

基于通信时滞和噪音的群集运动

王世丽 金英花 吴 晨

(江南大学理学院 江苏 无锡 214122)

摘 要 现实生活中,群集运动是一种很常见的现象。然而在群集系统中,由于有限的速度以及拥挤的交通,通常智能体间的传播和沟通存在时间延迟,因此考虑时间延迟很有必要。此外,在现实环境中,由于外界环境的各种不确定因素,智能体也很容易受到噪音的影响,因此噪音也是必须考虑的。基于以上两点,文中对具有通信时滞和噪音的多智能体系统的群集运动进行了研究。具体考虑了具有通信时滞和噪音的 Cucker-Smale 模型,主要利用二次函数的性质证明智能体间的通信时滞和噪音强度在满足一定的条件下,多智能体系统依然可以达到群集运动。最后通过 Matlab 进行数值仿真,并给出仿真后的例子,结果表明了该理论的正确性。

关键词 群集运动, Cucker-Smale 模型, 通信时滞, 噪音, 多智能体系统

中图法分类号 TP301 文献标识码 A DOI 10.11896/jsjcx.180901706

Flocking Based on Communication Delay and Noise

WANG Shi-li JIN Ying-hua WU Chen

(School of Sciences, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu 214122, China)

Abstract In real life, flocking is a very common phenomenon. However, in flocking system, due to the limited speed and traffic congestion, generally, there are time delays in transmission and communication between agents, so it is necessary to consider time delay. In addition, in the real-world environment, agents are also vulnerable to noise due to various uncertainties in the external environment, so noise is also inevitable to be considered. Based on these two points, this paper studied the flocking of multi-agent system with communication delay and noise. This paper specifically considered the Cucker-Smale model with communication delay and noise, and verified that the multi-agent system can still obtain a sufficient flocking condition when the amount of delay and the noise intensity of multi-agent system satisfy some certain conditions based on the properties of quadratic function. Finally, a numerical simulation was carried out by using MATLAB, and an example was given. The results show the correctness of the theory.

Keywords Flocking, Cucker-Smale model, Communication delay, Noise, Multi-agent system

1 引言

自然界中普遍存在群集现象,例如,鸟群的队形排列、鱼群巡游的子群、蚁群的聚集等,它们启发了学者们对群集运动的研究^[1-4]。群集运动的共同的特征是:一定数量的智能体通过有限的环境信息和简单的规则,可以组织成一个协调运动的系统。其在控制科学^[5-8]、生物学^[9-11]、无人机编队^[12-13]、多智能体一致性^[14]等方面有广泛的应用,也受到了越来越多的关注,因此探讨群集运动具有重要的现实意义。

1986 年, Reynolds^[15] 提出了群集运动的 3 条控制规则: 1)速度匹配; 2)聚合规则; 3)分离规则。为方便起见,此后的研究模型大多建立在前两条规则之上,而分离规则(防止个体碰撞)另作考虑。2007 年, Cucker 等提出了一个群集模型,即

Cucker-Smale 模型^[16-17](简称 C-S 模型)。考虑 N 个智能体的群集系统, $v_i(t)$ 和 $x_i(t)$ 表示分别第 i 个智能体在 t 时刻的速度和位置。 $v_i(t), x_i(t) \in R^d, i=1, 2, \dots, N, d, N \in R$, 其中连续的 C-S 模型表示如下:

$$\begin{cases} dx_i = v_i dt \\ dv_i = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \phi_{ij}(\|x_j(t) - x_i(t)\|)(v_j(t) - v_i(t)) dt \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\lambda > 0$ 是耦合系数; $\phi(x)$ ^[16-17] 是距离 $\|x_j - x_i\|$ 的函数, 具体表示为:

$$\phi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^\beta}, x \geq 0, \beta \geq 0 \quad (2)$$

$\phi(x)$ 是连续非负且不增的通信函数。模型(1)和模型(2)主要描述了含有 N 个智能体的群集系统, 在速度耦合的情况下, 每个智能体通过与其余智能体的相互作用来调节自身的

到稿日期:2018-09-11 返修日期:2019-01-02 本文受江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX17-1480)资助。

王世丽(1992—),女,硕士生,主要研究方向为多智能体群集运动分析与控制;金英花(1972—),女,博士,副教授,主要研究方向为非线性微分方程及其应用、多智能体群集运动分析与控制,E-mail:jyhmath@jiangnan.edu.cn(通信作者);吴晨(1993—),男,硕士生,主要研究方向为多智能体群集运动分析与控制。

