 0.3 + (120-250) \cdot 8 - |P_2 \cap P_2'| \cdot 0.2 + (180-150) \cdot 6 - |P_2 \cap P_3'| \cdot 0.1 \\ &= 100 \cdot 10 - 100 \cdot 0.3 + (-130) \cdot 8 - 120 \cdot 0.2 + 30 \cdot 6 - 30 \cdot 0.1 \\ &= 83.0 \end{aligned}$$

经过计算得知 $E(\pi \rightsquigarrow \pi') = 83.0 > 0$,这说明本次进行区域转化的收益增加了。

6.2 多阶段区域转化治略

对于经过一次再加工后的中档产品,相对加工前,其品质或者其他因素可能会发生变化,因此,对产品进行二次再加工,可能会导致它的再加工成本发生相应变化,我们记经过 k 次再加工的产品加工的转化成本为 $v^{(k)}(p_2 \rightsquigarrow p_i), i=1, 2, 3$ 。

假设表 3、表 4 中的参数,以 5 次转化为例,来寻找最优转化方案。表 3 是经过 5 次转化的各区域的基数,表 4 是 5 次转化的转化成本。

表3 3个区域的基数

Table 3 Cardinality of three regions

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
P_i	600	250	150
$P_i^{(1)}$	700	120	180
$P_i^{(2)}$	730	60	210
$P_i^{(3)}$	745	30	225
$P_i^{(4)}$	760	10	230
$P_i^{(5)}$	765	0	235

表4 转化成本

Table 4 Cost of transformation

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$v^{(1)}(p_2 \rightsquigarrow p_i)$	0.30	0.20	0.10
$v^{(2)}(p_2 \rightsquigarrow p_i)$	0.32	0.22	0.12
$v^{(3)}(p_2 \rightsquigarrow p_i)$	0.33	0.23	0.13
$v^{(4)}(p_2 \rightsquigarrow p_i)$	0.35	0.25	0.15
$v^{(5)}(p_2 \rightsquigarrow p_i)$	0.36	0.26	0.16
g_i	10.00	8.00	6.00

根据表3和表4中的参数以及5.3节中的讨论,可以计算得到如下结果。

1) 5次转化产生的收益分别是:

$$\begin{cases} v_1 = 83.00 \\ v_2 = -26.40 \\ v_3 = 24.20 \\ v_4 = 11.50 \\ v_5 = -2.60 \end{cases}$$

2) 5次转化的阶段总收益为:

$$\begin{cases} V_1 = 83.00 \\ V_2 = 56.60 \\ V_3 = 80.80 \\ V_4 = 92.30 \\ V_5 = 89.70 \end{cases}$$

3) 5次转化中的阶段最优目标分别为:

$$\begin{cases} f_1 = 83.00 \\ f_2 = 83.00 \\ f_3 = 83.00 \\ f_4 = 92.30 \\ f_5 = 92.30 \end{cases}$$

4) 最优转化次数为:

$$k^* = 4$$

5) 最优转化费用为:

$$F^* = f_4 = 92.30$$

6.3 结果分析

经过上述讨论发现,第一次区域转化产生的收益为83.00,第二次区域转化产生的收益为-26.40,此时经过这两次转化后的收益是56.60,第三次区域转化产生的收益是24.20,此时经过3次转化后的收益为80.80,第四次区域转化产生的收益是11.50,此时经过4次转化后产生的收益为92.30,第五次区域转化产生的收益为-2.60,此时经过5次转化后的收益变为89.70。

根据目标函数结果,可以得到最大的目标函数是 f_4 和 f_5 ,目标值都是92.30,它们分别表示进行4次转化和5次转

化都会产生最大收益92.30。但是基于最少转化次数原则,我们发现经过4次转化后三支决策模型收益就可以达到最大值,其实根据5次转化的阶段总收益同样不难发现,在第四次转化时就能达到收益最大值。需要说明的是,5次转化中的阶段最优目标的意义可以在5.2节的讨论中找到。

