

一种新型解决非光滑伪凸优化问题的神经网络方法

喻 昕 马 崇 胡 悦 伍灵贞 汪炎林

(广西大学计算机与电子信息学院 南宁 530004)

摘 要 优化问题的研究一直以来深受科研工作者的关注,凸优化问题作为优化问题的一个重要部分更是成为研究重点,许多应用神经网络思想提出的模型已经被应用到实际问题中。然而,在机器学习、信号处理、生物信息学等领域中涉及的优化问题往往不是凸优化问题,而是伪凸优化及非凸优化的问题,因此解决后一类问题变得刻不容缓。针对目标函数是非光滑伪凸函数、约束函数由等式和不等式函数构成的优化问题,基于罚函数以及微分包含的思想,构建了一个新型的不含惩罚参数的单层神经网络模型。该模型的主要设计思路是根据已经提出的神经网络模型思想,为目标函数的梯度设计一个制约的函数,使其值始终保持在一个范围之内,再结合一个关于时间的函数,确保其值随时间变小。同时,考虑到不等式约束对状态解进入等式约束之前的收敛方向有影响,加入一个条件函数来限制它。与已提出的神经网络模型相比,所提模型具有结构简单、无须提前进行惩罚参数的计算、对初始点的位置无特殊要求等优势。而且,对于任意初始点,理论证明了状态解的有界性、状态解能够在有限时间内收敛到等式约束内并永驻其中、状态解能够在有限时间内收敛到可行域并永驻其中以及状态解最终收敛到优化问题的最优解。在 MATLAB 环境下,通过数学仿真实验,状态解都能快速地收敛到一个最优解。同时,用已经提出的类似神经网络模型解决同样的优化问题时,若罚参数或初始点选择不恰当则会导致状态解不能很好地收敛。这不仅验证了所提出的理论结果的正确性,同时也说明了所提网络具有更广泛的应用范围。

关键词 伪凸函数,神经网络,微分包含,非光滑优化

中图法分类号 TP183 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/jsjcx.181001926

New Neural Network Method for Solving Nonsmooth Pseudoconvex Optimization Problems

YU Xin MA Chong HU Yue WU Ling-zhen WANG Yan-lin

(Department of Computer and Electronic Information, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract The research of optimization problem is favored by researchers. As an important part of optimization problem, convex optimization problem is the focus of research. Many models based on neural network are applied to practical problems. However, the optimization problems involved in machine learning, signal processing, bioinformatics and other fields are often not convex optimization problems, but pseudoconvex optimization and nonconvex optimization problems. Therefore, it is urgent to solve the latter kind of problems. To solve the optimization problem that the objective function is nonsmooth pseudoconvex function and constraint function is equality and inequality function, this paper constructed a new single-layer neural network model without penalty parameter based on the idea of penalty function and differential inclusion. The main idea of the design is that according to the proposed neural network model, a constrained function can be designed for the gradient of the objective function so that the value of the objective function is always kept within a range, and then a function about time is combined to ensure that its value decreases with time. At the same time, considering that inequality constraints affect the convergence direction of the state solution before it enters the equation constraint, a conditional function is added to restrict it. Compared with the proposed neural network model, it has the advantages of simple structure, no need to calculate penalty parameters in advance, and no special requirements for the position of the initial point. Furthermore, it is theoretically proved that for any initial point, the state solution can converge to the equality constraints in finite time and stay there thereafter, the boundedness of the state solution, the state solution can converge to the feasible region in finite time and stay there thereafter, and the state solution can finally converge to the optimal solution of the optimization problem. Under the environment of MATLAB, by mathematical simulation experiments, the state solution can converge to the optimal solution quickly. At the same time, if the penalty parameters or initial points are not selected properly, the state solution will not converge well when the same optimization problem is solved by using the proposed similar neural network model. This not only verifies the correct-

到稿日期:2018-10-16 返修日期:2019-03-29 本文受国家自然科学基金项目(61862004,61462006)资助。

喻 昕(1973—),男,博士,教授,CCF 会员,主要研究方向为人工神经网络、互联网络、优化计算等;**马 崇**(1993—),男,硕士生,主要研究方向为优化计算,E-mail:970694101@qq.com(通信作者);**胡 悦**(1993—),女,硕士生,主要研究方向为优化计算;**伍灵贞**(1995—),女,硕士生,主要研究方向为优化计算;**汪炎林**(1995—),男,硕士生,主要研究方向为优化计算。

ness of the theoretical results, but also shows that the proposed network has a wider range of applications.

Keywords Pseudoconvex function, Neural network, Differential inclusion, Nonsmooth optimization

1 引言

近年来,随着计算机技术以及人工智能的发展,神经网络的思想被广泛用于解决最优化问题。1986 年, Tank 等^[1]开创性地把 Hopfield 神经网络应用到解决线性规划的问题。1988 年, Kennedy 等提出了一种含有惩罚参数的动态正则非线性规划电路(NPC)^[2],以解决非线性规划问题,但是该问题中目标函数和约束函数都必须是光滑函数。在此之后, NPC 获得了快速的发展,大量的用于解决优化问题的神经网络模型被提出,其中最主要的研究方向就是处理凸优化问题。凸优化问题是优化问题的一个主要分支,由于凸函数的局部最优解就是全局最优解等一些特殊的性质,使得学者们对于凸优化问题的处理变得更加得心应手。近些年,投影法的思想被用来构造新的递归神经网络,用来解决一些约束条件为凸函数的优化问题。文献[3]运用投影思想,提出了一种用来解决非线性凸优化问题的神经网络。文献[4]提出了一种用于解决约束函数仅含等式约束的二次规划的递归神经网络,但此模型需要提前进行参数估计。文献[5]提出了一种基于微分包含思想的递归神经网络用于解决非光滑凸优化问题,该神经网络使用的条件较为广泛,对初始点的位置没有特殊要求,不含惩罚参数,但是结构复杂,为双层神经网络。

