

基于无偏线性最优估计的 PET 图像重建



王宏霞 徐英婕 赵云波 张文安

浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023

摘要 正电子发射断层成像(Positron Emission Tomography,PET)技术在实体肿瘤的定性诊断和病灶转移的检查中具有举足轻重的作用,因此非常有必要提高PET的成像质量。然而,已有的迭代重建算法基本上都严重依赖于PET的线性模型。考虑到探测器效率、探测系统的几何尺寸、生物组织对光子的衰减以及散射效应等诸多物理因素,该模型无法真实地刻画示踪剂与正弦图数据之间的复杂关系。文中首先提出了一种新的观测模型,通过在原来的线性模型中引入未知输入项来刻画示踪剂与正弦图数据之间的关系。该项由两部分组成:1)系数矩阵,用于进一步描述投影的线性部分;2)未知输入,用于刻画示踪剂的浓度分布和投影数据之间的一些非线性关系。在此新模型的基础上,PET图像重构问题被转化成一个线性无偏的最优估计问题。然后,给出了具有待定增益的线性迭代估计模型,通过将正弦数据向未知输入项的系数矩阵的零空间零域上进行投影,消除了未知输入给线性最优估计带来的困难,借助卡尔曼滤波的设计思路,推导出了前述的估计增益。基于此估计模型,提出了一种基于无偏线性最优估计的重建算法。最后,通过仿真实验,将所提重建算法与期望极大估计算法(Expectation-Maximization reconstruction,EM)、核化的EM算法(Kernel method,KEM)以及基于标准卡尔曼滤波(Kalman Filtering method,KF)的重建算法从均方误差(Mean Square Error,MSE)、信噪比(Signal-Noise-Rate,SNR)两个方面进行了比较。实验结果表明:与其他3种算法相比,所提算法重建的图像具有更大的信噪比、更小的均方误差,视觉上更加清晰,更好地重建了肿瘤的形状和尺寸,因此具有更好的重构质量。

关键词:最优估计;未知输入;无偏估计;卡尔曼滤波

中图分类号 TP13

PET Image Reconstruction Based on Unbiased Linear Optimal Estimation

WANG Hong-xia, XU Ying-jie, ZHAO Yun-bo and ZHANG Wen-an

School of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China

Abstract Positron Emission Tomography (PET) plays an important role in qualitative diagnosis and metastasis of tumors. Therefore, it is very necessary to improve imaging quality of PET. However, most of the existing reconstruction algorithms rely heavily on the linear model of PET. Considering that PET is affected by many physical factors, such as detector efficiency, geometric size of detection system, attenuation of gamma photons by biological tissues and scattering effects, the linear model cannot match the nonlinear relationship between tracer concentration and sinogram. This paper proposed a new observation model to characterize the complicated relationship between the tracer concentration and sinogram by introducing an unknown input term. This term consists of two parts. One is a coefficient matrix, which further describes the linear part of the projection; the other is an unknown input, which characterizes the nonlinear relationship between the tracer concentration and the sinogram. Based on the new model, the PET image reconstruction is reformulated as a linear unbiased optimal estimation. Then, a linear and recursive relation with an unknown estimation gain is introduced, the difficulty induced by the unknown input term is solved by projecting sinogram onto the null space of the coefficient matrix of unknown input. Based on the design idea of Kalman filter, the estimation gain is derived. Finally, the Expectation-Maximization reconstruction (EM), the Kernel-based EM algorithm (KEM) and the Kalman Filtering method (KF) are compared with the proposed algorithm by calculating Mean Square Error (MSE) and Signal-Noise-Rate (SNR). The experiment results show that the proposed algorithm has larger SNR, smaller MSE as well as more clear reconstruct image, and reconstructs the size and shape of the tumor better than the others. Hence, the proposed algorithm of reconstruction has better quality to the others.

Keywords Optimal estimation, Unknown input, Unbiased estimation, Kalman filter

到稿日期:2018-12-16 返修日期:2019-03-22 本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。

基金项目:浙江省自然科学基金(LY18F030022,LR16F030005);国家自然科学基金(61673350)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LY18F030022,LR16F030005) and National Natural Science Foundation of China (61673350).

