

基于个体异质传染率及状态转移的 SIR 模型分析

瞿倩倩 韩 华

(武汉理工大学理学院 武汉 430070)

摘 要 针对染病个体具有不同传染率的现象,基于复杂网络中的基本 SIR 传染病模型,提出了一种具有两种传染率且存在转移概率的传染病模型。根据地方病平衡点的存在性,求出了基本再生数 R_0 。在此模型上,分析了随机免疫和目标免疫两种常见免疫策略。通过仿真模拟发现:在同等条件下, $R_0 > 1$ 时,疾病在异质网络中比在同质网络中传播速度更快,范围更广; $R_0 < 1$ 时,网络结构对疾病传播的影响不大。进一步研究得出:网络中初始染病节点度的越大,疾病传播速度越快且感染峰值越大;初始染病节点的接近度中心性越大,疾病传播速度越快且范围更广;点集聚系数对传播过程的影响不大;基本再生数 R_0 随转移概率的增大而减小,增大转移概率能有效减少疾病的传播;在平均免疫率相同的情况下,目标免疫比随机免疫更有效。

关键词 复杂网络,异质传染率,状态转移,基本再生数,免疫策略

中图分类号 TP391 文献标识码 A DOI 10.11896/jsjcx.181001974

Analysis of SIR Model Based on Individual Heterogeneous Infectivity and State Transition

QU Qian-qian HAN Hua

(School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

Abstract To explore the phenomenon of infected individuals with different infectious rates, based on the basic SIR epidemic model in complex networks, this paper proposed an epidemic model with two types of infections and probability of metastasis. Based on the existence of the equilibrium point of endemic diseases, it obtains the basic reproduction number R_0 . It analyzes two common immunization strategies: random immunization and target immunization. Simulation experiments show that under the same conditions, diseases spread faster and wider in heterogeneous networks than in homogeneous networks when $R_0 > 1$, and network structure has little influence on the spread of diseases when $R_0 < 1$. Further researches show that the greater the degree of initial infection nodes in the network, the faster the disease transmission speed and the greater the peak value; the greater the centrality of the proximity of the initial infected nodes, the faster and wider the disease spreads; the point aggregation coefficient has little effect on the transmission process; the basic reproduction number decreases with the increase of the transfer probability, and the increase of the transfer probability can effectively reduce the spread of disease; in the case of the same average immunity rate, the target immunity is more effective than random immunity.

Keywords Complex network, Heterogeneous infectivity, State transition, Basic reproduction number, Immunization strategy

传染病数学模型最早可追溯到 1927 年 Kermack 与 McKendrick 创立的“仓室模型”,直到今天仍然在流行病学中被广泛应用与推广,并不断发展^[1-2]。传染病动力学模型能够有效地分析并解释疾病流行的因素,并为疾病的防预、控制工作提供理论指导^[1]。最经典的传染病模型有 SIS^[3], SIR^[4] 和 SIRS 模型等。例如,在 SIR 模型中所有个体被分成 3 类: S-易感者(Susceptibles), I-染病者(Infectious), R-恢复者(Recovered)。染病者一旦恢复,就会获得终身免疫。传统传染病模型均假设群体是均匀混合的,个体间的接触机会均等。

然而,这种假设基于均匀混合的模型往往无法体现个体的异质性,相应的模型不太准确。不论是疾病、计算机病毒还是信息等,它们的传播和扩散均会受到网络拓扑结构的影响。复杂网络的兴起为传染病模型的构建提供了很好的工具,它能够更精确地描述传播过程^[5]。在复杂网络传染病模型中,网络中的节点代表个体,网络中的边代表两个个体之间存在接触。Cui 等^[6]详细介绍并举例说明了几类经典传染病模型中基本再生数的几种求解方法。Zhang 等^[7]提出了一种考虑部分免疫与失效免疫的 SISRS 病毒传播模型,其运用平均场理

收到日期:2018-10-23 返修日期:2019-04-18 本文受国家自然科学基金项目(71140015,71372135),国家自然科学基金青年科学基金项目(61303028),中央高校基本科研业务费专项基金项目(2015-zy-115)资助。

瞿倩倩(1993-),女,硕士生,主要研究方向为复杂网络传播动力学;韩 华(1975-),女,博士,教授,主要研究方向为复杂性分析与评价、经济控制与决策等,E-mail:hanhua@whut.edu.cn(通信作者)。

论求出了模型,推导出了流行阈值,并在 WS 小世界网络和 BA 无标度网络上进行仿真分析。Zhang 等^[8]考虑了复杂网络上具有直接免疫的 SIRS 传染病模型,分析了疾病流行阈值与两种免疫策略的效果。Shi 等^[9]研究了局部混合社交网络中具有自愿接种行为的疾病传播过程,并且分析了传染率、网络结构、网络平均度等因素对传播过程的影响。网络传染病模型大多围绕网络的拓扑结构、拓朴性质、免疫策略、基本再生数、流行阈值、平衡点的稳定性等展开研究。

然而,上述研究大多只注重事物的传播过程,对个体自身差异的内部因素考虑得相对较少。在这样的条件下开展上述研究,导致结果与现实人类行为的传播过程有一定的偏差。目前,大多网络传染病模型都是基于所有染病者的传染率相同(即同质传染率)的模型。但事实上,并非所有个体染病后的传染率都相同。个体差异,例如个体体质不同,患病后的心理状况不同,导致不同染病者的患病程度不同,因此传染率会有一定的差别(即异质传染率)。目前,复杂网络上关于异质传染率的传播模型的研究仍很少。最近,Yuan 等^[10]按照个体传染率的不同对染病者进行了分组,研究了复杂网络中具有异质传染率的 SIR 模型的稳定性,并对比分析了目标免疫与随机免疫两种免疫策略。Niu 等^[11]考虑僵尸网络中不同区域具有不同感染率,提出了一种具有异构感染率的网络传播模型,并求出了传播阈值。文献[12-13]中提出了一种考虑人口出生、死亡且具有异质传染率的网络传播模型,并计算了基本再生数。为了与实际情况更加吻合,对于一些具有较长传播周期的传染病,应考虑出生率、死亡率、迁移率以及其他导致人口变化的因素。Liu 等^[14]建立了网络中考虑人口出生与死亡的传染病模型,并且求出了疾病流行的阈值。Cao 等^[15]在异质网络中研究了带有出生率与死亡率的性传播模型。