速度和位移,且建立了只依赖于群体初始状态 $(x(0),v(0))$ 的速度收敛结果。确切地说,文献[16-17]证明了当 $\beta<\frac{1}{2}$ 时,模型(1)是无条件收敛的;当 $\beta\geq\frac{1}{2}$ 时,在群体的初始状态满足一定的条件下,这种收敛仍然是成立的。

Cucker 等考虑的模式是建立在一种理想化的情形下的。事实上,在现实环境中,个体很容易受到外界环境的影响,2015 年,文献[18]就噪音对群集运动的影响进行了分析研究,并给出了群集运动发生的充分条件。然而,在群集系统中,由于自身只能以有限的速度影响其他的智能体,使得智能体之间的相互作用不能立即产生,即通常都会有时间延迟,因此考虑时间延迟很有必要。本文不仅考虑了每个智能体对第 i 个智能体的随机影响,而且考虑了对称的通信时滞对系统的影响,研究了具有对称的通信时滞和噪音的 C-S 模型,并给出了发生群集运动的充分条件。

2 问题描述

2.1 模型描述

首先,第 i 个智能体会受到随机因素的影响:

$$\frac{\lambda}{N}\sum_{j=1}^N\psi_{ij}(x)\sigma_{ij}(v_j(t)-v_i(t))dW(t)\tag{3}$$

其中, σ_{ij} 表示智能体 j 对智能体 i 的噪音强度, $\sigma_{ij}=\sigma_{ji},\forall i,j=1,2,\cdots,N,W(t)$ 是一维的布朗运动。

下面是具有对称通信时滞和噪音的 C-S 模型:

$$\begin{cases} dx_i=v_i dt \\ dv_i=\frac{\lambda}{N}\sum_{j=1}^N\tilde{\psi}_{ij}(\tilde{v}_j-\tilde{v}_i)dt+\frac{\lambda}{N}\sum_{j=1}^N\tilde{\psi}_{ij}\sigma_{ij}(\tilde{v}_j-\tilde{v}_i)dW(t) \end{cases}\tag{4}$$

其中, τ 表示通信时滞, $\tilde{\psi}_{ij}=\psi(\parallel x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau)\parallel),\tilde{v}_i=v_i(t-\tau),\tilde{x}_i=x_i(t-\tau)$,初始状态 $(x_i(t),v_i(t))=(x_i(0),v_i(0)),-\tau\leq t\leq 0$ 。并且,在本文中定义 σ_{ij} 是有界的,即对于所有的 $i,j\leq N$,有 $0\leq\sigma_{ij}\leq\sigma$ 。由式(2)可知:

$$0<\underline{\psi}\leq\psi_{ij}=\psi_{ji}\leq 1,i,j=1,2,\cdots,N\tag{5}$$

其中, $\underline{\psi}=\min_{i\neq j,t\geq 0}\psi_{ij}$ 。

定义 1(群集运动) 模型(4)达到群集运动当且仅当对于任意的初始条件 $x_i(0),v_i(0),1\leq i,j\leq N$,模型(4)的解 (x_i,v_i) 满足以下两个条件:1) $\lim_{t\rightarrow\infty}E[\parallel v_i-v_j\parallel^2]=0$; 2) $\sup_{0\leq t\leq\infty}E[\parallel x_i-x_j\parallel^2]<\infty$ 。其中, $E[\cdot]$ 表示随机过程的期望值。

首先,我们将模型(4)转化成向量的形式。令 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)^T,\mathbf{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_N)^T$;令 $\tilde{\mathbf{A}}_x$ 为 $N\times N$ 阶矩阵,元素为 $\tilde{a}_{ij}=\tilde{\psi}_{ij}(i\neq j),\tilde{a}_{ii}=0$ 。 $\tilde{\mathbf{D}}_x$ 为 $N\times N$ 阶对角矩阵,对角线上第 i 个元素为 $\tilde{d}_i=\sum_{j=1,j\neq i}^N\tilde{a}_{ij}$ 。则模型(4)的拉普拉斯矩阵为 $\tilde{\mathbf{L}}_x=\tilde{\mathbf{D}}_x-\tilde{\mathbf{A}}_x$ 。定义矩阵 $\tilde{\mathbf{\Sigma}}\in\mathbf{R}^{N\times N^2}$,其第 i 行元素为 $[0,\cdots,0,\tilde{a}_{i1}\sigma_{i1},\cdots,\tilde{a}_{iN}\sigma_{iN},0,\cdots,0]$,且 $\tilde{a}_{i1}\sigma_{i1}$ 是第 $((i-1)N+1)$ 个元素。令 $\tilde{\mathbf{G}}=[\tilde{\mathbf{g}}_1,\tilde{\mathbf{g}}_2,\cdots,\tilde{\mathbf{g}}_N]^T,\tilde{\mathbf{g}}_i=[\tilde{v}_i-\tilde{v}_1,\cdots,\tilde{v}_i-\tilde{v}_N]^T,\tilde{\mathbf{G}}\in N^2\times 1$ 。模型(4)可转换成下列形式:

$$\begin{cases} d\mathbf{x}(t)=\mathbf{v}(t)dt \\ d\mathbf{v}(t)=-\frac{\lambda}{N}\tilde{\mathbf{L}}_x\tilde{\mathbf{v}}dt+\frac{\lambda}{N}\tilde{\mathbf{\Sigma}}\tilde{\mathbf{G}}dW(t) \end{cases}\tag{6}$$

模型(6)中的矩阵 $\tilde{\mathbf{L}}_x$ 是拉普拉斯矩阵,并且对于固定的 t ,矩阵 $\tilde{\mathbf{L}}_x$ 具有零特征值和所有其他正实部特征值,具体请参考文献[16]。

引理 1^[19] 令 $\mathbf{A}$ 是一个实对称矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N$ 是它的特征值,且这些特征值满足 $\alpha_{\min}=\alpha_1\leq\alpha_2\leq\cdots\leq\alpha_N=\alpha_{\max}$,那么对于所有的 $x\in\mathbf{R}^N$,有:

$$\alpha_1\mathbf{x}^T\mathbf{x}\leq\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\leq\alpha_N\mathbf{x}^T\mathbf{x}$$

并且,若 ξ_i 是矩阵 $\mathbf{A}$ 关于 α_i 的特征向量,那么:

$$\min_{\mathbf{x}\neq 0,\mathbf{x}\perp\xi_i}\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}=\alpha_2$$

引理 2^[20] 令 $\mathbf{A}$ 是 $N\times N$ 阶的非负对称矩阵, $\mathbf{L}=\mathbf{D}-\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{A}$ 的拉普拉斯矩阵, u_2 是 $\mathbf{L}$ 的第二小特征值,并且 $\gamma=\min_{i\neq j}a_{ij}$,那么就有 $u_2\geq N\gamma$ 。

2.2 理论分析

本节将对模型(6)进行分析研究,根据噪音强度、通信时滞和系统参数的关系,给出一个能够达到群集运动的充分条件。首先定义两个宏观变量 x_c 和 v_c (x_c 和 v_c 分别表示位移平均值和速度平均值)。

$$x_c=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^Nx_i,v_c=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^Nv_i$$

因为 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji},\tilde{a}_{ij}=\tilde{a}_{ji}$,所以对于 $\forall t\geq 0$,有: $dx_c=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N$

$dx_i=v_i,dv_c=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^Ndv_i=0$ 。故有 $x_c(t)=x_c(0)+tv_c(0),v_c(t)=v_c(0)$ 。

令 $\hat{x}_i=x_i-x_c,\hat{v}_i=v_i-v_c$,容易知道 $(\hat{x}_i,\hat{v}_i)$ 也是模型(4)的解, $\hat{x}_c(0)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\hat{x}_i(0)=0$ 且 $\hat{v}_c(0)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\hat{v}_i(0)=0$ 。不失一般性,令 $v_c(t)=v_c(0)=0$,则有:

$$\sum_{i=1}^Nx_i(t)=\sum_{i=1}^Nv_i(t)=0\tag{7}$$

令 $\phi_v^2=\parallel\mathbf{v}\parallel^2=\sum_{i=1}^Nv_i^2,\phi_x^2=\parallel\mathbf{x}\parallel^2=\sum_{i=1}^Nx_i^2$,进一步得到:

$$\sum_{i,j=1}^N\parallel v_i-v_j\parallel^2=2N\sum_{i=1}^Nv_i^2=2N\phi_v^2\tag{8}$$

$$\sum_{i,j=1}^N\parallel x_i-x_j\parallel^2=2N\sum_{i=1}^Nx_i^2=2N\phi_x^2\tag{9}$$

现只要证明式(8)中 $E[\phi_v]\rightarrow 0(t\rightarrow\infty)$,式(9)中 $E[\phi_x(t)]<\infty(0\leq t\leq\infty)$ 即可。