随着凸优化问题的逐步解决,在实际应用过程中发现有大量的伪凸优化甚至非凸优化问题无法得到解决。函数的凸性导致上述神经网络模型无法在伪凸优化以及非凸优化上应用。为了解决这一问题,相关学者们提出了许多新型的神经网络模型。文献[6]采用 Tikhonov 正则化和投影法的思想,提出了一种用于解决一般约束条件的伪凸优化问题的神经网络,而且不需要提前对惩罚参数进行估算。同时,神经网络的状态解能够很好地收敛到该伪凸优化问题的最优解。文献[7]基于惩罚函数的思想,定义了一个非常巧妙的惩罚函数,设计了一个单层的递归神经网络,用于解决约束条件为等式和不等式的伪凸优化问题,在一定的假设条件下,神经网络具有不错的收敛性。最近,基于光滑思想,文献[8]提出了一个新的用于解决非光滑伪凸优化问题的神经网络,首先构建了一个关于目标函数的光滑函数,并证明了神经网络解的全局性、有界性、收敛性等性质,该神经网络适用于一般的凸约束问题,但目标函数必须在可行域内为伪凸函数,且初始点要求在等式约束区域内。

受文献[9-13]中的知识积累以及已有研究的启发^[14-26],本文提出了一种新型的神经网络用来解决非光滑伪凸优化问题。与以往已经提出的模型相比,该模型神经网络结构简单、不含惩罚参数,初始点的位置可以任意选择,可解决目标函数是伪凸函数的优化问题。

本文研究的非光滑伪凸优化问题如下:

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s. t. } & Ax=b \\ & g(x)\leqslant 0 \end{aligned} \tag{1}$$

其中, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^{p\times n}$ 是行满秩矩阵,

$f(x):\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ 是伪凸函数且局部 Lipschitz 连续, $g(x)=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_m(x)):\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^p$ 是一个凸函数但未必光滑。本文总是假设伪凸优化问题至少有一个解。

2 预备知识

为了方便后续文章的阅读和理解,下文将给出一些相关的基础定义和性质。

定义 1 设对于集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的任意点 x , 都有一个相应的非空集合 $F(x)\subset\mathbb{R}^n$, 则 $x\rightarrow F(x)$ 是 $E\rightarrow\mathbb{R}^n$ 上的集值映射。如果对于任意的开集 $V\supset F(x_0)$, 都存在 x_0 的一个邻域 U , 使得 $F(U)\subset V$, 则称集值映射 $F:E\rightarrow\mathbb{R}^n$ 在点 $x_0\in E$ 是上半连续的。

定义 2 对于函数 $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$, 若存在正数 κ 和 ε , 对于所有的 $x_1,x_2\in x+\varepsilon B(0,1)$, 满足 $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant\kappa\|x_2-x_1\|$, 那么称函数 $f(x)$ 在 $x\in\mathbb{R}^n$ 处是 Lipschitz 连续的, 其中 $B(0,1)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开球。如果函数 $f(x)$ 在其定义域上的每一点都满足 Lipschitz 连续, 那么这样的函数称为局部 Lipschitz 函数。

定义 3 设函数 f 在点 x 附近是 Lipschitz 的, 则 f 在点 x 处沿方向 $v\in\mathbb{R}^n$ 的广义方向导数为:

$$f^0(x;v)=\limsup_{y\rightarrow x,t\rightarrow 0^+}\frac{f(y+tv)-f(y)}{t}$$

另外, f 在点 x 处的 Clarke 广义梯度定义为:

$$\partial f(x)=\{\xi\in\mathbb{R}^n:f^0(x;v)\geqslant\langle v,\xi\rangle,\forall v\in\mathbb{R}^n\}$$

如果 f 在点 x_0 处是局部 Lipschitz 连续的, 记 Lipschitz 常数为 κ , 则 $\partial f(x_0)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非空紧凸子集, 并且对 $\forall \xi\in\partial f(x_0)$, 都有 $\|\xi\|\leqslant\kappa$ 。

定义 4 如果一个函数 $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$, 在点 x 附近是局部 Lipschitz, 那么当它满足以下的两个条件时, 称它在 x 附近是正则函数。

1) 对于 $\forall v\in\mathbb{R}^n$, $f(x,v)$ 函数的单侧方向导数, 即 $f'(x,v)=\lim_{t\rightarrow 0^+}(f(x+tv)-f(x))$ 存在。

2) 对于 $\forall v\in\mathbb{R}^n$, $f'(x,v)=f^0(x,v)$ 。

假设 1 存在一个点 $\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$, 满足 $\tilde{x}\in\text{int}(S_1)\cap S_2$, 使得 $\hat{g}>0$ 。其中, $\hat{g}=\min_{i=1,2,\cdots,m}(-g_i(\tilde{x}))$ 。

假设 2 存在 $\hat{x}\in\mathbb{R}^n$, $r>0$, 使得 $\hat{x}\in\text{int}(S_1)\cap S_2$, 而且 $S\subset B(\hat{x},r)$, 其中, $B(\hat{x},r)=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x-\hat{x}\|\leqslant r\}$ 。

3 神经网络模型

根据惩罚函数的思想,我们对约束集 S_1 引入一个惩罚函数为 $D(x)=\sum_{i=1}^m\max\{0,g_i(x)\}$, 其中 $\{x\in\mathbb{R}^n:D(x)\leqslant 0\}=S_1$ 。因为 $g_i(x)(i=1,2,\cdots,p)$ 是凸函数, 有 $D(x)$ 为凸函数。对于所有 $x\in\mathbb{R}^n$, $\partial D(x)$ 都存在, 如下式所示:

$$\partial D(x)=\begin{cases} \sum_{l\in I^+(x)}\partial g_l(x)+\sum_{l\in I^0(x)}[0,1]\partial g_l(x), & x\notin S_1 \\ \sum_{l\in I^0(x)}[0,1]\partial g_l(x), & x\in bd(S_1) \\ 0, & x\in\text{int}(S_1) \end{cases}$$

其中,

$$I^+(x)=\{i\in\{1,2,\cdots,m\}:g(x)>0\}$$
$$I^0(x)=\{i\in\{1,2,\cdots,m\}:g(x)=0\}$$