现实生活中,个体染病后不仅传染率有所差别,在整个患病期间部分染病者的传染率也会随着自身行为意识的改变而发生变化。例如,染病者通过积极锻炼增强体质、积极配合治疗等方式减轻患病症状,自身的传染率也随之降低。基于上述分析,本文提出了一种复杂网络上具有两种传染率的 SIR 传染病模型,同时考虑了个体传染率的变化和人口的出生与自然死亡。此模型适用于流感、乙肝、肺结核等传染病。本文第 1 节分别在同质网络与异质网络上给出刻画模型的微分方程组;第 2 节由地方病平衡点的存在性求出疾病的基本再生数;第 3 节介绍两种预防疾病的免疫策略:随机免疫与目标免疫;第 4 节仿真分析网络结构、节点的度、接近度中心性以及集聚系数的大小对传播过程的影响,对疾病的基本再生数进行敏感性分析,并分别分析了随机免疫与目标免疫的效果;最后对结果进行分析与讨论。

1 传播机理与模型

模型中考虑人口出生与自然死亡,把人群中的个体抽象为节点,并根据人群所处状态的不同,将网络总节点 N 分为易感节点 S 、染病节点 I 、恢复节点 R 以及空节点 E 。根据个体差异导致染病个体传染率大小的不同,进一步将染病节点 I 分为 I_1 和 I_2 两类(假定第一类染病节点 I_1 的传染率 λ_1 大

于第二类染病节点 I_2 的传染率 λ_2)。易感节点与两类染病节点接触后均有可能被传染。假定所有易感节点的抵抗力相同且恒定不变,而部分染病者的传染率会发生变化。事实上,人的行为意识会发生变化,从而影响疾病的传播,因此,本文模型考虑了染病个体行为意识的变化。现实生活中,部分个体在染病后,行为意识可能发生以下变化:

- 1)与易感者保持一定的距离;
- 2)减少不良生活习惯;
- 3)积极锻炼增强体质;
- 4)主动寻求治疗等。

以上行为意识的变化均会降低个体自身的传染率。考虑第一类染病节点 I_1 通过自身行为意识的改变会降低自身的传染率,从而成为第二类染病节点。本文假设 I_1 转化为 I_2 的转移概率为 η 。两类染病节点分别以概率 γ_1 和 γ_2 转化为恢复节点。记出生率(一个空节点成为一个新的易感节点的概率)为 b ,自然死亡率为 μ ,则模型的传播机理如图 1 所示。

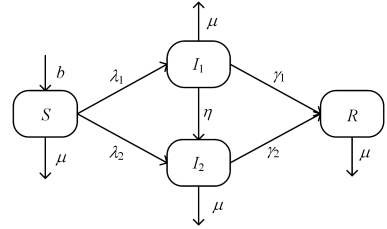


图 1 传播机理图

Fig. 1 Propagation mechanism diagram

1.1 同质网络中的传播模型

在同质网络中,易感节点、第一类和第二类染病节点、免疫节点和空节点的密度分别用 S, I_1, I_2, R 和 E 表示,根据图 1 传播规则,可以得到平均场方程为:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b(1 - S - I_1 - I_2 - R) - \langle k \rangle S \Theta - \mu S \\ \frac{dI_1}{dt} = \tau_1 \langle k \rangle S \Theta - \gamma_1 I_1 - \eta I_1 - \mu I_1 \\ \frac{dI_2}{dt} = \tau_2 \langle k \rangle S \Theta - \gamma_2 I_2 + \eta I_1 - \mu I_2 \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 - \mu R \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\langle k \rangle$ 为网络节点的平均度,即 $\langle k \rangle = \sum_k k p(k)$,这里 $p(k)$ 为节点的度分布; τ_1 和 τ_2 分别为新染病节点成为第一、二类染病节点的概率,且 $\tau_1 + \tau_2 = 1$; $(1 - S - I_1 - I_2 - R)$ 为空节点的密度; Θ 表示一个易感节点的一条边连接到染病节点并被传染的概率,故 Θ 的表达式为:

$$\Theta = \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 \quad (2)$$

令 $Q = S + I_1 + I_2 + R$,将系统(1)左右相加得:

$$\frac{dQ}{dt} = b - (b + \mu)Q \quad (3)$$

结合式(1)和式(3),可以得到系统(1)的极限系统:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = b(1 - Q^*) - k S \Theta - \mu S \\ \frac{dI_1}{dt} = \tau_1 k S \Theta - \gamma_1 I_1 - \eta I_1 - \mu I_1 \\ \frac{dI_2}{dt} = \tau_2 k S \Theta - \gamma_2 I_2 + \eta I_1 - \mu I_2 \end{cases} \quad (4)$$

其中, $Q^* = b/(b+\mu)$ 。下面将用系统(4)替代系统(1)进行进一步的研究。

1.2 异质网络中的传播模型

在异质网络中,根据个体与他人接触的网络中节点的度不同,对易感节点、两类染病节点和恢复节点进行再分类。 S_k 表示度为 k 的易感节点的密度, $I_{1,k}$ 和 $I_{2,k}$ 分别表示度为 k 的第一、二类染病节点的密度, R_k 表示度为 k 的恢复节点的密度, E_k 表示度为 k 的空节点的密度。根据图 1 传播规则,可以得到平均场方程为:

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{dt} = b(1 - S_k - I_{1,k} - I_{2,k} - R_k) - kS_k\Theta - \mu S_k \\ \frac{dI_{1,k}}{dt} = \tau_1 kS_k\Theta - \gamma_1 I_{1,k} - \eta I_{1,k} - \mu I_{1,k} \\ \frac{dI_{2,k}}{dt} = \tau_2 kS_k\Theta - \gamma_2 I_{2,k} + \eta I_{1,k} - \mu I_{2,k} \\ \frac{dR_k}{dt} = \gamma_1 I_{1,k} + \gamma_2 I_{2,k} - \mu R_k \end{cases} \quad (5)$$