通信作者:王宏霞(whx1123@zjut.edu.cn)

1 引言

近年来,随着基因治疗在临床应用的发展,正电子发射断层成像(Positron Emission Tomography, PET)技术开始在肿瘤、心脏和神经性疾病中起到越来越重要的作用^[1]。它是继X线机、CT、MRI之后产生的又一极为重要的核医学分子影像技术^[2-3]。与CT和MRI这类解剖影像不同,PET作为一种功能性成像技术,其原理是向生物体注射标记了放射性同位核素的示踪剂,生物体器官或组织中的放射性核素极不稳定,容易发生衰变生成正电子并在组织和器官的周围环境中与自由电子发生湮灭反应,产生一对 γ 光子,这对 γ 光子的能量相等方向几乎相反。PET通过符合检测技术能捕获一些光子对生成投影数据,生成的投影数据称为正弦图^[4]。基于正弦图,通过重建算法可以重建感兴趣区域中的示踪剂的浓度分布。该浓度能够检测生物体内细胞的代谢情况,并在分子水平上反映生物体的生理或病理变化,为早期疾病的检测与预防提供有效的依据^[3]。

然而,由于通过PET获取的投影数据包含大量的噪声,并且示踪剂的浓度分布和正弦图之间的关系太复杂而无法准确描述,PET图像重建的质量仍有待提高^[5]。这是因为以滤波反投影法(Filtered Back-projection, FBP)^[6]为代表的解析法虽然计算速度快、成本低,但不能很好地抑制噪声而使得重建的图像有严重的伪影^[7]。迭代法能适应于不完全数据,使得重建图像的质量有所提高,但是这种有效性在很大程度上依赖于一个线性的观测模型^[8]。有学者提出了基于状态估计的迭代重建算法^[9-11],这类算法首先需要为示踪剂的浓度分布和PET的正弦图建立状态空间模型,然后利用状态空间的估计方法,如卡尔曼滤波算法、 H_∞ 滤波算法等成熟的算法来重构图像^[12]。近年来,随着机器学习理论的发展,该理论也被应用于PET图像重构^[13]。然而,该方法由于需要先验信息(如通过MRI先获取解剖信息)生成核函数,因此具有较高的成本^[13-17]。

目前几乎所有的迭代重建算法都严重依赖于示踪剂浓度分布、正弦图数据之间的线性关系和准确已知的投影矩阵。然而,实际情况中,受探测器效率、探测系统的几何尺寸、生物组织对 γ 光子的衰减以及发射源与探测器间的范围内的散射效应等因素^[18]的影响,几乎不可能得到完全准确的投影矩阵,因此有必要考虑投影矩阵的不确定性^[9,19]。为此,本文引入具有乘性噪声的状态空间模型,并基于此模型提出了估计误差最小的重构算法^[9],但由于乘性噪声的引入,重建算法的运算成本较高。因此,本文试图在原来的线性模型中引入一个未知输入项来描述PET的测量模型,进而找到一种具有无偏最小方差估计的重构算法,以改善PET重建图像的质量。

2 PET图像重建的问题描述

通常情况下,人们通过得到的正弦图数据,根据以下关系来重建感兴趣区域中的示踪剂的浓度分布^[12,20]:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{G}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\omega}_k \quad (1)$$

其中,正弦图数据 \mathbf{y}_k 是由 $y_{k,i}$ 堆叠的 m 维列向量; i 代表以探测器旋转角为序的对应投影角度下的探测器簇排列序号, $i=1, \dots, m$; m 表示各个投影角度下探测器簇排列的总数; $y_{k,i}$ 表