定义一个正定的函数 $w(t)$:

$$w(t)=\phi_v^2(t)\tag{10}$$

由伊藤公式^[21]可以得到:

$$\begin{aligned} dw(t) &= -\frac{2\lambda}{N}\mathbf{v}^T\tilde{\mathbf{L}}_x\tilde{\mathbf{v}}dt+ \\ &\quad \frac{2\lambda}{N}\mathbf{v}^T\tilde{\mathbf{\Sigma}}\tilde{\mathbf{G}}dW(t)+ \\ &\quad \frac{\lambda^2}{N^2}\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^N\tilde{a}_{ij}^2\sigma_{ij}^2(\tilde{v}_j-\tilde{v}_i)^2dt \end{aligned}\tag{11}$$

由于 $\tilde{a}_{ij}(t)\leq 1,\sigma_{ij}\leq\sigma(\forall i,j=1,2,\cdots,N)$,可以得到

$$\sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N\tilde{a}_{kj}^2\sigma_{kj}^2(\tilde{v}_j-\tilde{v}_k)^2\leq 2N\sigma^2\parallel\tilde{\mathbf{v}}\parallel^2。$$

根据式(7),对于 $\forall a > 0$, 可得:

$$d(w(t)e^{at}) \leq a e^{at} w(t) dt + \frac{2\lambda}{N} e^{at} \mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{G}} dW(t) + \left(\frac{-2\lambda}{N} e^{at} \mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_x \tilde{\mathbf{v}} + \frac{2\lambda^2 \sigma^2}{N} e^{at} \tilde{\mathbf{v}}^2 \right) dt \quad (12)$$

再对式(12)积分求期望,又因为 $\int_0^t \frac{2\lambda}{N} e^{as} \mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{G}} dW(s)$ 是鞅,所以可以得到:

$$E[e^{at} w(t)] \leq E[w(0)] + a \int_0^t e^{as} E[w(s)] ds + \int_0^t e^{as} E \left[-\frac{2\lambda}{N} \mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_x \tilde{\mathbf{v}} + \frac{2\lambda^2 \sigma^2}{N} \tilde{\mathbf{v}}^2 \right] ds \quad (13)$$

注:根据式(7),可得 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \sum_{i=1}^N x_i = 0$, 其中 $\mathbf{z} = (1, 1, \dots, 1)^T$, 分解 $R^N = \langle \mathbf{z} \rangle \oplus \langle \mathbf{z} \rangle^\perp$, 那么对于所有的 $t \geq 0$, 有 $\langle x(t) \rangle \in \langle \mathbf{z} \rangle^\perp$ 。

引理 3 令 $\mathbf{L}_x \in R^{N \times N}$, $N \geq 2$, $\mathbf{L}_x$ 是模型(6)中定义的拉普拉斯矩阵,并且满足式(5),则以下条件成立:

- (1) $\mathbf{L}_x$ 的最大特征值由 $2(N-1)$ 限定;
- (2) 对于任何向量 $\mathbf{u} \in R^N$, 有 $\|\mathbf{L}_x \mathbf{u}\| \leq 2(N-1) \mathbf{u}^T \mathbf{L}_x \mathbf{u}$;
- (3) 对于任何向量 $\mathbf{u} \in R^N$, 有 $\mathbf{u}^T \mathbf{L}_x \mathbf{u} \leq 2(N-1) \|\mathbf{u}\|^2$;
- (4) 对于任意向量 $\mathbf{u}, \mathbf{l} \in \langle \mathbf{z} \rangle^\perp$ 和 $k > 0$, 有 $\mathbf{u}^T \mathbf{L}_x \mathbf{l} \leq \frac{1}{2k} \mathbf{u}^T \mathbf{L}_x \mathbf{u} + \frac{k}{2} \mathbf{l}^T \mathbf{L}_x \mathbf{l}$

定理 1 设 $(x_i(t), v_i(t))$ 是模型(4)的解,则对于 $t \geq 0$, 存在一个 $a (0 < a < 2\lambda \underline{\psi})$, 当满足以下两个条件时:

- (1) $64\lambda^4 N a \tau e^{2a\tau} (\tau + \sigma^2) \leq (2\lambda^2 \sigma^2 e^{a\tau} + aN - 2\lambda N \underline{\psi})^2$
- (2) $2\lambda^2 \sigma^2 e^{a\tau} < (2\lambda \underline{\psi} - a)N$