其中, τ_1 和 τ_2 分别为新染病节点成为第一、二类染病节点的概率,且 $\tau_1 + \tau_2 = 1$; $(1 - S_k - I_{1,k} - I_{2,k} - R_k)$ 是度为 k 的空节点的密度; Θ 表示一个度为 k 的易感节点的一条边连接到染病节点并被传染的概率, $\Theta = \sum_k' p(k|k')(\lambda_1 I_{1,k'} + \lambda_2 I_{2,k'})$, $p(k'|k)$ 是一个度为 k 的节点连接到一个度为 k' 的节点的条件概率。本文考虑度无关联网络,则 Θ 的表达式如下:

$$\Theta = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k' p(k')(\lambda_1 I_{1,k'} + \lambda_2 I_{2,k'}) \quad (6)$$

令 $Q_k = S_k + I_{1,k} + I_{2,k} + R_k$, 将系统(5)左右分别相加,得:

$$\frac{dQ_k}{dt} = b - (b + \mu)Q_k \quad (7)$$

结合式(5)和式(7),可以得到系统(5)的极限系统:

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{dt} = b(1 - Q_k^*) - kS_k\Theta - \mu S_k \\ \frac{dI_{1,k}}{dt} = \tau_1 kS_k\Theta - \gamma_1 I_{1,k} - \eta I_{1,k} - \mu I_{1,k} \\ \frac{dI_{2,k}}{dt} = \tau_2 kS_k\Theta - \gamma_2 I_{2,k} + \eta I_{1,k} - \mu I_{2,k} \end{cases} \quad (8)$$

其中, $Q_k^* = b/(b+\mu)$ 。以下将用系统(8)替代系统(5)进行进一步的研究。

2 平衡点与基本再生数

在传染病动力学研究中,基本再生数是一个十分重要的概念。从流行病学的角度,它表示在无病平衡状态时,引入一个新的染病者,其在平均染病周期内所能传染的人数,一般用 R_0 表示,它是决定一种疾病是否流行的标志。从数学的角度, R_0 是一个阈值,它决定无病平衡点的稳定性,并且与疾病的最大感染比例以及染病者的最终规模有关。根据正平衡点的存在性可推导出基本再生数 R_0 的表达式^[6]。

因同质网络中每个节点的度近似等于网络的平均度,即 $k = \langle k \rangle$,故同质网络可看作异质网络的特例。仅以异质网络为例,推导基本再生数的表达式。为求解系统(8)的基本再生数,考虑稳态条件下的平衡解,即令 $dS_k/dt = 0$, $dI_{1,k}/dt = 0$ 和 $dI_{2,k}/dt = 0$,容易求出方程组(8)的无病平衡点为:

$$E^0(S_k^0, I_{1,k}^0, I_{2,k}^0) = \left(\frac{b}{b+\mu}, 0, 0 \right), k = 1, 2, \dots, n$$

即无病平衡点总存在。

下面考虑地方病平衡点的存在性,不妨设其为 $E^*(S^*, I_{1,k}^*, I_{2,k}^*)$,在模型(8)中令等式右边等于零,有:

$$\begin{cases} S_k^* = \frac{b\mu}{(k\Theta + \mu)(b + \mu)} \\ I_{1,k}^* = \frac{\tau_1 k b \mu \Theta}{(\gamma_1 + \eta + \mu)(k\Theta + \mu)(b + \mu)} \\ I_{2,k}^* = \frac{[\tau_1 \eta + \tau_2(\gamma_1 + \eta + \mu)] k b \mu \Theta}{(\gamma_2 + \mu)(\gamma_1 + \eta + \mu)(k\Theta + \mu)(b + \mu)} \end{cases} \quad (9)$$

从 Θ 的表达式(6)可以看出, $I_{1,k}$ 和 $I_{2,k}$ 的值取决于 Θ 。因此,将式(9)代入式(6)可得到关于 Θ 的自治方程:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k p(k) \left\{ \frac{\tau_1 \lambda_1 k b \mu \Theta}{(\gamma_1 + \eta + \mu)(k\Theta + \mu)(b + \mu)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_2 [\tau_1 \eta + \tau_2(\gamma_1 + \eta + \mu)] k b \mu \Theta}{(\gamma_2 + \mu)(\gamma_1 + \eta + \mu)(k\Theta + \mu)(b + \mu)} \right\} \\ &\equiv \mathcal{F}(\Theta) \end{aligned} \quad (10)$$

显然, $\Theta = 0$ 始终是该自治方程的一个平凡根,下面推导出自治方程存在唯一正根的条件。易证 $F''(\Theta) < 0$,则方程在 $\Theta \in (0, \lambda_1 + \lambda_2]$ 内存在唯一正根,当且仅当 $F(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \lambda_1 + \lambda_2$ 且 $\left. \frac{d\mathcal{F}(\Theta)}{d\Theta} \right|_{\Theta=0} > 1$ 。事实上:

$$\begin{aligned} F(\lambda_1 + \lambda_2) &= \left[\frac{\tau_1 \lambda_1 b \mu}{(\gamma_1 + \eta + \mu)(b + \mu)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda_2 [\tau_1 \eta + \tau_2(\gamma_1 + \eta + \mu)] b \mu}{(\gamma_2 + \mu)(\gamma_1 + \eta + \mu)(b + \mu)} \right] \cdot \\ &\quad \sum_k \frac{k^2 p(k)(\lambda_1 + \lambda_2)}{\langle k \rangle [k(\lambda_1 + \lambda_2) + \mu]} < \lambda_1 \tau_1 + \tau_2 \lambda_2 + \tau_1 \lambda_2 < \\ &\quad \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