示 k 时刻PET的第 i 个探测器检测到的光子数; \mathbf{x}_k 是由 $x_{k,j}$ 堆叠的列向量; j 代表每个体素在图像中的排列序号, $j=1, \dots, n$; n 表示所有测量范围内的体素; $x_{k,j}$ 表示体素 j 中 k 时刻示踪剂的浓度分布; \mathbf{G}_k 被称为投影矩阵,它粗略刻画了测量区域示踪剂的浓度分布与 k 时刻的正弦图数据之间的关系; $\boldsymbol{\omega}_k$ 表示观察噪声,在某些统计迭代方法中被假设为泊松分布^[8],在基于 H_∞ 滤波的重建方法中被设定为能量有界噪声^[12],在基于最小二乘法或者卡尔曼滤波的重构方法中被假设为相互独立的具有给定协方差矩阵的零均值高斯随机向量^[12]。

事实上,如前文所述的多种物理因素的制约,正弦图数据实际上非线性地依赖于示踪剂的浓度^[13]。因此,若要获得更好的重构结果,式(1)中的观测方程可能不足以描述示踪剂浓度分布与正弦图数据之间的关系,一方面是因为不可能得到完全精确的投影矩阵,另一方面是因为单一的噪声模型并不能将PET中的实际噪声刻画清楚。为了解决这一问题,本文在观测方程(1)中引入了一个未知输入项 $\mathbf{Q}_k \mathbf{u}_k$,从而得到以下观测方程:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{G}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{Q}_k \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\omega}_k \quad (2)$$

其中,输入矩阵 \mathbf{Q}_k 已知,刻画了投影的线性部分。与文献^[19]不同,为了考虑各种情况的不确定性,此处对 \mathbf{Q}_k 不加任何限制。未知输入 \mathbf{u}_k 表示被干扰的示踪剂浓度分布。 $\boldsymbol{\omega}_k$ 仍然是一个相互独立的零均值高斯随机噪声,其噪声协方差阵为 \mathbf{R}_k 。

本文所研究的工作只考虑了静态PET图像的重建问题^[21],即示踪剂浓度不随时间变化,可表示为:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} \quad (3)$$

基于扫描数据式(2)与系统方程式(3),本文希望能够设计出满足以下条件的重建算法:1)易于执行;2)在平均意义下重建误差最小;3)重构结果与真实示踪剂浓度分布有相同的期望。

为此,我们将满足条件1)–3)的静态PET图像重建问题转化成估计问题:

$$\min_{\hat{\mathbf{x}}_k} E \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k\| \quad (4)$$

$$\text{s. t. 式(2)一式(3)} \quad (5)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}_k$ 代表基于 k 时刻及之前的所有观测信息得到的示踪剂浓度分布 \mathbf{x}_k 的估计值, E 表示取数学期望, $\|\cdot\|$ 代表欧几里德空间中的2-范数。

式(4)保证了条件2)的成立,为使所得的 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 同时满足条件1)和3),我们重述上述估计问题为:基于直到 k 时刻的观测信息,找到无偏、线性且满足性能指标式(4)的示踪剂的浓度分布估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 。

3 图像重建过程

基于观测方程(2)和系统方程(3),一个直接的估计示踪剂浓度分布 \mathbf{x}_k 的方法如下。

考虑如下递归方案:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{L}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{G}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (6)$$

其中, \mathbf{L}_k 是待确定的增益, $\hat{\mathbf{x}}_k$ 是 \mathbf{x}_k 的示踪剂浓度分布的估计值。

定义:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \quad (7)$$

则根据式(3)和式(6)可推得:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_k \mathbf{G}_k) \tilde{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{L}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{u}_k - \mathbf{L}_k \boldsymbol{\omega}_k \quad (8)$$

假设 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 是无偏的,根据式(8),为了保证 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 的无偏性, \mathbf{L}_k 需要满足:

$$\mathbf{L}_k \mathbf{Q}_k = 0 \quad (9)$$

令 $\mathbf{P}_k = E[\tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T]$, 则结合式(8)与式(9)可得:

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{L}_k \mathbf{G}_k) \mathbf{P}_{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{L}_k \mathbf{G}_k)^T + \mathbf{L}_k \mathbf{R}_k \mathbf{L}_k^T \quad (10)$$