系统(4)能达到群集运动。

证明:对于式(13)右边第三项:

$$\int_0^t e^{as} E \left[-\frac{2\lambda}{N} \mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_x \tilde{\mathbf{v}} + \frac{2\lambda^2 \sigma^2}{N} \tilde{\mathbf{v}}^2 \right] ds \quad (14)$$

首先, $-2\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_x \tilde{\mathbf{v}} = -2\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_x \mathbf{v} + 2\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_x (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})$, 由引理 3

条件(4)可得 $2\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_x (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) \leq \frac{1}{k} \mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_x \mathbf{v} + k(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})^T \tilde{\mathbf{L}}_x (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})$

$\tilde{\mathbf{v}})$ 。由引理 3 条件(3)可得 $(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})^T \tilde{\mathbf{L}}_x (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) \leq 2(N-1)$

$\|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|^2$, $\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_x \mathbf{v} \leq 2(N-1) \|\mathbf{v}\|^2$ 。由引理 2 可知对于 $\forall t \geq 0$, 有 $u_2(t) \geq N \underline{\psi}$, 其中 $\underline{\psi} = \min_{i \neq j} \tilde{a}_{ij}(t)$ 。再由引理 1 可知

对于 $\forall t \geq 0$, 有 $\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_x \mathbf{v}(t) \geq u_2(t) \mathbf{v}^2(t)$ 。又因为 $\frac{N-1}{N} \leq 1$, 所以

以式(14)满足下列不等式:

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{as} E \left[-\frac{2\lambda}{N} \mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{L}}_x \tilde{\mathbf{v}} + \frac{2\lambda^2 \sigma^2}{N} \tilde{\mathbf{v}}^2 \right] ds \\ & \leq \left(\frac{-2\lambda \underline{\psi} k + 2\lambda}{k} \right) \int_0^t e^{as} E[\mathbf{v}^2(t)] + 2k\lambda \int_0^t e^{as} E[\|\mathbf{v} - \mathbf{v}(s-\tau)\|^2] ds + \frac{2\lambda^2 \sigma^2}{N} \int_0^t e^{as} E[\mathbf{v}^2(s-\tau)] ds \end{aligned} \quad (15)$$

对于式(15)右边第二项和第三项,有:

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{as} E[\mathbf{v}^2(s-\tau)] ds \\ & \leq \int_0^\tau e^{as} E[\mathbf{v}^2(s-\tau)] ds + \int_\tau^t e^{as} E[\mathbf{v}^2(s-\tau)] ds \end{aligned}$$

$$\leq c_1 + e^{at} \int_0^t e^{as} E[\mathbf{v}^2(s)] ds \quad (16)$$

其中, $c_1 = \int_0^\tau e^{as} E[\mathbf{v}^2(s-\tau)] ds$, 又因为:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}} &= \int_{t-\tau}^t d\mathbf{v}(s) \\ &= \int_{t-\tau}^t -\frac{\lambda}{N} \tilde{\mathbf{L}}_x \tilde{\mathbf{v}} ds + \int_{t-\tau}^t \frac{\lambda}{N} \tilde{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{G}} dW(s) \end{aligned}$$

所以有不等式:

$$\begin{aligned} E[\|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|^2] &\leq 2E \left[\int_{t-\tau}^t -\frac{\lambda}{N} \tilde{\mathbf{L}}_x \tilde{\mathbf{v}} ds \right]^2 + \\ &2E \left[\int_{t-\tau}^t \frac{\lambda}{N} \tilde{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{G}} dW(s) \right]^2 \end{aligned} \quad (17)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Fubini 定理可得:

$$2E \left[\int_{t-\tau}^t -\frac{\lambda}{N} \tilde{\mathbf{L}}_x \tilde{\mathbf{v}} ds \right]^2 \leq \frac{2\lambda^2 \tau}{N^2} \int_{t-\tau}^t E[\tilde{\mathbf{L}}_x \tilde{\mathbf{v}}]^2 ds$$

再由伊藤积分^[21]可得:

$$2E \left[\int_{t-\tau}^t \frac{\lambda}{N} \tilde{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{G}} dW(s) \right]^2 \leq \frac{2\lambda^2}{N^2} \int_{t-\tau}^t E[\tilde{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{G}}]^2 ds$$

又因为 $\|\tilde{\mathbf{Z}} \tilde{\mathbf{G}}\|^2 \leq 2N\sigma^2 \tilde{\mathbf{v}}^2$, $\|\tilde{\mathbf{L}}_x \tilde{\mathbf{v}}\|^2 \leq 2N \tilde{\mathbf{v}}^2$, 所以:

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{as} E[\|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|^2] ds \\ &= \int_0^\tau e^{as} E[\|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|^2] ds + \int_\tau^t e^{as} E[\|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|^2] ds \\ &\leq c_2 + \frac{4\lambda^2 (\tau + \sigma^2)}{N} \int_\tau^t e^{as} \int_{s-\tau}^s E[\mathbf{v}^2(r-\tau)] dr ds \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $c_2 = \int_0^\tau e^{as} E[\|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|^2] ds$, 因为:

$$\begin{aligned} & \int_\tau^t e^{as} \int_{s-\tau}^s E[\mathbf{v}^2(r-\tau)] dr ds \\ &\leq a\tau c_1 + a\tau e^{2a\tau} \int_0^\tau e^{as} E[\mathbf{v}^2(s)] ds \end{aligned} \quad (19)$$

所以将式(15)、式(16)、式(18)、式(19)代入式(13), 整理并令 P 和 $Q(k)$ 为:

$$\begin{aligned} P &= E[w(0)] + 2k\lambda c_2 + \frac{8\lambda^3 k a \tau c_1 (\tau + \sigma^2)}{N} + \frac{2\lambda^2 \sigma^2 c_1}{N} \\ Q(k) &= \left(\frac{-2\lambda N \underline{\psi} k + 2\lambda N + aNk}{Nk} \right) + \frac{8\lambda^3 k (\tau + \sigma^2) a \tau e^{2a\tau}}{N} + \\ &\quad \frac{2\lambda^2 \sigma^2 e^{a\tau}}{N} \end{aligned}$$

由此可以得到 $E[e^{at} w(t)] \leq P + Q(k) \int_0^t e^{as} E[w(s)] ds$ 。

其中 P 是常数, 而

$$NkQ(k) = 8\lambda^3 \tau^2 e^{2a\tau} k^2 + 2\lambda N + (2\lambda^2 \sigma^2 e^{a\tau} - 2\lambda N \underline{\psi} + Na)k$$

是关于 k 的二次函数, 若想得到 $NkQ(k) = 0$, 需要满足下列条件:

- 1) $64\lambda^4 N a \tau e^{2a\tau} (\tau + \sigma^2) \leq (2\lambda^2 \sigma^2 e^{a\tau} + aN - 2\lambda N \underline{\psi})^2$;
- 2) $2\lambda^2 \sigma^2 e^{a\tau} < (2\lambda \underline{\psi} - a)N$ 。即存在一个 $k > 0$ 使得 $Q(k) = 0$ 成立。因此就可以得到: $E[w(t)] \leq P e^{-at} \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ 。

接下来需要证明 $E[\phi_x(t)]$ 有界。这里采用文献[18]中的方法。

由式(7)可知:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_x^2}{dt} &= 2 \sum_{i=1}^N x_i v_i \leq 2 \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N v_i^2 \right) \\ &= 2 \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

利用比较定理找到一个 $M(t)$ 满足：

$$\frac{dM(t)}{dt}=2\sqrt{M(t)}\parallel \mathbf{v}(t)\parallel$$

(20)

并且初始条件 $M(0)=\parallel x(0)\parallel^2$,那么 $\phi_x^2\leqslant M(t)$ 。由式(20)

可得: $M^{\frac{1}{2}}(t)=M^{\frac{1}{2}}(0)+\int_0^t\parallel \mathbf{v}(s)\parallel ds$ 。因此 $\parallel \mathbf{x}(t)\parallel=$

$\parallel \mathbf{x}(0)\parallel+\int_0^t\parallel \mathbf{v}(s)\parallel ds$,进而有：

$$\begin{aligned} E[\parallel \mathbf{x}(t)\parallel]&\leqslant\parallel \mathbf{x}(0)\parallel+P\int_0^te^{-as}ds\\&=\parallel \mathbf{x}(0)\parallel+P(1-e^{-at}) \end{aligned}$$

令 $C=\parallel \mathbf{x}(0)\parallel+P$,有 $\sup_{0\leqslant t\leqslant\infty}E[\phi_x]<C$ 。