则 $\mathcal{F}(\Theta) = 0$ 在 $(0, \lambda_1 + \lambda_2]$ 上有唯一正根的充分必要条件是当 $\Theta = 0$ 时,有:

$$\left. \frac{d(\Theta)}{d\Theta} \right|_{\Theta=0} = \frac{\langle k^2 \rangle b}{\langle k \rangle (b + \mu)(\gamma_1 + \eta + \mu)} [\tau_1 \lambda_1 + \frac{\tau_2 \lambda_2 (\gamma_1 + \mu) + \eta \lambda_2}{\gamma_2 + \mu}] > 1$$

从而求得异质网络中的基本再生数为:

$$R_0 = \frac{\langle k^2 \rangle b}{\langle k \rangle (b + \mu)(\gamma_1 + \eta + \mu)} \left[\tau_1 \lambda_1 + \frac{\tau_2 \lambda_2 (\gamma_1 + \mu) + \eta \lambda_2}{\gamma_2 + \mu} \right]$$

对于节点的每一个度 k ,根据系统(8)的第一个方程,有不等式 $\frac{dS_k}{dt} \leq b(1 - Q_k^*) - \mu S_k$,可以得到 $S_k \leq \frac{b}{b + \mu} = S_k^0$ 。将系统(8)中等式左右两边相加,得:

$$\begin{aligned} \frac{d(S_k + I_{1,k} + I_{2,k})}{dt} &= b(1 - Q_k^*) - (\gamma_1 I_{1,k} + \gamma_2 I_{2,k}) - \\ &\quad \mu(S_k + I_{1,k} + I_{2,k}) \\ &\leq \frac{b\mu}{b + \mu} - \mu(S_k + I_{1,k} + I_{2,k}) \end{aligned}$$

所以 $S_k + I_{1,k} + I_{2,k} \leq \frac{b}{b + \mu}$,系统(8)的解在如下非负有界区域 Γ 中。

$$\Gamma = \{(S_k, I_{1,k}, I_{2,k}) \in R^{3n} \mid S_k \leq \frac{b}{b + \mu} = S_k^0,$$

$$S_k + I_{1,k} + I_{2,k} \leq \frac{b}{b+\mu}, k=1,2,\dots,n$$

特别地,在度分布为 $p(k) \sim \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 的同质网络中,有

$$\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \approx \langle k \rangle, \text{因此同质网络中的基本再生数为:}$$

$$R_0 = \frac{\langle k \rangle b}{(b+\mu)(\gamma_1+\eta+\mu)} \left[\tau_1 \lambda_1 + \frac{\tau_2 \lambda_2 (\gamma_1 + \mu) + \eta \lambda_2}{\gamma_2 + \mu} \right]$$

同理可得系统(4)的解在如下非负有界区域 Γ 中。

$$\Gamma = \{ (S, I_1, I_2) \in R^{3n} \mid S \leq \frac{b}{b+\mu} = S^0, S + I_1 + I_2 \leq \frac{b}{b+\mu} \}$$

因此,在同质网络与异质网络中,当 $R_0 < 1$ 时,系统(4)与(8)均仅有一个无病平衡点 E^0 ; 当 $R_0 > 1$ 时,系统(4)与(8)除了 E^0 之外,区域 Γ 中还存在唯一的地方病平衡点 E^* 。

3 免疫策略

接种疫苗可以使易感者对病毒具有免疫能力,对疫苗可控制的疾病是非常有效的。这里我们分析两种最常见的免疫策略,即随机免疫与目标免疫,并在 BA 无标度网络^[16]上进行效果对比与分析。

3.1 随机免疫

随机免疫策略是最简单的免疫机制^[17-19],因本文根据个体传染率的不同大致将染病节点分为两大类,故用 σ_1 和 σ_2 分别表示第一、二类染病节点与易感节点之间的免疫率,且 $0 < \sigma_i < 1 (i=1,2)$ 。记 $\Theta_i = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k k p(k) I_{i,k} (i=1,2)$ 。系统(8)变为:

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{dt} = \frac{b\mu}{b+\mu} - kS_k \sum_i (1-\sigma_i) \lambda_i \Theta_i - \mu S_k \\ \frac{dI_{1,k}}{dt} = \tau_1 k S_k \sum_i (1-\sigma_i) \lambda_i \Theta_i - \gamma_1 I_{1,k} - \eta I_{1,k} - \mu I_{1,k}, i=1,2 \\ \frac{dI_{2,k}}{dt} = \tau_2 k S_k \sum_i (1-\sigma_i) \lambda_i \Theta_i - \gamma_2 I_{2,k} + \eta I_{1,k} - \mu I_{2,k}, \end{cases} \quad (11)$$

进而可以计算出系统(11)的基本再生数:

$$\hat{R}_0 = \frac{\langle k^2 \rangle b}{\langle k \rangle (b+\mu)(\gamma_1+\eta+\mu)} \left[(1-\sigma_1) \tau_1 \lambda_1 + (1-\sigma_2) \frac{\tau_2 \lambda_2 (\gamma_1 + \mu) + \eta \lambda_2}{\gamma_2 + \mu} \right] \quad (12)$$

比较 \hat{R}_0 与 R_0 的表达式可以发现:当 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, 即无免疫时,有 $\hat{R}_0 = R_0$; 当 $0 < \sigma_2 < 1$ 时,有 $\hat{R}_0 < R_0$, 即免疫措施是有效的; 当 $\sigma_1 \rightarrow 1$ 且 $\sigma_2 \rightarrow 1$, 即完全免疫时,有 $\hat{R}_0 \rightarrow 0$, 此时疾病不会在网络中传播。

3.2 目标免疫

另一种有效的免疫措施是目标免疫^[17,19],它是对度较大的节点即传播疾病概率较大的节点进行免疫。在网络中,引入节点连接度的截断值 κ_1 与 κ_2 , 如果 $k > \kappa_2$, 则对度为 k 的所有节点进行免疫; 如果 $\kappa_1 < k \leq \kappa_2$, 则按照比例 c_k 对度为 k 的节点进行免疫,即定义易感节点与第 i 类染病节点接触时的免疫率为^[10]:

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 1, & k > \kappa_2 \\ c_{i,k}, & \kappa_1 < k \leq \kappa_2, i=1,2 \\ 0, & k \leq \kappa_1 \end{cases}$$