至此,前述线性、无偏最小方差估计问题可转化成如下的受约束凸优化问题:

$$\min_{\mathbf{L}_k} Tr(\mathbf{P}_k) \quad (11)$$

$$\text{s. t. 式(9)} \quad (12)$$

利用拉格朗日乘子法求解上述问题可得:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_k & \frac{1}{2} \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{Q}_k^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_k^T \\ \mathbf{K}_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中, $\tilde{\mathbf{R}}_k = \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{G}_k^T + \mathbf{R}_k$ 。

由于本文伊始并未对 \mathbf{Q}_k 做任何限制,因此方程(13)的解的存在性、唯一性都很难判断。此刻,可以借助

$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_k & \frac{1}{2} \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{Q}_k^T & 0 \end{bmatrix}$ 的广义逆来求解增益矩阵 \mathbf{L}_k 。然而,求广义逆

需要的运算成本与矩阵本身的维度的三次方成正比。为了尽可能地降低运算成本,我们提出了一种更直观的想法:通过将观测数据投影到 \mathbf{Q}_k 的零域上来消除 \mathbf{u}_k 带来的高维矩阵求逆问题。记:

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{I} - \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^\dagger \quad (14)$$

直接的代数运算表明, \mathbf{T}_k 的值域是 \mathbf{Q}_k 的零域。将观测 \mathbf{y}_k 投影到 \mathbf{Q}_k 的零域上可得新的观测数据。

$$\bar{\mathbf{y}}_k = \bar{\mathbf{G}}_k \mathbf{x}_k + \bar{\boldsymbol{\omega}}_k \quad (15)$$

其中:

$$\bar{\mathbf{y}}_k = \mathbf{T}_k \mathbf{y}_k \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_k = \mathbf{T}_k \mathbf{G}_k \quad (17)$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_k = \mathbf{T}_k \boldsymbol{\omega}_k \quad (18)$$

此时,基于式(15)来求解无偏最小方差的示踪剂浓度 \mathbf{x}_k 的估计值问题,可以用卡尔曼滤波来求解,即:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \bar{\mathbf{L}}_k (\bar{\mathbf{y}}_k - \bar{\mathbf{G}}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (19)$$

$\bar{\mathbf{L}}_k$ 为滤波增益,表达式如下:

$$\bar{\mathbf{L}}_k = E[\tilde{\mathbf{x}}_{k-1} \bar{\mathbf{e}}_k^T] (E[\bar{\mathbf{e}}_k \bar{\mathbf{e}}_k^T])^{-1} \quad (20)$$

其中, $\bar{\mathbf{e}}_k$ 表示新息:

$$\bar{\mathbf{e}}_k = \bar{\mathbf{G}}_k \tilde{\mathbf{x}}_{k-1} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_k \quad (21)$$

根据式(3)与式(19),可推出:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{L}}_k \bar{\mathbf{G}}_k) \tilde{\mathbf{x}}_{k-1} - \bar{\mathbf{L}}_k \bar{\boldsymbol{\omega}}_k \quad (22)$$

沿用之前符号 \mathbf{P}_k 的物理意义,则有:

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{L}}_k \bar{\mathbf{G}}_k) \mathbf{P}_{k-1} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{L}}_k \bar{\mathbf{G}}_k)^T + \bar{\mathbf{L}}_k \bar{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{L}}_k^T \quad (23)$$

$$\mathbf{R} = E[\bar{\mathbf{e}}_k \bar{\mathbf{e}}_k^T] = \bar{\mathbf{G}}_k \mathbf{P}_{k-1} \bar{\mathbf{G}}_k^T + \mathbf{T}_k \mathbf{R}_k \mathbf{T}_k^T \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{L}}_k = \mathbf{P}_{k-1} \bar{\mathbf{G}}_k^T \bar{\mathbf{R}}_k^{-1} \quad (25)$$

注意,由于未对 \mathbf{Q}_k 做任何限制,投影后观测噪声的协方差阵有可能不可逆,因此式(25)使用了广义逆。与式(13)中的系数矩阵 $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_k & \frac{1}{2} \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{Q}_k^T & 0 \end{bmatrix}$ 相比, $\bar{\mathbf{R}}_k$ 的维数更低,因此求广义逆的代价也更低。