最大化收益是在第四次转化时发生的,并且收益是正值,这说明经过转化可以获得更大收益,转化方案可行。

通过抽取一定数量的产品作为采样样本,设计多次加工的治略,并对多次加工治略进行费用分析,可以有效地度量提出的治略,并找到最佳的转化治略,本次治略选择可以作为大规模产品加工生产的一个标准参考,使得生产商可以实现费用最优,在获取更大的市场份额中更具有竞争力,故而具有极其重要的现实意义。

结束语 本文针对移动模型的三支决策进行了“治”的研究,综合考虑了“治”的成本,以及区域初始状态和“治”之后的状态,提出了多阶段三支决策模型的区域转化策略问题,并使用动态规划算法解决该问题。通过本文的讨论可以发现,对于带有全序关系的三支决策的任何一个区域的转化,本文模型和思路同样适用。本文在多阶段区域转化过程中,并没有讨论如何确定阶段数,也没有对基于什么标准进行区域划分以及转化进行说明,未来将在这些方面进一步研究。三支决策还在起步阶段,方兴未艾,还有许多基础理论性研究仍然需要我们去探索。

参考文献

- [1] YAO Y Y. Three-Way Decision: An interpretation of rules in rough set theory[M]// Rough Sets and Knowledge Technology. Springer Berlin Heidelberg, 2009: 642-649.
- [2] LIU D, LIANG D C. Generalized Three-way decisions and special three-way decisions [J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2017, 11(3): 502-510. (in Chinese)
刘盾, 梁德翠. 广义三支决策与狭义三支决策[J]. 计算机科学与探索, 2017, 11(3): 502-510.
- [3] YAO Y Y. An outline of a theory of three-way decisions[C]// Proceedings of the 8th International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing. Chengdu: Springer Berlin Heidelberg, 2012: 1-17.
- [4] YAO Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough set[J]. Information Sciences, 2010, 180(3): 341-353.
- [5] LIU B X, LI Y, SUN J. Three-way decisions and relate theoretical research [J]. Microcomputer and Applications, 2014(12): 1-3. (in Chinese)
刘保相, 李言, 孙杰. 三支决策及其相关理论研究综述[J]. 微型机与应用, 2014(12): 1-3.
- [6] YIN Y, KE D Y, LIU C Y. Theory of trinary decision and its application [J]. Journal of Shanghai normal university (Natural Science), 2015, 44(1): 95-104. (in Chinese)
殷业, 柯德营, 刘传勇. 三支决策理论及应用[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 2015, 44(1): 95-104.
- [7] CAO C, YAO Y Y. Actionable strategies in three-way decisions [J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 133(1): 141-151.
- [8] JIANG C M, YAO Y Y. Effectiveness measures in movement-