伪凸优化问题的可行域记作:

$$S=\{x\in\mathbb{R}^n:g(x)\leq 0, Ax=b\}$$

另外,不等式可行域和等式可行域分别记为: $S_1=\{x\in\mathbb{R}^n:g(x)\leq 0, i=1,2,\cdots,m\}, S_2=\{x\in\mathbb{R}^n:Ax=b\}$ 。很明显 $S=S_1\cap S_2$ 。

针对上文提出的非光滑伪凸优化问题,本文提出了一种微分包含形式的神经网络:

$$\dot{x}(t)\in -\mu(t)(I-P)[\varepsilon(t)\frac{1}{\max\{1,\|\partial f(x(t))\|\}}\partial f(x(t))+\partial D(x(t))]-A^T h(Ax(t)-b)\quad (2)$$

其中, I 是一个单位矩阵; $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是行满秩矩阵; $P=A^T(AA^T)^{-1}A$; $\varepsilon(t)=e^{-\alpha t}$; α 是一个正常数; $h(x)=(\tilde{h}(x_1), \tilde{h}(x_2), \cdots, \tilde{h}(x_m))^T$, h 中的每个分量 $\tilde{h}(x_i)$ 的定义如下:

$$\tilde{h}(x_i)=\begin{cases} 1, & \text{if } x_i>0 \\ [-1,1], & \text{if } x_i=0, i=1,2,\cdots,m \\ -1, & \text{if } x_i<0 \end{cases}$$

函数 $\mu(t)$ 是一个单调非减的函数,其形式如下:

$$\mu(t)=\begin{cases} 0, & t\leq t_{S_2} \\ 1, & t>t_{S_2} \end{cases}$$

其中, t_{S_2} 为与可行域 S_2 碰撞的时间上限。函数 $\mu(t)$ 是由式(1)中的等式约束 A 和 b , 以及初始点 x_0 决定的。

4 相关定理

4.1 局部解的存在性

定理 1 对于任意的初始点 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 在区间 $[0,T)$ 上, 神经网络(式(2))至少存在一个局部解 $x(t)$, 其中 $T\in(t_{S_2}, +\infty)$ 。

证明: 当 $t\in[0,t_{S_2}]$, 式(2)可以写成 $\dot{x}(t)\in -A^T h(Ax(t)-b)$, 容易证出 $-A^T h(Ax(t)-b)$ 在 x 处是上半连续的(U. S. C)。另外, 经过简单的分析, $-A^T h(Ax(t)-b)$ 是一个非空紧凸集的集值映射。因此, 式(2)在初始点为 $x(0)=x_0$ 时, 在最大区间 $[0,T)$ 上至少存在一个局部解, 其中 $T\in(0, t_{S_2}]$ 。根据链式法则, 存在一个可测函数 $\eta(t)\in h(Ax(t)-b)$, 使得:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|x(t)-\hat{x}\|^2=\langle x(t)-\hat{x}, \dot{x}\rangle$$
$$=-(x(t)-\hat{x})^T A^T \eta(t)$$
$$=-(Ax(t)-b)^T \eta(t)$$

a. e. $t\leq T$

根据 $h(x)$ 的定义, 有:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|x(t)-\hat{x}\|^2\leq 0$$

a. e. $t\leq T$

这也就意味着 $x(t)$ 在 $t\in[0,T)$ 上是有界的。再结合解的存在性定理, 我们可以得到对于任意的初始点 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 在 $[0,t_{S_2}]$ 上, 至少存在一个神经网络(式(2))的局部解。当 $t>t_{S_2}$, 必定存在可测函数 $\gamma(t)\in\partial f(x), \xi(t)\in\partial D(x), \eta(t)\in h(Ax(t)-b)$, 神经网络(式(2))可以写成:

$$\dot{x}(t)\in -(I-P)[\xi(t)+\varepsilon(t)\frac{1}{\max\{1,\|\gamma(t)\|\}}\gamma(t)]-A^T \eta(t)\quad (3)$$

经过简单的分析, 式(3)右半部分是 U. S. C, 且为非空紧凸值。结合先前的分析, 可以得到对于任意的初始点 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 在区间 $[0,T)$ 上神经网络(式(2))至少存在一个局部解 $x(t)$, 其中 $T\in(t_{S_2}, +\infty)$ 。

4.2 有限时间收敛到 S_2

定理 2 若假设 1 成立, 式(2)的解 $x(t)$ 从任意初始点 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 出发, 将在有限时间进入等式约束集 $S_2=\{x\in\mathbb{R}^n: Ax=b\}$, 并永驻其中。

证明: 令 $L(x)=\|Ax(t)-b\|_1$, 则 $L(x)$ 是正则函数且 $\partial L(X)=A^T h(Ax(t)-b)$ 。设 $x(t)$ 是式(2)经过初始点 x_0 的一个状态解, 存在可测函数 $\gamma(t)\in\partial f(x), \xi(t)\in\partial D(x), \eta(t)\in h(Ax(t)-b)$, 使得:

$$\dot{x}(t)\in -\mu(t)(I-P)[\xi(t)+\varepsilon(t)\frac{1}{\max\{1,\|\gamma(t)\|\}}\gamma(t)]-A^T \eta(t)$$

a. e. $t\in[0,T)$

由于 $A(I-P)=A-AA^T(AA^T)^{-1}A=0$, AA^T 是正定矩阵, 由链式法则可得:

$$\frac{d}{dt}\langle L(x), \dot{x}\rangle$$
$$=\langle A^T h(Ax(t)-b), \dot{x}\rangle$$
$$=\langle A^T \eta(t), -\mu(t)(I-P)[\varepsilon(t)\frac{1}{\max\{1,\|\gamma(t)\|\}}\gamma(t)+\xi(t)]-A^T \eta(t)\rangle$$
$$=-\mu(t)\eta(t)^T A(I-P)[\varepsilon(t)\frac{1}{\max\{1,\|\gamma(t)\|\}}\gamma(t)+\xi(t)]-\eta(t)^T AA^T \eta(t)$$
$$=-\eta(t)^T AA^T \eta(t)$$
$$\leq -\lambda_m(AA^T)\|\eta(t)\|^2\quad (4)$$