根据式(25),式(23)可以化简成:

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{k-1} \bar{\mathbf{G}}_k^T \bar{\mathbf{R}}_k^{-1} \bar{\mathbf{G}}_k) \mathbf{P}_{k-1} \quad (26)$$

通过上述推导过程, PET 图像重建的递归算法的步骤为:

1) 通过 $\hat{\mathbf{x}}_0 = E[\mathbf{x}_0]$ 和 $\mathbf{P}_0 = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]$ 设置初始值;

2) 通过以下方程对示踪剂的浓度分布进行估计:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_k \mathbf{G}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{G}_k^T \mathbf{T}_k^T + \mathbf{T}_k \mathbf{R}_k \mathbf{T}_k^T$$

$$\bar{\mathbf{L}}_k = \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{G}_k^T \mathbf{T}_k^T \bar{\mathbf{R}}_k^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \bar{\mathbf{L}}_k \mathbf{T}_k (\bar{\mathbf{y}}_k - \bar{\mathbf{G}}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{G}_k^T \mathbf{T}_k^T \bar{\mathbf{R}}_k^{-1} \mathbf{T}_k \mathbf{G}_k) \mathbf{P}_{k-1}$$

3) 重复步骤 2), 直到获取到合适的示踪剂的浓度分布估计值。

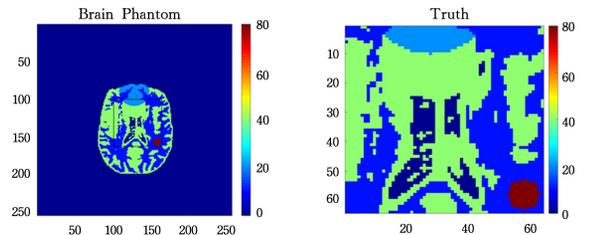
需要注意的是,与文献[19]中的算法相比,本文算法具有更广的适用范围。

4 实验仿真和数据比较

4.1 静态 PET 模拟装置

本节将通过实验来评估本文所提出的重建算法的性能。图 1(a)是一个大脑体模,它模拟了大脑的灰质和白质中的示踪剂的浓度分布情况。图 1(a)中的黑框区域是我们选中准备进行重建的区域,并将其放大显示在图 1(b)中。为了更好地评估本文所提出的算法,在选定区域内设计了一个肿瘤参数,如图 1(a)中的圆形区域所示。首先使用 Fessler 的 IRT matlab 工具箱对所选区域进行投影,生成无噪声的投影数据,然后在无噪声投影数据中加入 20% 的噪声来模拟随机符合和散射符合,最后将泊松噪声加入到该投影数据中,生成的正弦图数据 2,设定总符合事件计数值为 2×10^5 。

除了大脑体模外,本文中的所有图像均以 64×64 像素表示。实验中的所有代码都在 MATLAB R2016b 和具有 i7-6700 @ 2.60 GHz 2.59 GHz Intel Core CPU 和 8GB 内存的台式计算机中实现。



(a) 大脑体模

(b) 感兴趣区域

图 1 大脑体模和 ROI

Fig. 1 Brain phantom and ROI

4.2 不同重建方法的比较

为了定量比较不同的重建方法,我们计算了不同方法的

均方误差和信噪比。

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\hat{x}_{k,i} - x_{k,i})^2 = \frac{1}{n} \|\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k\|_2^2 \quad (27)$$

$$SNR = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{x}_{k,j}^2}{\sum_{i=1}^n (\hat{x}_{k,i} - x_{k,i})^2} = \frac{\|\hat{\mathbf{x}}_k\|_2^2}{\|\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k\|_2^2} \quad (28)$$

其中, $x_{k,j}$ 是体素 j 在 k 时刻的实际示踪剂的浓度分布, $\hat{x}_{k,j}$ 是相应体素 j 的示踪剂的浓度分布的估计值, 如前所述, n 是重建体素的总数。与前文的符号一致, \mathbf{x}_k 和 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 分别表示 k 时刻示踪剂在选中区域的真实浓度分布和其估计值。