记 $\bar{\delta}_i (\bar{\delta}_i = \sum_k \delta_{i,k} p(k))$ 为平均免疫率,则系统(8)变为:

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{dt} = \frac{b\mu}{b+\mu} - kS_k \sum_i \lambda_i (1-\delta_{i,k}) \Theta_i - \mu S_k \\ \frac{dI_{1,k}}{dt} = \tau_1 k S_k \sum_i \lambda_i (1-\delta_{i,k}) \Theta_i - \gamma_1 I_{1,k} - \eta I_{1,k} - \mu I_{1,k}, \\ \frac{dI_{2,k}}{dt} = \tau_2 k S_k \sum_i \lambda_i (1-\delta_{i,k}) \Theta_i - \gamma_2 I_{2,k} + \eta I_{1,k} - \mu I_{2,k} \end{cases} \quad (13)$$

同理,可以算出系统(13)的基本再生数为:

$$\tilde{R}_0 = \frac{b}{\langle k \rangle (b+\mu)(\gamma_1+\eta+\mu)} \left[\langle k^2 (1-\bar{\delta}_{1,k}) \rangle \tau_1 \lambda_1 + \langle k^2 (1-\bar{\delta}_{2,k}) \rangle \cdot \frac{\tau_2 \lambda_2 (\gamma_1 + \mu) + \eta \lambda_2}{\gamma_2 + \mu} \right] \quad (14)$$

注意: $\langle k^2 (1-\bar{\delta}_{i,k}) \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k^2 \bar{\delta}_{i,k} \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle \langle k^2 \rangle \bar{\delta}_i + \delta_i' \rangle = \langle k^2 \rangle (1-\bar{\delta}_i) - \delta_i'$, 其中 $\delta_i' = \langle (\delta_{i,k} - \bar{\delta}_i) (k^2 - \langle k^2 \rangle) \rangle$ 是 $\delta_{i,k}$ 和 k^2 的协方差,除去一些 k 使得 $\delta_{i,k} = \bar{\delta}_i$ 或 $k^2 = \langle k^2 \rangle$, 存在适当的 k 使得 $\delta_{i,k} - \bar{\delta}_i$ 与 $k^2 - \langle k^2 \rangle$ 有相同的符号,所以 $\delta_i' > 0$ 。如果令 $\sigma_i = \bar{\delta}_i$, 则 $\tilde{R}_0 < \hat{R}_0$, 这说明在平均免疫率相同的情况下,目标免疫比随机免疫更有效。

4 仿真模拟与敏感性分析

4.1 网络结构对传播的影响

基于上述分析,分别讨论基本再生数 $R_0 > 1$ 和 $R_0 < 1$ 时,疾病在两种网络中的传播情况。本文主要在小世界网络和无标度网络两种网络中研究该模型的传播规律,两种网络分别采用 WS 模型和 BA 模型的生成算法^[20],为便于仿真模拟,生成的最终规模均取 $N=1000$ 。

在 WS 小世界网络^[21]中,每次随机化重连的概率为 0.3, 节点的平均度 $\langle k \rangle = 4$, $\langle k^2 \rangle = 16.992$, 度分布函数 $p(k)$ 如图 2(a) 所示; 在 BA 无标度网络中,选取的初始节点数为 2 且构成完全图,每次引入新节点时新生成的边数为 $m=2$, 它的度分布函数 $p(k)$ 如图 2(b) 所示, $p'(k) = (\eta-1) \rho^{\eta-1} k^{-\eta}$, 当 $\rho=2, \eta=3$ 时,从图 2(b) 可以看出 $p(k) \sim p'(k)$, 计算其平均度 $\langle k \rangle = 3.972, \langle k^2 \rangle = 45.318$ 。

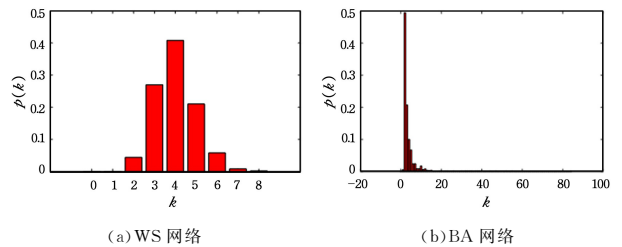


图2 网络中节点度的概率分布图

Fig. 2 Probability distribution graph of node degrees in networks

4.1.1 $R_0 > 1$ 的仿真分析

参数取值为: $b=0.4, \mu=0.04, \tau_1=0.6, \tau_2=0.4, \lambda_1=0.2, \lambda_2=0.1, \gamma_1=0.05, \gamma_2=0.06, \eta=0.4$ 。分别计算出同质网络中的基本再生数 $R_0=4.126$, 异质网络中的基本再生数 $R_0=11.769$ 。取初始值: 易感节点的初始比例为 0.9, 两类染病节点的初始比例均为 0.001, 恢复节点的初始比例为 0。选

取度大的节点为初始染病节点, 在相同条件下重复实验 500 次, 结果取平均值, 具体传播过程及结果如图 3 所示。

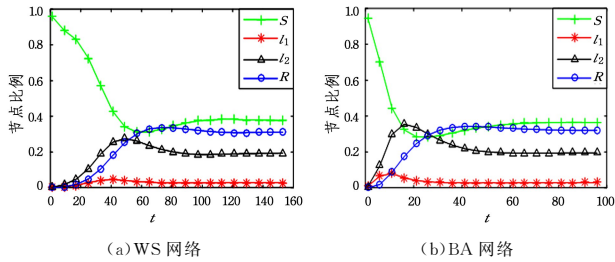


图 3 $R_0 > 1$ 时, 各类节点比例随时间的变化

Fig. 3 Ratio of all nodes varies with time when $R_0 > 1$

由图 3 可以看出, 当 $R_0 > 1$ 时, 在两种网络中, 疾病始终都会存在, 永不消亡, 即存在唯一的地方病平衡点。在整个传染过程中, 染病个体的数量在初始阶段增长较为缓慢, 之后在某个时间步迅速增加至峰值, 而后又缓慢下降, 峰值的大小在一定程度上代表了传染病最终的影响力。在时间步依次为 40 和 8 时, WS 网络和 BA 网络上的第一类染病节点的数量达到最大, 分别为 46 和 84, 染病比例分别为 4.6% 和 8.4%。在时间步依次为 49 和 16 时, WS 网络和 BA 网络上的第二类染病节点的数量达到最大, 分别为 275 和 355, 染病比例分别为 27.5% 和 35.5%。