- based three-way decision[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 160(1):136-143.
- [9] HU B Q. Three-way decisions space and three-way decisions [J]. *Information Sciences*, 2014, 281(281):21-52.
- [10] HU B Q, WONG H, YIU K F C. On two novel types of three-way decisions in three-way decision spaces [J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2017, 82(C):285-306.
- [11] LIU D, LIANG D C, WANG C C. A novel three-way decision model based on incomplete information system[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91(C):32-45.
- [12] MA X A, YAO Y Y. Three-way decision perspectives on class-specific attribute reducts [J]. *Information Sciences*, 2018, 450(1):227-245.
- [13] YAO Y Y. The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models [J]. *Information Sciences*, 2011, 181(6):1080-1096.
- [14] ZHAO X R, HU B Q. Fuzzy probabilistic rough sets and their corresponding three-way decisions [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91(1):126-142.
- [15] WANG P X, YAO Y Y. CE₃: A Three-way Clustering Method Based on Mathematical Morphology[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 155(1):54-65.
- [16] YU H, ZHANG C, WANG G Y. A tree-based incremental overlapping clustering method using the three-way decision theory [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91(C):189-203.
- [17] YU H, JIAO P, YAO Y Y, et al. Detecting and refining overlapping regions in complex networks with three-way decisions [J]. *Information Sciences*, 2016, 373(1):21-41.
- [18] HUANG C C, LI J H, MEI C L, et al. Three-way concept learning based on cognitive operators; an information fusion viewpoint [J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2017, 84(1):218-242.
- [19] LI J H, HUANG C C, QI J J, et al. Three-way cognitive concept learning via multi-granularity [J]. *Information Sciences*, 2017, 378(1):244-263.
- [20] QI J J, TING Q, WEI L. Connections between three-way and classical concept lattices [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91(C):143-151.
- [21] SINGH P K. Three-way fuzzy concept lattice representation using neutrosophic set [J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2017, 8(1):69-79.
- [22] YAO Y Y. Interval sets and three-way concept analysis in incomplete contexts [J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2017, 8(1):3-20.
- [23] YU H Y, LI Q G, CAI M J. Characteristics of three-way concept lattices and three-way rough concept lattices [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 146(15):181-189.
- [24] AZAMA N, ZHANG Y, YAO J T. Evaluation functions and decision conditions of three-way decisions with game theoretic rough sets [J]. *European Journal of Operational Research*, 2017, 261(2):704-714.
- [25] AZAMA N, YAO J T. Game-theoretic rough sets for recommender systems[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2014, 72(1):96-107.
- [26] ZHANG H R, MIN F. Three-way recommender systems based on random forests[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91(C):275-286.
- [27] ZHANG H R, MIN F, SHI B. Regression-based three-way recommendation [J]. *Information Sciences*, 2017, 378(1):444-461.
- [28] D'ANIELLO G, GAETA A, GAETA M, et al. Self-regulated learning with approximate reasoning and situation awareness [J]. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 2018, 9(1):151-164.
- [29] YAO J T, AZAM N. Web-based medical decision support systems for three-way medical decision making with game-theoretic rough sets [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2015, 23(1):3-15.
- [30] YAO Y Y, WANG S, DENG X F. Constructing shadowed sets and three-way approximations of fuzzy sets [J]. *Information Sciences*, 2017, 412(1):132-153.
- [31] SHE Y H. On determination of thresholds in three-way approximation of many-valued NM-logic [J]. *Rough Sets and Current Trends in Computing*, 2014, 8536(1):136-143.
- [32] JIA X, ZHENG K, LI W, et al. Three-Way Decisions Solution to Filter Spam Email: An Empirical Study [M] // *Rough Sets and Current Trends in Computing*. Springer Berlin Heidelberg, 2012:287-296.
- [33] ZHOU B, YAO Y Y, LUO J G. Cost-sensitive three-way email spam filtering [J]. *Journal of Intelligent Information Sciences*, 2014, 42(1):19-45.
- [34] LIU D, LI T R, LIANG D C. Three-way government decision analysis with decision theoretic rough sets [J]. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 2012, 20(supp01):119-132.
- [35] LI H X, ZHANG L B, HUANG B, et al. Sequential three-way decision and granulation for cost-sensitive face recognition [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, 91(C):241-251.
- [36] LI H X, ZHANG L B, ZHOU X Z, et al. Cost-sensitive sequential three-way decision modeling using a deep neural network [J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2017, 85(C):68-78.
- [37] YANG X, LI T R, FUJITA H, et al. A unified model of sequential three-way decisions and multilevel incremental processing [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2017, 134(15):172-188.
- [38] YAO Y Y. Granular computing and sequential three-way decisions [M] // *Rough Sets and Knowledge Technology*. Springer Berlin Heidelberg, 2013:16-27.
- [39] YANG X, LI T R, LIU D, et al. A unified framework of dynamic three-way probabilistic rough sets [J]. *Information Sciences*, 2017, 420:126-147.
- [40] ZHANG Q H, LV G X, CHEN Y H, et al. A dynamic three-way decision model based on the updating of attribute values [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 142(15):71-84.
- [41] YAO Y Y. Three-way decisions and granular computing [J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2018, 103(1):107-123.
- [42] YAO Y Y. Three-way decisions and cognitive computing [J]. *Cognitive Computation*, 2016, 8(4):543-554.