我们将本文提出的基于无偏线性最优滤波 (Unknown-Input Filtering reconstruction, UF) 的重建算法与期望极大估计算法、核化的 EM 算法^[7] 以及基于标准卡尔曼滤波的重建算法进行了比较。基于 KF 和 UF 的重构算法迭代 2 次, 其他算法迭代 150 次。对用 EM 和 KEM 方法重建后的图像又进行了高斯滤波以提高重构图像的质量, KEM 的相邻像素取值范围为 7×7 。我们应用上述方法来重建大脑体模的选定区域。图 2 和图 3 对应于选中区域的示踪剂初始估计浓度分布分别为 $\hat{\mathbf{x}}_0 = 1$ 和 $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{r}$ 时重建的图像, 而当 $\hat{\mathbf{x}}_0 = 0$ 时, 因为 EM 和 KEM 都不能提供有效的重建图像, 所以没有给出对比图。其中 $1, 0$ 和 \mathbf{r} 均是长度为 4096 的向量, 它们的所有分量元素均为区间 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机数。

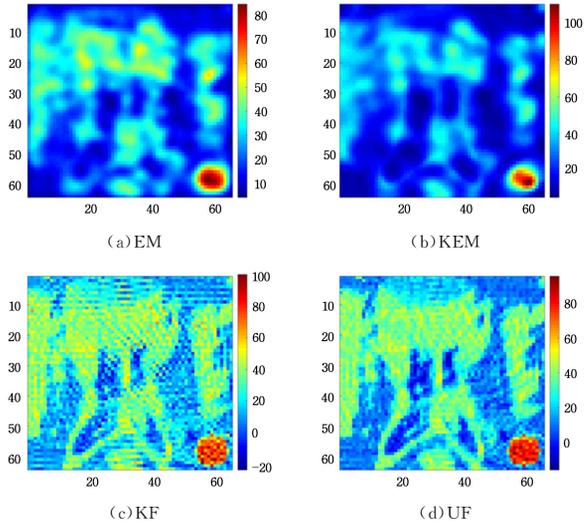


图 2 初始估计浓度为 1 时使用 EM, KEM, KF, UF 方法重建的大脑体模选中区域的图像

Fig. 2 Images of ROI reconstructed by EM, KEM, KF and UF methods when initial estimated concentration is 1

观察图 2 和图 3 不难发现: 与其他方法的重建图像相比, 基于 UF 算法的重建图像质量更好, 这是因为 UF 算法可以更好地重建出图像的边缘和细节。需要注意的是, 当示踪剂浓度的初始估计为 0 时, EM 和 KEM 都不能提供有效的重建图像, 此时的 UF 和 KF 算法则能够很好地重建出选中区域的图像并检测出肿瘤的形状和尺寸; 而当示踪剂浓度分布的初始估计值为 1 或 \mathbf{r} 时, 尽管所有的方法都检测到了肿瘤, 但 UF 和 KF 算法更好地重建了肿瘤的形状和尺寸, 这对临床的脑肿瘤诊断更有参考价值。不仅如此, 本文可以看到 UF 算法重建出的图像在视觉上可以更明显地看出示踪剂的浓度分

布情况。

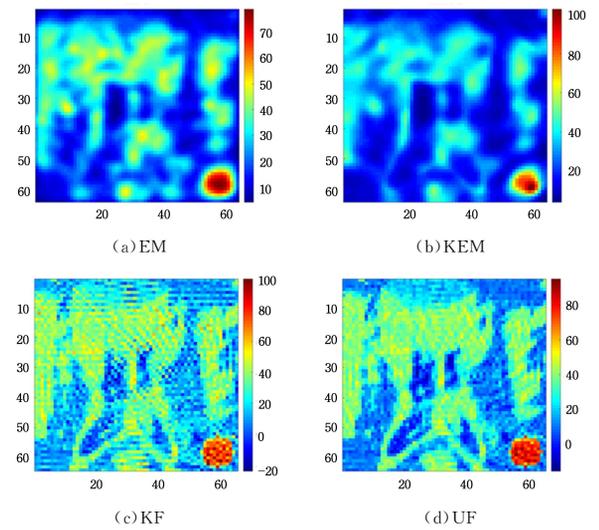


图 3 初始估计浓度为 \mathbf{r} 时, 利用 EM, KEM, KF, UF 方法重建的大脑体模选中区域的图像

Fig. 3 Images of ROI reconstructed by EM, KEM, KF and UF methods when initial estimated concentration is \mathbf{r}