因此, 在同等条件下, 传播行为在异质网络中比在同质网络中传播达到峰值所需时间更短, 传播速度更快, 范围更广, 这是因为无标度网络中存在度比较大的核心节点, 一旦这些节点被传染, 其传播速度就会明显加快。同时, 因无标度网络的异质性(各节点之间的连接状况具有严重的不均匀分布性: 网络中少数被称为 Hub 点的节点拥有极其多的连接, 而大多数节点只有很少量的连接)更大, 进一步得出, 网络异质性越大越有利于传染病的传播。

4.1.2 $R_0 < 1$ 的仿真分析

参数取值为 $b = 0.4, \mu = 0.04, \tau_1 = 0.6, \tau_2 = 0.4, \lambda_1 = 0.02, \lambda_2 = 0.01, \gamma_1 = 0.12, \gamma_2 = 0.14, \eta = 0.1$, 此时同质网络中的基本再生数 $R_0 = 0.295$, 异质网络中的基本再生数 $R_0 = 0.842$ 取初始值: 易感节点的初始比例为 0.3, 两类染病节点的初始比例均为 0.3, 恢复节点的初始比例为 0。随机选取各类节点的初始节点, 在相同条件下重复实验 500 次, 结果取平均值。具体传播过程及结果如图 4 所示。

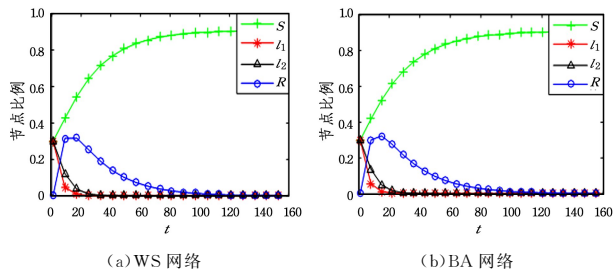


图 4 $R_0 < 1$ 时, 各类节点比例随时间的变化

Fig. 4 Ratio of all nodes varies with time when $R_0 < 1$

图 4 验证了: 当 $R_0 < 1$ 时, 在同质网络和异质网络中, 尽管初始染病个体比例很大, 但是疾病最终仍会消失, 即只存在一个无病平衡点。对比图 4(a) 和 4(b) 发现, 基本再生数小于

1 时, 疾病在两种网络中的传播(消亡)过程基本一致, 与网络结构关系不大。这主要是因为疾病在消亡过程中不依赖于网络结构。

图 3 和图 4 的研究结果表明, 网络结构的不同对疾病扩散($R_0 > 1$)与疾病消亡($R_0 < 1$)过程均有影响。由于研究疾病的传播规律和内在影响因素主要是为了有效地防控疾病的迅速蔓延, 因此以下仅针对疾病扩散过程($R_0 > 1$), 进一步研究网络中初始染病节点的特征对传播过程的影响。

4.2 网络节点特征对传播的影响

网络节点的特征有许多, 例如节点的度、集聚系数、介数、中心性、核度等, 它们从不同角度反映了节点在网络中的重要性及影响力^[20]。为了分析网络中节点特征(人群中个体的特征)对传播过程的影响, 以下分别选取节点的几种不同特征在 BA 无标度网络上进行仿真分析。

4.2.1 节点度大小对传播的影响

为了探究节点度大小对传播的影响, 在 BA 无标度网络上集中分析初始节点度大小对传播过程的影响。分别选取网络中度最小($k=1$)的两个节点与度最大($k=55$ 和 $k=84$)的两个节点作为初始染病节点, 其余参数取值同图 3, 重复实验 500 次并取平均值, 结果如图 5 所示。

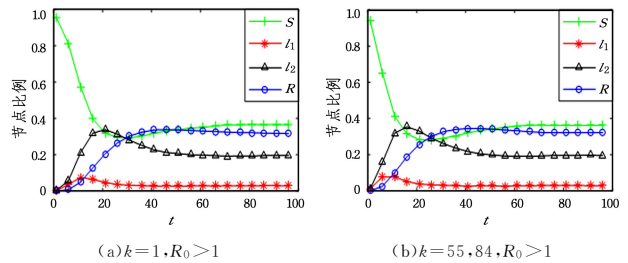


图 5 初始节点度大小对各类节点比例的影响

Fig. 5 Influence of initial node degree size on the proportion of various nodes

通过仿真结果发现, 在 BA 无标度网络中, 初始节点度大小会影响传播过程, 初始染病节点的度越大, 疾病传播的速度越快, 感染峰值越大, 且度大的节点更容易被传染。实验结果说明了无标度网络的拓扑结构特征有利于疾病的迅速传播, 这也与文献[22]的结论相吻合。

4.2.2 节点接近度中心性大小对传播的影响

分别选取网络中接近度中心性最小($C_c=0.19$)的两个节点与最大($C_c=0.40$)的两个节点作为初始染病节点, 其余参数取值同图 3, 重复实验 500 次并取平均值, 结果如图 6 所示。

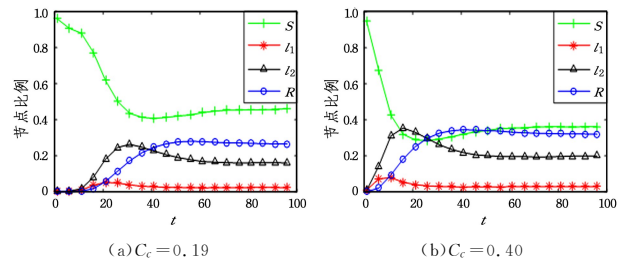


图 6 初始节点中心性大小对各类节点比例的影响

Fig. 6 Influence of initial node centrality size on the proportion of various nodes