其中, $\lambda_m(AA^T)$ 为矩阵 AA^T 的最小特征值。由于 A 是行满秩矩阵, 因此 $\lambda_m(AA^T)>0$ 。

对于任意的 $x(t)\notin S_2$, 存在 $A_i x\neq b_i$, 其中 A_i 表示矩阵 A 的第 i 行, 根据函数 $h(x)$ 的定义, 可知 $\|\eta(t)^2\|=\sum_{i=1}^m|\eta_i(t)|^2\geq 1$ 。对于 $x(t)\notin S_2$, 得:

$$\frac{d}{dt}\langle L(x), \dot{x}\rangle\leq -\lambda_m(AA^T)<0, \text{ a. e. } t\in[0,+\infty)\quad (5)$$

下面证明对于任意的初始点 $x_0\notin S_2$, 神经网络的局部解 $x(t)$ 将在有限时间内进入等式约束集 S_2 中。若存在 $t_{S_2}<T$, 使得对于任意的 $t\in[0,t_{S_2})$, 都有 $x(t)\notin S_2$, 由式(4)知 $\frac{d}{dt}\langle L(x), \dot{x}\rangle\leq -\lambda_m(AA^T)\|\eta(t)\|^2$ 。对等式两边从 0 到 t_{S_2} 进行积分, 得:

$$L(x(t_{S_2}))-L(x_0)\leq -\lambda_m(AA^T)t_{S_2}$$

也就是 $0\leq \|Ax(t_{S_2})-b\|_1\leq \|Ax_0-b\|_1-\lambda_m(AA^T)t_{S_2}$, 解不等式可得 $t_{S_2}\leq \frac{\|Ax_0-b\|_1}{\lambda_m(AA^T)}$ 。说明对于任意初始点 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 神经网络的解 $x(t)$ 在有限时间内进入等式约束集 $S_2=\{x\in\mathbb{R}^n: Ax=b\}$, 并且与可行域 S_2 碰撞的时间上限为

$$t_{S_2} \leq \frac{\|Ax_0 - b\|_1}{\lambda_m(AA^T)}.$$

接下来需要证明经过任意初始点的全局解 $x(t)$ 一旦进入等式约束集 S_2 , 就会永驻其中。如果 $x(t)$ 不是进入等式约束集 S_2 并永驻其中, 则神经网络(式(2))的局部解 $x(t)$ 在 t_1 时刻离开 S_2 , 必定存在 $t \in (t_1, t_2)$, 使得 $x(t) \notin S_2$, 而且 $\|Ax(t_1) - b\|_1 = 0$, 再根据式(5)可得:

$$\begin{aligned} \|Ax(t_2) - b\|_1 &\leq \|Ax(t_1) - b\|_1 - \lambda_m(AA^T)(t_2 - t_1) \\ &= -\lambda_m(AA^T)(t_2 - t_1) < 0 \end{aligned}$$

这与 $\|Ax(t_2) - b\|_1 > 0$ 矛盾。因此, 对于任意初始点 x_0 , 神经网络(2)的状态解 $x(t)$ 都将在有限时间内进入到等式约束集 S_2 , 并永驻其中。

4.3 全局解的存在性

命题 1^[8] 让 $\lambda, \theta: [t_0, t_1] \rightarrow [0, +\infty)$, 其中 $\lambda(t)$ 是可积分的, $\theta(t)$ 是绝对连续的, 若 $\dot{\theta}(t) \leq \lambda(t) \sqrt{\theta(t)}$, a. e. $t \in [t_0, t_1]$, 有 $\sqrt{\theta(t)} \leq \sqrt{\theta(t_0)} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \lambda(s) ds$ 。

命题 2^[13] 如果假设 2 成立, 则存在 $\alpha > 0$, 使得 $\langle \xi, x - \hat{x} \rangle \geq \alpha, \forall x \in S_2 \setminus S_1, \xi \in \partial D(x)$, 其中 $\hat{x} \in \text{int}(S_1) \cap S_2$ 。

引理 1 若假设 1 和假设 2 成立, 则式(2)从任意初始点出发的状态解 $x(t)$ 都是有界的。

证明: 任取 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 设 $x(t)$ 为式(2)经过初始点 x_0 的状态解, $t \in [t_{S_2}, T)$, $x(t) \in S_2$, 则存在可测函数 $\gamma(t) \in \partial f(x)$, $\xi(t) \in \partial D(x)$, $\eta(t) \in h(A(x(t)) - b)$, 使得:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\in -(I - P)[\xi(t) + \epsilon(t) \frac{1}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}} \gamma(t)] - \\ &A^T \eta(t) \end{aligned} \quad (6)$$

由定理 2 可知, 状态解 $x(t)$ 将在有限时间内进入等式可行域 S_2 , 并永驻其中。故不失一般性地, 我们假设 $x(t) = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax(t) = b\}$, 故对于任意的 $t \in [t_{S_2}, T)$ 都成立。由于 $Ax(t) = b$, 因此 $A \dot{x}(t) = 0$ 。又因为 $A(I - P) = 0$, 所以由式(6)知 $0 = -AA^T \eta(t)$ 。同时, 由于 AA^T 是可逆的, 因此 $\eta(t) = 0$, 从而 $x(t)$ 满足:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -(I - P)[\xi(t) + \epsilon(t) \frac{1}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}} \gamma(t)] \\ Ax(t) = b \end{cases} \quad (7)$$

另外, 可以得到:

$$\begin{aligned} (I - P)(x(t) - \hat{x}) &= (I - A^T(AA^T)^{-1}A)(x(t) - \hat{x}) \\ &= (x(t) - \hat{x}) - A^T(AA^T)^{-1}(A(x(t) - \hat{x})) \\ &= (x(t) - \hat{x}) \end{aligned}$$