为了定量地比较 4 种重构算法, 本文计算了各种方法重建出的图像的 SNR 和 MSE。当初估计分别为 $\hat{\mathbf{x}}_0 = 0, 1, \mathbf{r}$ 时, 如表 1 所列, 提出的重建算法的 MSE 最小并且 SNR 最大, 这表明本文的重建算法重建的图像质量优于其他重建方法。

表 1 不同初始估计下不同方法的比较

Table 1 Comparison of different methods with different initial estimated values

$\hat{\mathbf{x}}_0$		EM	KEM	KF	UF
0	MSE	—	—	107.1603	57.6372
	SNR	—	—	8.9304	15.9716
1	MSE	130.0240	123.5197	106.9763	57.4068
	SNR	6.0859	6.9304	8.9462	16.0418
\mathbf{r}	MSE	126.6161	118.9506	106.8504	57.3291
	SNR	6.1891	7.1213	8.9568	16.0644

图 4 给出初始估计浓度为 1 且使用 UF 算法重建选中区域的浓度分布时, 其中的一条不同横截线的重构浓度与真实浓度。

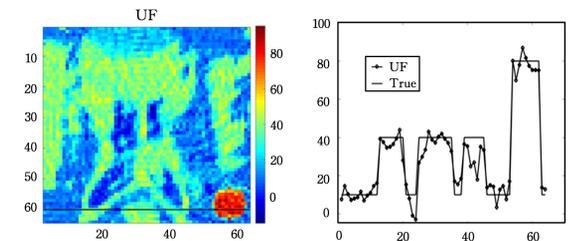


图 4 一条不同横截线的重构结果与相应的真实浓度的比较

Fig. 4 Reconstructed results and true concentration distribution of a different transversal lines

具体而言, 图 4 左图中的黑色实线是通过选中区域的第 3777 至 3840 个像素的横截线, 而右图则是通过 UF 算法重构出的位于这条横截线上的像素的示踪剂浓度 (带菱形的曲

线)与它们的真实浓度(光滑曲线)。观察图 4 中右侧图像以及比较表 1 中的数据可以发现:本文方法能够更好地重构出 1 维横截线上的体素的示踪剂浓度,尤其是那些真实浓度值突然变化的区域。

值得注意的是,噪声协方差阵是所提出的重建算法的关键参数之一。图 5 从左至右依次给出当噪声协方差阵分别为 $\mathbf{R}, 0.01 \times \mathbf{R}$ 和 $100 \times \mathbf{R}$ 时,使用 UF 算法得到的选中区域的重构结果。图 5 的结果表明:当准确的协方差阵未知时,调节测量噪声协方差阵有望获得更好的重建图像。

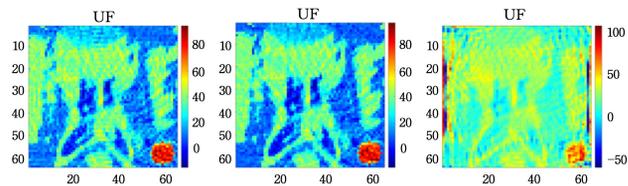


图 5 选择不同的噪声协方差阵时 UF 重建的图像

Fig. 5 Reconstructed images by UF with different noise covariance matrices

结束语 由于未知输入项能够描述示踪剂浓度分布和正弦图数据之间的复杂关系,本文通过引入未知输入项,更真实地刻画了 PET 系统的观测与示踪剂的浓度分布之间的关系。基于引入了未知输入项的观测方程,本文提出了一种简单、有效的示踪剂浓度分布的重建算法。实验表明,本文提出的算法比其他算法重建的 PET 图像更加清晰。