对比图 6(a)和 6(b)的结果可以看出:初始染病节点中心性越大,则疾病传播速度越快,范围越广,且感染峰值越大。这主要是因为节点的接近度中心性越大,表明节点越靠近网络的中心,当靠近网络中心的节点被感染时,疾病更容易快速传播至整个网络。综合图 5 和图 6 可知,在 BA 无标度网络中,节点的度和接近度中心性的大小对传播过程的影响一致。

4.2.3 节点集聚系数大小对传播的影响

分别选取网络中点集聚系数(C)最小的两个节点与最大的两个节点作为初始染病节点,其余参数取值同图 3,实验重复进行 500 次并取平均值,结果如图 7 所示。

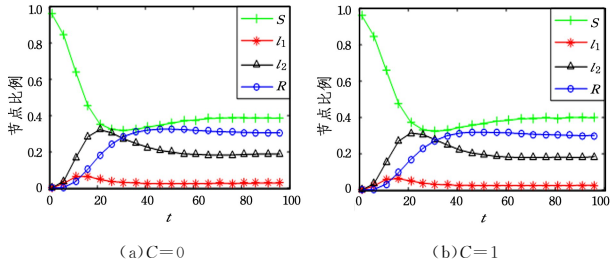


图 7 初始节点集聚系数大小对各类节点比例的影响
Fig. 7 Influence of initial node aggregation coefficient size on proportion of various nodes

从图 7 可以发现:在 BA 无标度网络中,初始染病节点的集聚系数大小对疾病传播过程的影响不大。这主要是因为点集聚系数一般用来刻画网络的局域结构性质,点集聚系数越大说明该节点的邻居节点有连边的可能性越大^[16],但不能准确反映该节点在全局网络中的重要性。

4.3 基本再生数的敏感性分析

对 BA 无标度网络中基本再生数的敏感性进行分析,如图 8 所示。

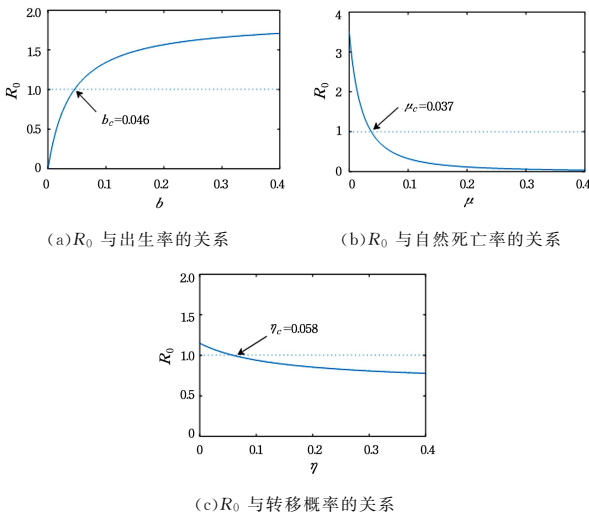


图 8 基本再生数的敏感性分析
Fig. 8 Sensitivity analysis of basic reproduction numbers

图 8(a)中的参数取值为 $\mu=0.04, \eta=0.1, \tau_1=0.6, \tau_2=0.4, \lambda_1=0.02, \lambda_2=0.01, \gamma_1=0.03, \gamma_2=0.04$ 。 $R_0=1$ 时,出生率的临界值 $b_c=0.046$,图 8(a)显示 R_0 随 b 的增大而增大。图 8(b)中 $b=0.04$,其余参数取值同图 8(a), $R_0=1$ 时,自然

死亡率的临界值 $\mu_c=0.037$;图 8(b)显示 R_0 随 μ 的增大而减小;图 8(c)中 $b=0.04, \gamma_1=0.1, \gamma_2=0.12$,其余参数取值同图 8(a), $R_0=1$ 时转移概率的临界值 $\eta_c=0.058$,图 8(c)显示 R_0 随 η 的增大而减小,因此增大 η 的值能有效地减少疾病的传播。建议相关部门采取相应措施,通过促进第一类传播者转化为第二类传播者来有效控制疾病的蔓延。例如:1)号召广大群众积极锻炼、强身健体、提高免疫力;2)呼吁人们减少生活中的不健康习惯;3)教育患病者及时、主动地寻求治疗等。

4.4 免疫效果分析

前面已经计算了两种免疫方案的基本再生数;为了揭示免疫参数对传播过程的影响,从而得出最佳的疾病控制方案,下面利用 Matlab 软件分别画出两种免疫方案的基本再生数随参数 σ_1 和 σ_2 与 κ_2 和 δ 变化的曲面图。

图 9(a)中的参数取值为 $b=0.4, \mu=0.04, \tau_1=0.6, \tau_2=0.4, \eta=0.1, \lambda_1=0.02, \lambda_2=0.01, \gamma_1=0.04, \gamma_2=0.05$ 。从图中可以看出免疫率参数 σ_1 和 σ_2 对随机免疫下的基本再生数 \hat{R}_0 的影响是相同的,增大 σ_1 或 σ_2 都有利于控制疾病。图 9(b)的参数取值为 $\gamma_1=0.03, \gamma_2=0.05, \kappa_1=10, \delta_{i,k}=\delta(i=1, 2)$,其余参数取值同图 9(a),在 BA 无标度网络上进行仿真。图 9(b)显示目标免疫下的基本再生数 \tilde{R}_0 随 κ_2 的增大而增大,随 δ 的增大而减小。如果 δ 很大或者 κ_2 很小,会有更多的人接种疫苗,疾病最终会被控制住而不会传播开来。

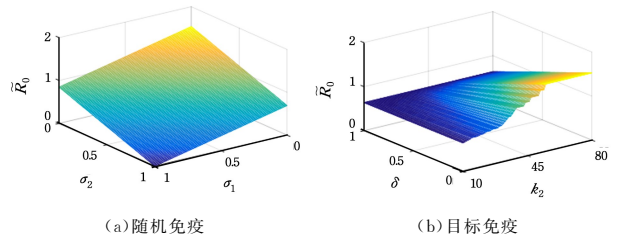


图 9 两种免疫策略的 R_0 随参数值的变化
Fig. 9 Changes in the parameters of two immune strategies