3 数值仿真

本节主要给出通信时滞和噪音下的数值仿真结果,并证明该理论的正确性。

在以下所有的数值仿真中 $\beta=0.3$,耦合系数 $\lambda=1$,三维空间的智能体个数 $N=20$ (这里只考虑时间在 10s 以内的变化)。用 V, X 来表示速度波动和位移动：

$$V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N[v_i(t)-v_c(t)]^2$$

$$X=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N[x_i(t)-x_c(t)]^2$$

当 $\tau=0,\sigma=0$ 时,从图 1(a)中可以看出,一段时间后各智能体的速度和速度平均值的差都趋于 0,这意味着所有智能体的速度达到一致;如图 1(b)所示,位移差趋于一个常数,即模型(4)达到群集运动;图 1(c)是初始时刻各个智能体的状态,可以看出它们在初始时刻处于“乱序”状态;如图 1(d)所示,智能体达到群集运动,并处于一种规则有序的状态。如图 2 所示,当 $\tau=0.2,\sigma=1$ 时,模型(4)达到群集运动。从图 3 可以看出,当通信时滞和噪音强度过大时,图 3(a)中的速度波动没有趋于 0,图 3(b)中的位移差也在不断增大,即没有达到群集运动,从图 3(c)也可以很明显看出各个智能体最终仍处于“无序”状态。

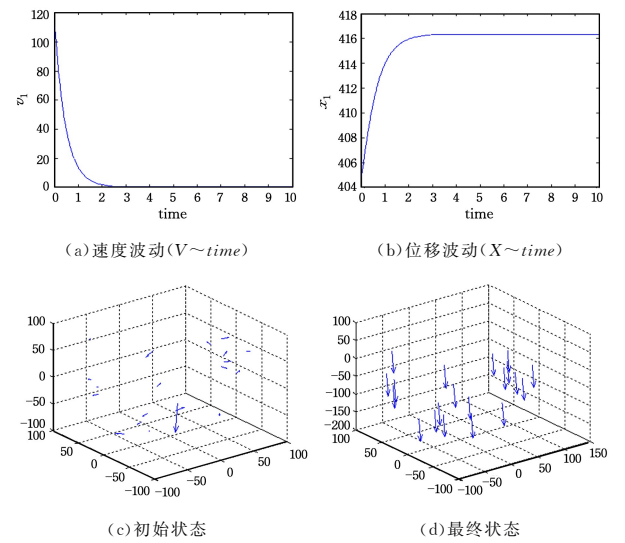


图 1 当 $\tau=0,\sigma=0$ 时,模型(4)的群集运动
Fig. 1 Flocking of model (4) with $\tau=0,\sigma=0$

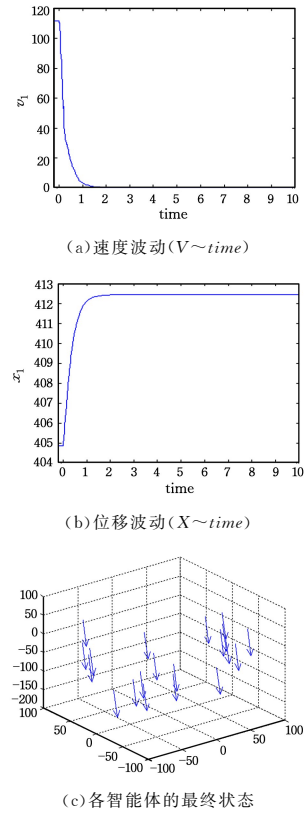


图 2 当 $\tau=0.2,\sigma=1$ 时,模型(4)的群集运动
Fig. 2 Flocking of model(4) with $\tau=0.2,\sigma=1$

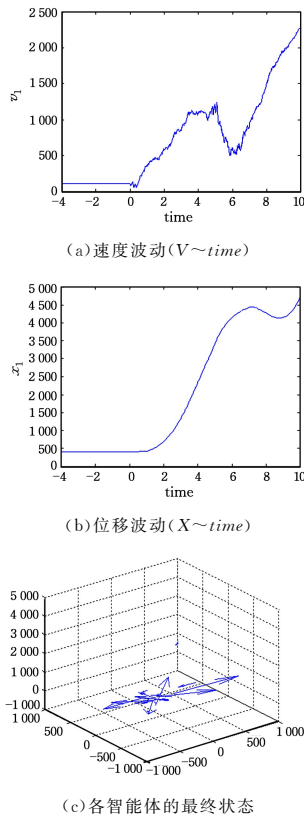


图 3 当 $\tau=4,\sigma=4$ 时,模型(4)的发散
Fig. 3 Non-flocking of model (4) with $\tau=4,\sigma=4$

结束语 本文在具有通信时滞和噪音的情况下对连续的 C-S 模型能否达到群集运动做出了理论证明以及数值仿真，

证明了在通信时滞和噪音强度满足一定的条件下,模型(4)可以达到群集运动,但通信时滞和噪音过大也会阻碍群集运动的发生。由于方法的不足,本文中的条件仅是充分而非必要的。本文研究的是对称通信时滞,接下来将对不对称通信时滞的 C-S 模型、不对称通信时滞与噪音同时存在的 C-S 模型等需要满足何种条件可以达到群集运动进行研究。

参 考 文 献

[1] VICSEK T,ZAFEIRIS A. Collective Motion [J]. Physics Reports,2012,517(3/4):71-140.