同时, 根据 $D(x)$ 函数的凸性和非负性, 以及关于 $\epsilon(t)$ 的定义, 有:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|x(t) - \hat{x}\|^2 &= \langle x(t) - \hat{x}, \dot{x} \rangle \\ &= -\langle x(t) - \hat{x}, \epsilon(t) \frac{1}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}} \gamma(t) \rangle - \langle x(t) - \hat{x}, \xi(t) \rangle \\ &\leq D(\hat{x}) - D(x) + \epsilon(t) \|x(t) - \hat{x}\| \end{aligned}$$

$$\leq \epsilon(t) \|x(t) - \hat{x}\| \quad (8)$$

结合命题 1 和式(8)可以得到:

$$\begin{aligned} \|x(t) - \hat{x}\| &\leq \|x_0 - \hat{x}\| + \int_{t_0}^t \epsilon(s) ds \leq \|x_0 - \hat{x}\| + \\ &\frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - 1), \forall t \in [0, T) \end{aligned}$$

这就意味着 $x(t)$ 在 $t \in [t_{S_2}, T)$ 上是有界的。结合定理 2 可以知道 $x(t)$ 在 $t \in [0, T)$ 上有界, 根据解的扩展性理论可知 $x(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有解, 即存在全局解。

接下来, 需要证明 $x(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界。

当 $x(t) \in S_2 \setminus S_1$, 结合命题 2 以及上文的分析, 有:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|x(t) - \hat{x}\|^2 &\leq -\alpha + \epsilon(t) \|x(t) - \hat{x}\| \\ &\leq -\alpha + \epsilon(t) (\|x_0 - \hat{x}\| + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - 1)) \end{aligned} \quad (9)$$

于是, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\alpha t} = 0$, 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) (e^{-\alpha t} - 1) = 0$ 。

存在 $T_1 \in [t_{S_2}, +\infty)$, 使得 $\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|x(t) - \hat{x}\|^2 \leq -\frac{\alpha}{2}, \forall t \in$

$[T_1, +\infty), x(t) \notin S_1$ 。因此, $\|x(t) - \hat{x}\| \leq \max\{\|x(T_1) - \hat{x}\|, r\}$, 说明 $x(t)$ 都是有界的。

4.4 有限时间收敛到 S

引理 2^[7] 若假设 1 成立, 对于任意的 $x \in S_2 \setminus S_1, \xi \in \partial D(x)$, 有 $\xi^T (I - P)(x - \hat{x}) > g$ 。

定理 3 若假设 1 和假设 2 成立, 则经过任意初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 神经网络(2)的状态解 $x(t)$ 将在有限时间进入可行域 S , 并永驻其中。

证明: 首先需要证明过任意初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 的状态解 $x(t)$ 在有限时间内进入可行域 S_1 。根据定理 2 可以知道式(2)的解 $x(t)$ 将在有限时间进入等式约束集 S_2 , 并永驻其中。假设 $x(t)$ 为过任意初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 的状态解。不失一般性, 这里仅考虑 $t \in [t_{S_2}, +\infty)$, 则式(2)可以缩写成式(7), 再根据链式法则可得:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D(x(t)) &= \langle \xi(t), -(I - P)[\xi(t) + \frac{\epsilon(t)}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}} \gamma(t)] \rangle \\ &= -\xi^T(t) (I - P)[\xi(t) + \frac{\epsilon(t)}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}} \gamma(t)] \\ &\leq \|(I - P)\xi(t)\| \|\gamma(t)\| - \frac{\epsilon(t)}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}} \|(I - P)\xi(t)\|^2 \end{aligned} \quad (10)$$

当 $\max\{1, \|\gamma(t)\|\} = 1$ 时, 式(10)可以写成:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D(x(t)) &\leq \|(I - P)\xi(t)\| \|\gamma(t)\| \epsilon(t) - \|(I - P)\xi(t)\|^2 \\ &\leq \|(I - P)\xi(t)\| \epsilon(t) - \|(I - P)\xi(t)\|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

当 $\max\{1, \|\gamma(t)\|\} = \|\gamma(t)\|$ 时, 式(10)可以写成:

$$\frac{d}{dt} D(x(t)) \leq \|(I - P)\xi(t)\| \epsilon(t) - \|(I - P)\xi(t)\|^2 \quad (12)$$

根据引理 1 的分析可以知道 $x(t)$ 是有界的,不妨设 $x(t) \in B(\hat{x}, M) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \hat{x}\| < M\}, \forall t \in [0, +\infty)$, 其中 $M > 0$.

为了证明状态解 $x(t)$ 将在有限时间进入可行域 S , 我们使用反证法. 假设存在一个时间点 $T_1 > 0$, 使得对于所有 $t > T_1$, 都有 $x(t) \notin S$. 根据引理 2 可知, 对于任意的 $x \in S_2 \setminus S_1$, 有 $\xi^T(I-P)(x - \hat{x}) > \hat{g}$, 从而 $\|\xi(I-P)\| \|x - \hat{x}\| > \hat{g}$, 即可得到:

$$\|\xi(I-P)\| > \frac{\hat{g}}{\|x - \hat{x}\|} > \frac{\hat{g}}{M}$$

结合式(12)得:

$$\frac{d}{dt}D(x(t)) \leq \|(I-P)\xi(t)\| (\epsilon(t) - \|(I-P)\xi(t)\|) \quad (13)$$

对不等式(13)的左右部分从 t_{S_2} 到 t 进行积分, 再结合 $\epsilon(t)$ 的定义, 容易得到, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有:

$$D(x(t)) - D(x(t_{S_2})) \leq \int_{t_{S_2}}^t (\epsilon(t) - \|(I-P)\xi(t)\|) \|(I-P)\xi(t)\| ds \rightarrow -\infty$$

而这个结论与 $D(x(t))$ 的非负性矛盾, 因此假设不成立, 故存在一个时间点 $t_{S_1} > 0$, 使得 $x(t_{S_1}) \in S$. 这说明神经网络(式(2))的状态解 $x(t)$ 将在有限时间进入可行域 S . 类似定理 2, 可证明神经网络(式(2))的状态解 $x(t)$ 会驻留在 S 中.

4.5 收敛到最优解

引理 3^[7] 设 x^* 是非光滑凸伪优化问题(式(1))的一个最优解, 则对于任意的 $x \in S$ 和 $\gamma(t) \in \partial f(x(t))$, 有 $\langle \gamma(t), x - x^* \rangle \geq 0$.