结束语 本文分析了复杂网络上具有两种传染率且考虑两种传染率之间的转化的 SIR 传染病模型,同时将人口出生与自然死亡考虑在内。此模型适用于流感、乙肝、肺结核等传染病。通过理论分析,推导了基本再生数 R_0 的表达式。结果表明,当 $R_0 < 1$ 时,本文模型只有一个无病平衡点;当 $R_0 > 1$ 时,除了有一个无病平衡点外,还有唯一的地方病平衡点。在同质网络和异质网络上分别进行仿真,在 BA 无标度网络上进一步分析了影响传播的相关因素。结果发现,网络的拓扑结构对传播起到了关键作用,在异质网络中传播达到峰值所需时间更短,传播速度更快,而且范围更广;网络结构对疾病的消亡过程影响不大。进一步研究发现,初始染病节点度的大小也会影响传播,疾病在度大的节点之间传播得更快,感染峰值更大;初始染病节点的接近度中心性越大,疾病传播越快,范围越广;初始染病节点集聚系数的大小对传播过程影响不大。另外,分析了随机免疫与目标免疫两种免疫策略的效果:1)在平均免疫率相同的情况下,目标免疫比随机免疫更有效;2)免疫率参数 σ_1 和 σ_2 对免疫效果的作用相同;3)增大 δ

或减小 κ_2 , 会有更多的人接种疫苗, 疾病最终会被控制住。

本文仍有亟待改进的地方: 如果能将因病死亡率考虑在模型之中, 则模型可适用于 HIV 和 AIDS 等因病死亡率较大的传染病; 有些传染病会再次感染, 本文模型没有充分考虑。未来将重点研究上述问题。

参 考 文 献

- [1] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [2] DIEKMANN O, HEESTERBEEK J A P. Mathematical epidemiology of infectious diseases: model building, analysis, and interpretation [M]. New York: Wiley, 2000.
- [3] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. A seminal contribution to the mathematical theory of epidemics [J]. Proc R Soc A, 1927, 115: 700.
- [4] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Tests for randomness in a series of numerical observations [J]. Proc R Soc E, 1938, 138: 55.
- [5] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 网络科学导论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [6] CUI M Y, CHEN S S, FU X C. Computation of Basic Reproduction Numbers in Several Infectious Disease Models [J]. Complex Systems and Complexity Sciences, 2017, 14(4): 14-31. (in Chinese)
崔美玉, 陈姗姗, 傅新楚. 几类传染病模型中基本再生数的计算 [J]. 复杂系统与复杂性科学, 2017, 14(4): 14-31.
- [7] ZHANG X, WU J, ZHAO P, et al. Epidemic spreading on a complex network with partial immunization [J]. Soft Computing, 2017, 22(14): 4525-4533.
- [8] ZHANG F, WU Q C, ZENG G H. SIRS epidemic model analysis with general direct immunity on networks [J]. Complex Systems and Complexity Sciences, 2017, 14(1): 81-87. (in Chinese)
张斐, 吴庆初, 曾广洪. 网络上具有一般直接免疫的 SIRS 传染病模型分析 [J]. 复杂系统与复杂性科学, 2017, 14(1): 81-87.
- [9] SHI B Y, QIU H J, NIU W F, et al. Voluntary Vaccination through Self-organizing Behaviors on Locally-mixed Social Networks [J]. Scientific Reports, 2017, 7(1): 2665.
- [10] YUAN X P, WANG F, XUE Y K, et al. Global stability of an SIR model with differential infectivity on complex networks [J]. Physica A, 2018, (499): 443-456.
- [11] NIU W N, ZHANG X S, YANG G W, et al. Botnet modeling and analysis with heterogeneous infection rate [J]. Computer Science, 2018, 45(7): 135-138. (in Chinese)
牛伟纳, 张小松, 杨国武, 等. 具有异构感染率的僵尸网络建模与分析 [J]. 计算机科学, 2018, 45(7): 135-138.
- [12] ZHANG H F, SMALL M, FU X C. Different Epidemic Models on Complex Networks [J]. Communications in Theoretical Physics, 2009, 52(7): 180-184.
- [13] FU X C, LIU Z R, SMALL M. Epidemic Propagation Dynamics on Complex Networks [M]. Beijing: Higher Education Press, 2014.
- [14] LIU J Z, TANG Y F, YANG Z R. The spread of disease with birth and death on networks [J]. Journal of Statistical Mechanics Theory & Experiment, 2004(8): P08008.
- [15] CAO J D, WANG Y, ALSAEDI A, et al. The spreading dynamics of sexually transmitted diseases with birth and death on heterogeneous networks [J]. Journal of Statistical Mechanics Theory & Experiment, 2017, 2(2): 023502.
- [16] BARABASI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks [J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512.
- [17] FU X C, SMALL M, WALKER D M, et al. Epidemic dynamics on scale-free networks with piecewise linear infectivity and immunization [J]. Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics, 2008, 77(2): 036113.
- [18] WANG Y, JIN Z. Global analysis of multiple routes of disease transmission on heterogeneous networks [J]. Physica A Statistical Mechanics & Its Applications, 2013, 392(18): 3869-3880.
- [19] YUAN X P, XUE Y K, LIU M X. Dynamic analysis of a sexually transmitted disease model on complex networks [J]. Chinese Physics B, 2013, 22(3): 85-91.
- [20] 郭世泽, 陆哲明. 复杂网络基础理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [21] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks [J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442.
- [22] WANG C C, CHEN C, DONG Z Q. The influence of network structure on rumor spreading [J]. Journal of Systems Simulation, 2013, 25(1): 127-131. (in Chinese)
王长春, 陈超, 董志强. 网络结构对谣言传播的影响 [J]. 系统仿真学报, 2013, 25(1): 127-131.