参 考 文 献

- [1] HAACKE E M, CHENG N Y C, HOUSE M J, et al. Imaging iron stores in the brain using magnetic resonance imaging[J]. *Magnetic Resonance Imaging*, 2005, 23(1): 1-25.
- [2] KUMAR R, DHANPATHI H, BASU S, et al. Oncologic PET tracers beyond [^{18}F]FDG and the novel quantitative approaches in PET imaging[J]. *The Quarterly Journal of Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, 2008, 52(1): 50-65.
- [3] BRENNER D J, HALL E J. Computed tomography—an increasing source of radiation exposure[J]. *New England Journal of Medicine*, 2007, 357(22): 2277-2284.
- [4] ZENG G L. *Medical image reconstruction: a conceptual tutorial* [M]. New York: Springer, 2010.
- [5] ALESSIO A, KINAHAN P. PET image reconstruction[J]. *Nuclear Medicine*, 2006, 1: 1-22.
- [6] QI J, LEAHY R M. Iterative reconstruction techniques in emission computed tomography[J]. *Physics in Medicine & Biology*, 2006, 51(15): R541-R578.
- [7] WANG C X, SNYDER W E, BILBRO G, et al. Performance evaluation of filtered backprojection reconstruction and iterative reconstruction methods for PET images[J]. *Computers in Biology and Medicine*, 1998, 28(1): 13-25.
- [8] YAVUZ M, FESSLER J A. New Statistical models for random-precorrected PET scans[J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 1997, 1230: 190-203.
- [9] WANG H, CHEN X, YU L. PET reconstruction based on optimal linear stochastic filtering[C]// *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*. IEEE, China, 2014: 5387-5391.
- [10] YU F, LIU H, SHI P. Pet image reconstruction based on particle filter framework[C]// *Proceedings of 2012 IEEE-EMBS International Conference on Biomedical and Health Informatics*. IEEE, China, 2012: 851-853.
- [11] WANG H, CHEN X, YU L. PET Image Reconstruction Based on a Constrained Filter[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2014, 47(3): 5503-5507.
- [12] TIAN Y, LIU H, SHI P. State space strategies for estimation of activity map in pet imaging[C]// *International Workshop on Medical Imaging and Virtual Reality*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004: 46-53.
- [13] WANG G, QI J. PET image reconstruction using kernel method [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2015, 34(1): 61-71.
- [14] GONG K, CHENG-LIAO J, WANG G, et al. Direct Patlak reconstruction from dynamic PET data using kernel method with MRI information based on structural similarity[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2018, 37(4): 955-965.
- [15] HUTCHCROFT W, WANG G, CHEN K T, et al. Anatomically-aided PET reconstruction using the kernel method[J]. *Physics in Medicine & Biology*, 2016, 61(18): 6668-6683.
- [16] EHRHARDT M J, MARKIEWICZ P, LILJEROTH M, et al. PET reconstruction with an anatomical MRI prior using parallel level sets[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2016, 35(9): 2189-2199.
- [17] MEHRANIAN A, ZAIDI H, READER A J. MR-guided joint reconstruction of activity and attenuation in brain PET-MR[J]. *NeuroImage*, 2017, 162: 276-288.
- [18] OLLINGER J M, FESSLER J A. Positron-emission tomography [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1997, 14(1): 43-55.
- [19] WANG H, XU Y, ZHAO Y, et al. A novel static PET image reconstruction method [C] // *Chinese Automation Congress (CAC)*, 2017. IEEE, China, 2017: 4537-4541.
- [20] LEAHY R M, QI J. Statistical approaches in quantitative positron emission tomography[J]. *Statistics and Computing*, 2000, 10(2): 147-165.
- [21] GUNN R N, GUNN S R, TURKHEIMER F E, et al. Tracer kinetic modeling via basis pursuit[J]. *Brain Imaging Using PET*, 2002, 151-121.



WANG Hong-xia, born in 1980, associate professor, is member of China Computer Federation (CCF). Her main research interests include control for stochastic systems, estimation for stochastic systems, and images reconstruction.