[2] ATZA K,TUNSTOMA K,IOANNOUA C C,et al. Inferring the Structure and Dynamics of Interactions in Schooling Fish [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences,2011,108(46):18720.

[3] TONI FEDER. Statistical Physics is for the Birds [J]. Physics Today,2007,60(10):28-30.

[4] BIANCALANI T,DYSON L,MCKANE A J. Noise-induced Bistable States and Their Mean Switching Time in Foraging Colonies [J]. Physical Review Letters,2014,112(3):038101.

[5] SHI P,GARCIA A. A Flocking-Based Approach for Distributed Stochastic Optimization [J]. Operations Research,2018,66 (1):267-281.

[6] HA S Y,ZHANG X T. Uniform-in-Time Transition From Discrete Dynamics to Continuous Dynamics in the Cucker-Smale Flocking [J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences,2018,28(9):1699-1735.

[7] SUN Z Y,MOU S S,ANDERSON B D O,et al. Conservation and Decay Laws in Distributed Coordination Control Systems [J]. Automatica,2018,87:1-7.

[8] ZHAO X W,GUAN Z H,HU B,et al. Attitude-Synchronization Flocking of Multiple 3-Dimensional Nonholonomic Agents without Position Measurement [J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control,2018,28(3):2369-2382.

[9] MARTHY W,FARINE D R. The Potential Impacts of the Songbird Trade on Mixed-Species Flocking [J]. Biological Conservation,2018,222:222-231.

[10] MARTINEZ A E,PARRA E,MUELLERKLEIN O et al. Fear-

Based Niche Shifts in Neotropical Birds [J]. Ecology,2018,99(6):1338.

[11] SHIRAGE M,MATSUDA Y,KIRIMA J,et al. High-Speed Atomic Force Microscopic Observations on Demembrated Chlamydomonas Axonemes and Dynein Arms [J]. Biophysical Journal,2018,114(3):647a.

[12] LI S B,CHEN Y C,YANG Z,et al. Formation Flight Control of Multi-UAVs with Communication Delay [J]. Information and Control,2012,41(2):142-146. (in Chinese)
李少斌,陈炎财,杨忠,等. 具有通信延迟的多无人机编队飞行控制[J]. 信息与控制,2012,41(2):142-146.

[13] WANG X,ZHANG J Y,ZHANG D B,et al. Development of an Experiment System for UAV Formation Flight [J]. Robot,2017,39(2):160-166,175. (in Chinese)
王勋,张纪阳,张代兵,等. 无人机编队飞行快速试验系统设计[J]. 机器人,2017,39(2):160-166,175.

[14] XU Y J,PENG S G,GUO A Y. Group Consensus of Discrete time Multi-Agent Systems[J]. Application Research of Computers,2018,35(4):1052-1055. (in Chinese)
徐云剑,彭世国,郭艾演. 离散多智能体系统分组一致性研究[J]. 计算机应用研究,2018,35(4):1052-1055.

[15] REYNOLDS C W. Flocks,Herds,and Schools;a Distributed Behavioral Model[J]. Computer Graphics,1987,21(4):25-34.

[16] CUCKER F,SMALE S. Emergent behavior in flocks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2007,52(5):852-862.

[17] CUCKER F,SMALE S. On the Mathematics of Emergence [J]. Japanese Journal of Mathematics,2007,2(1):197-227.

[18] SUN Y Z,YA J,ZHAO D H. Flocking of Multi-Agent Systems with Multiplicative and Independent Measurement Noises [J]. Physica A,2015,440:81-89.

[19] HORN R A,JOHSON C R. Matrix Analysis [M]. Cambridge University Press,1985.

[20] CUCKER F,MORDECKI E. Flocking in Noisy Environments [J]. Journal De Mathematiques Pures et Appliquees,2008,89(3):278-296.

[21] MAO X. Stochastic Differential Equations and Applications,Second Edition [M]. Horwood Publishing Limited,2007.