定理 4 对于任意初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 神经网络(式(2))的状态解 $x(t)$ 将收敛到式(1)的最优解。

证明: 设 x^* 是伪凸优化式(1)的一个最优解. 定义 Lyapunov 函数如下:

$$M(x) = f(x) - f(x^*) + \frac{1}{2} \|x - x^*\|^2 \quad (14)$$

经过计算可得, $\partial M(x) = \partial f(x) + x - x^*$. 另外, 由定理 2 和定理 3 可知, 神经网络的状态解 $x(t)$ 在有限时间内进入可行域 $S = S_1 \cap S_2$, 并永驻其中. 因此, 我们不妨假设对于任意的 $t \geq 0$, $x(t) \in S = S_1 \cap S_2$. 因此存在可测函数 $\gamma(t) \in \partial f(x(t))$, $\xi(t) \in \partial D(x(t))$, 对于任意的 $t \geq 0$, 满足:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -(I-P)[\xi(t) + \frac{\epsilon(t)}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}}\gamma(t)] \\ Ax(x) = b \end{cases} \quad (15)$$

由 $x(t), x^* \in S_2$ 可得, $P(x(t) - x^*) = 0, \forall t \geq 0$. 同时, 由于 $x(t) \in S_1, \dot{D}(x) = 0$, 即 $\langle \xi(t), \dot{x}(t) \rangle = 0$. 再根据链式法则以及 $(I-P)^2 = (I-P)$ 可知, 对于任意的 $t \geq 0$, 有:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}M(x) &= \langle \gamma(t) + x - x^*, \dot{x}(t) \rangle \\ &= \langle \gamma(t), \dot{x}(t) \rangle + \langle x - x^*, \dot{x}(t) \rangle \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } \langle \gamma(t), \dot{x}(t) \rangle &= \frac{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}}{\epsilon(t)} \langle \frac{\epsilon(t)}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}}\gamma(t) + \xi(t), \dot{x}(t) \rangle \\ &= -\frac{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}}{\epsilon(t)} \|\dot{x}(t)\|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

由引理 3 可知, $\langle \gamma(t), x - x^* \rangle \geq 0$. 由凸不等式可知, $\langle x(t) - x^*, \xi(t) \rangle \geq D(x(t)) - D(x^*) \geq 0$, 因此:

$$\begin{aligned} \langle x - x^*, \dot{x}(t) \rangle &= -\langle x - x^*, \frac{\epsilon(t)}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}}\gamma(t) + \xi(t) \rangle \\ &= -\frac{\epsilon(t)}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}} \langle x - x^*, \gamma(t) \rangle - \langle x - x^*, \xi(t) \rangle \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

结合式(16)一式(18), 最终可以得出:

$$\frac{d}{dt}M(x) \leq -\frac{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}}{\epsilon(t)} \|\dot{x}(t)\|^2 \leq -\|\dot{x}(t)\|^2 \leq 0 \quad (19)$$

又因为 $M(x) \geq \frac{1}{2} \|x - x^*\|^2$, $M(x)$ 是一个非增正函数, 所以存在一个常数 $M_0 \geq 0$, 满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} M(x(t)) = M_0$. 对不等式(19)从 0 到 t 进行积分, 当 $t \rightarrow +\infty$, 可以得到:

$$\int_0^{+\infty} \|\dot{x}(t)\|^2 ds \leq M(x(0)) - M_0 < +\infty$$

于是存在一个递增序列 t_k , 使得:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\dot{x}(t_k)\| = 0 \quad (20)$$

根据引理 1 可知, 序列 $\{x(t_k)\}$ 是有界的, 因此存在一个子序列 $\{x(t_k)\}$ 和 $\bar{x}$, 满足:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(t_k) = \bar{x} \quad (21)$$

接下来, 需要证明 $\bar{x}$ 是伪凸优化问题(式(1))的最优解. 因为 ∂f 和 ∂D 是在 $\mathbb{R}^n$ 的非空紧凸集, 一定存在 $\gamma_k \in \partial f(x(t_k))$, $\xi_k \in \partial D(x(t_k))$, 使得:

$$-\|\dot{x}(t_k)\|^2 = -\|(I-P)[\frac{\epsilon(t)}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}}\gamma_k + \xi_k]\|^2 \quad (22)$$

因为 ∂f 是 U. S. C., 且 $\{x(t_k)\}$ 是有界的, 因此存在一个子序列 $\{\gamma_k\}$ 和 $\bar{\gamma}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_k = \bar{\gamma}$. 另外, 根据文献[3]可知:

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} x(t_k) = \bar{x} \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_k = \bar{\gamma} \\ \gamma_k \in \partial f(x(t_k)) \end{cases} \quad (23)$$

于是, 有 $\bar{\gamma} \in \partial f(\bar{x})$.

根据定理 2 和定理 3 可知: $x_k, \bar{x} \in S_1 \cap S_2$. 同时, 对于任意的 $x \in S_1 \cap S_2$, 有:

$$\begin{cases} (x - x(t_k))^T P = 0 \\ \langle x - x(t_k), \xi_k \rangle \leq D(x) - D(x(t_k)) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

因此, 对于任意的 $x \in S_1 \cap S_2$, 结合式(20)和式(22), 可以得到:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle x - x(t_k), (I-P)[\frac{\epsilon(t_k)}{\max\{1, \|\gamma(t_k)\|\}}\gamma_k + \xi_k] \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle x - x(t_k), \frac{\epsilon(t_k)}{\max\{1, \|\gamma(t_k)\|\}}\gamma_k + \xi_k \rangle \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle x - x(t_k), \frac{\epsilon(t_k)}{\max\{1, \|\gamma(t_k)\|\}}\gamma_k \rangle \\ &= \frac{\epsilon(t_k)}{\max\{1, \|\gamma(t_k)\|\}} \langle x - \bar{x}, \bar{\gamma} \rangle \\ &\leq \langle x - \bar{x}, \bar{\gamma} \rangle \end{aligned} \quad (25)$$

因为 f 是伪凸函数,所以对于任意 $x \in S_1 \cap S_2$,有 $f(x) - f(\bar{x}) \geq 0$ 。也就是说, $\bar{x}$ 是伪凸优化问题(式(1))的最优解。

最后,需要证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ 。构造一个 Lyapunov 函数如下:

$$V(x) = \varepsilon(t)(f(x) - f(\bar{x})) + \frac{1}{2} \|x - \bar{x}\|^2 \tag{26}$$

与上文的证明类似,容易得到,对于任意 $x \in S_1 \cap S_2$,

$$V(x) \geq \frac{1}{2} \|x - \bar{x}\|^2, \text{有:}$$

$$\frac{d}{dt} V(x) \leq 0 \tag{27}$$

这说明 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t))$ 存在,结合式(21)和式(26),有:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} V(x(t_k)) &= (\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x(t_k)) - f(\bar{x})) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \|x(t_k) - \bar{x}\|^2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

因此,有:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} V(x(t_k)) = 0 \tag{29}$$

结合式(27)和式(29),有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \|x(t) - \bar{x}\|^2 = 0$,也就意味着 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$,即神经网络(式(2))的状态解收敛到伪凸优化问题(式(1))的最优解。

5 仿真实验

为了证明上述理论的正确性,下面将用仿真实验模拟本文提出的神经网络模型来解决以下最优化问题。仿真实验是在 MATLAB 2012a 平台下进行的。

实验 1 目标函数为 Gaussian 的伪凸优化问题
Gaussian 是一类特殊的函数,在许多的工程领域都需要应用此函数,而且 Gaussian 是在 $\mathbb{R}^n$ 上的一种局部 Lipschitz 连续且伪凸的函数,符合本文研究问题的范围。本文提出的神经网络模型可以解决这类问题,其形式如下:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= -\exp(-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2}) \\ \text{s. t. } Ax &= b \\ x_1^2 + x_2 - x_3 - x_4 &\leq 0 \\ 3x_3^2 - x_4 &\leq 0 \end{aligned} \tag{30}$$

其中, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i)^T$ 且 $\sigma_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$,我们取 $n =$

$$4, \sigma = (1, 2, \frac{1}{2}, 1)^T. A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0.5 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = (3, 5, 5,$$

10)^T。针对式(30)的问题,我们随机取 4 个初始点(可以不在可行域内): (3.5, -2.5, 0, 1), (2, 3, 1, 0), (0, 0, 0, 0), (2, 2, 2, 2)。此外,取 $\alpha = 0.01$ 。用 MATLAB 进行仿真实验,实验结果如图 1 所示。从图 1 可以看出,经过一段时间后, $x(t)$ 的轨迹逐渐收敛到同一点,而这一点就是伪凸优化问题式(30)的最优解 $x^* = (0.9, 3, 1.2, 4.8)^T$,说明神经网络(式(2))可以解决此类问题。为了更直观地显示它的优点,我们使用文献[27]中的神经网络模型同样对问题(式(30))进行仿真模拟,我们取初始点不在可行域内,实验结果如图 2 所示,状态解不能得到很好的收敛。与文献[27]中的神经网络相比,神

经网络(式(2))对初始点没有任何特殊的要求。

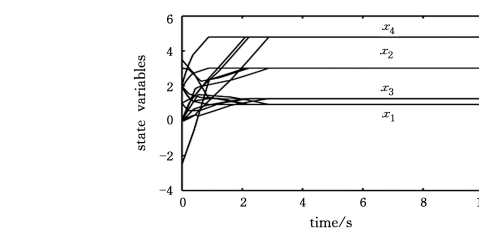


图 1 神经网络(式(2))解决问题(式(30))的解轨迹
Fig. 1 Trajectory of neural network (formula (2)) for problem (formula (30))

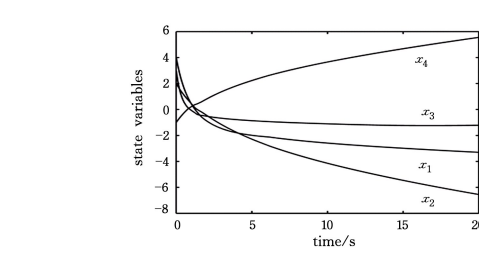


图 2 文献[27]中的神经网络解决问题(式(30))的解轨迹
Fig. 2 Trajectory of neural network in ref. [27] for problem (formula (30))

实验 2 非光滑非凸优化问题

$$\begin{aligned} \min f(x) &= |x_1 - x_2 - 2x_3 + 1| + |x_1 + 2x_2 - x_3 - 2| + \\ &\quad |x_1 + x_2 - 1| - |x_3 - 1| \\ \text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 &= 0, -1 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1 \end{aligned} \tag{31}$$

在式(31)中,目标函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是一个非光滑非凸函数,但是因为约束条件的存在,使它在可行域内是凸函数,因此本文提出的神经网络模型是可以解决这类问题的。我们任意取了 4 个初始点 (0.5, 1, -1), (2, 0, 1), (-2, 1.5, 1), (0, 0, 0)。经过多次实验,本文取 $\alpha = 0.01$,最终结果如图 3 所示,从任意初始点出发的神经网络的状态解都会收敛,并且都收敛到式(31)的一个最优解 $x^* = (-0.5, 1, -0.5)^T$ 。文献[15]提出了一个相似的神经网络模型,我们取 $\hat{x} = (0, 0, 0)^T \in \text{int}(S_1) \cap S_2$,则 $\hat{g} = 1$,经过计算可以得出 $r = \sqrt{3}, l_f = 6.5$,根据以上数据按照文献[15]中的公式可以估算出 $\sigma = 11.26$,我们取 $\sigma = 5$ 进行模拟实验,结果如图 6 所示。由于惩罚参数不在限定的范围,状态解无法收敛到最优解。与此神经网络相比,本文所提出的神经网络(式(2))不需要提前计算惩罚参数,也不需要满足惩罚参数的条件,适用范围更广。

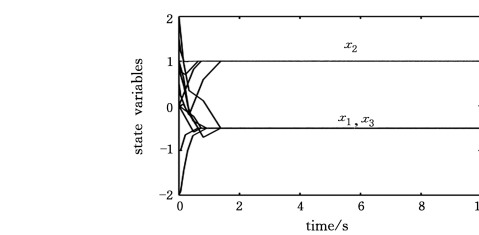


图 3 神经网络(式(2))解决问题(式(31))的解轨迹
Fig. 3 Trajectory of neural network (formula (2)) for problem (formula (31))

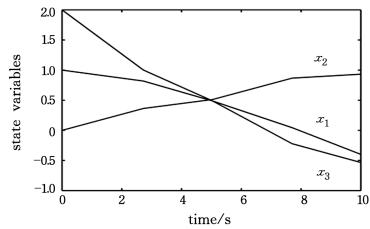


图 4 文献[15]中神经网络解决问题(式(31))的解轨迹
Fig. 4 Trajectory of neural network in ref. [15] for problem (fomula (31))

结束语 本文提出了一种新型的用来解一类决非光滑伪凸优化问题的神经网络模型,与已提出的模型相比,本文中的神经网络结构简单、不含惩罚参数,且对初始点的位置没有任何要求,极大地提高了该神经网络的适用范围以及使用效率。本文主要证明了状态解能够在有限时间内收敛到等式约束集、不等式约束集,状态解的有界性以及收敛到伪凸优化问题的最优解等重要理论。最后,通过数学模拟实验验证了本文所提出的理论的正确性,同时也给出了该神经网络模型所能解决的问题类型,验证了模型的有效性和实用性。

参 考 文 献

[1] TANK D W, HOPFIELD J J. Simple ‘neural’ optimization networks: An A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit [J]. IEEE Transaction Circuits System, 1986, 33(5): 533-541.

[2] KENNEDY M P, CHUA L O. Neural Networks for Nonlinear Programming[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. , 1988, 35(5): 554-562.

[3] GAO X B. A novel neural network for nonlinear convex programming[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2004, 15(3): 613-621.

[4] LIU Q, WANG J. A one-layer recurrent neural network with a discontinuous hard-limiting activation function for quadratic programming[J]. IEEE Trans. Neural Netw. , 2008, 19(4): 558-570.

[5] QIN S T, XUE X P. A two-layer recurrent neural network for nonsmooth convex optimization problems[J]. IEEE Trans. Neural Netw. and Learn. Syst. , 2015, 26(6): 1149-1160.

[6] LI Q, LIU Y, ZHU L. Neural network for nonsmooth pseudoconvex optimization with general constraints[J]. Neurocomputing, 2014, 131(131): 336-347.

[7] QIN S T, YANG X, XUE X P, et al. A one-Layer recurrent neural network for pseudoconvex optimization problems with equality and inequality constraints[J]. IEEE Trans. Cybern., 2017, 47(10): 3063-3074.

[8] BIAN W, MA L T, QIN S T, et al. Neural network for nonsmooth pseudconvex optimization with general convex constraints[J]. Neural Networks, 2018, 101: 1-14.

[9] AUBIN J P, FRANKOWSKA H. Set-Valued Analysis[M]. Berlin, Germany; Birkäuser, 1990: 1-39.

[10] CLARKE F. Optimization and Non-Smooth Analysis[M]. New

York; Wiley, 1983: 25-155.

[11] AUBIN J P, CELLINA A. Differential Inclusions[M]. Berlin, Germany; Springer-Verlag, 1984: 78-164.

[12] BETOUNES D. Differential Equations: Theory and Applications [M]. New York; Springer-Verlag, 2009: 100-203.

[13] FORTI M, NISTRI P, QUINCAMPOIX M. Generalized neural network for nonsmooth nonlinear programming problems[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems I Regular Papers, 2004, 51(9): 1741-1754.

[14] BIAN W, XUE X P. Subgradient-based neural networks for non-smooth convex optimization problems[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 2008, 55(8): 2378-2391.

[15] LIU Q, WANG J. A one-Layer recurrent neural network for constrained nonsmooth optimization[J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Part B, 2011, 41(5): 1323-1333.

[16] QIN S, FAN D, WU G, et al. Neural network for constrained nonsmooth optimization using Tikhonov regularization[J]. Neural Netw, 2015, 63(C): 272-281.

[17] LIU S, WANG J. A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTA application[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2006, 17(6): 1500.

[18] LI G C, SONG S J, WU C. Generalized gradient projection neural networks for nonsmooth optimization problems[J]. Science China (Information Sciences), 2010, 53(5): 990-1005.

[19] BIAN W, XUE X P. Neural network for solving constrained convex optimization problems with global attractivity[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 2013, 60(3): 710-723.

[20] BIAN W, XUE X P. Subgradient-based neural networks for non-smooth nonconvex optimization problems [J]. IEEE Trans. Nneural Netw. , 2009, 20(6): 1024-1038.

[21] WANG J. A deterministic annealing neural network for convex programming[J]. Neural Networks, 1994, 7(4): 629-641.

[22] GAO X, LIAO L Z. A new one-layer neural network for linear and quadratic programming[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2010, 21(6): 918.

[23] CHENG L, HOU Z G, LIN Y, et al. Recurrent neural network for non-smooth convex optimization problems with application to the identification of genetic regulatory networks[J]. IEEE Trans. Neural Netw. , 2011, 22(5): 714-726.

[24] HOSSENINI A. A non-penalty recurrent neural network for solving a class of constrained optimization problems[J]. Neural Networks, 2016, 73: 10-25.

[25] FORTI M, NISTRI P, QUINCAMPOIX M. Convergence of neural network for programming problems via a nonsmooth Lojasiewicz Inequality [J]. IEEE Trans. Neural Netw. , 2006, 17(6): 1471-1486.

[26] LIU Q S, GUO Z S, WANG J. A one-layer recurrent neural network for constrained pseudoconvex optimization and its application for dynamic portfolio optimization[J]. Neural Networks, 2011, 26: 99-109.

[27] BIAN W, XUE X P. Neural network for solving constrained convex optimization problems with global attractivity[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 2013, 60(3): 710-723.