计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.190500098

对偶区间集概念格上区间集协调集的判定方法

郭庆春　马建敏
长安大学理学院数学与信息科学系　西安 710064
(gqc912@126.com)

摘　要　对偶区间集概念格是将区间集引入到对偶概念格产生的,它将对偶概念的外延与内涵从经典集合推广到区间集,使之成为一种描述不确定性概念的数学方法。而属性约简是数据挖掘的核心内容之一,是一种研究概念格本质特征的方法,它通过删除冗余属性使数据表中概念的获取与表示变得更简洁。文中主要研究对偶区间集概念格上区间集协调集的判定方法。首先基于对偶区间集概念格的同构,引入了区间集协调集,给出了对偶区间集概念格上区间集协调集的一系列判定定理,进而讨论了利用区间集协调集获取区间集属性约简的方法。

关键词:区间集;对偶概念格;对偶区间集概念格;属性约简;区间集协调集
中图法分类号　TP182

Judgment Methods of Interval-set Consistent Sets of Dual Interval-set Concept Lattices

GUO Qing-chun and MA Jian-min
Department of Mathematics and Information Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China

Abstract　The dual interval-set concept lattice is generated by introducing the interval set into the dual concept lattice. It extends the extension and intension of the dual concept from the classical sets to the interval sets, which makes it to be a mathematical tool to describe uncertain concepts. As one of the core topics of data mining, attribute reduction is a method to study the essential characteristics of concept lattice. It simplifies the representation of the concept by removing redundant attributes. This paper mainly discussed the judgment approaches of the interval-set consistent sets of the dual interval-set concept lattices. Firstly, based on the isomorphisim for the structure of the dual interval-set concept lattices, interval-set consistent sets were defined, and a series of judgment theorems were then investigated for the dual interval-set concept lattices. Then, the method about obtaining attribute reduction interval-set by using the interval-set consistent set was described.

Keywords　Interval set, Dual concept lattice, Dual interval-set concept lattice, Attribute reduction, Interval-set consistent set

1　引言

形式概念分析作为一种数学理论,于 1982 年由德国学者 Wille 提出[1-2]。概念格结构为其核心数据模型。概念格本质上描述了对象与属性之间形成的伽罗瓦连接,其相应的 Hasse 图表明了概念之间的泛化和特化关系,实现了数据的可视化。

实际中由于信息缺失,往往无法给出精确的概念的外延。为了表示这些不确定信息,Yao 于 1993 年基于粗糙集理论的上、下界引入了区间集思想[3-7]。区间集与概念格结合产生的区间集概念格[8]将概念推广到区间集概念,成为描述不确定性概念的新工具。随着数据量的急剧扩张,区间集概念格分析数据的能力受到大量冗余信息的干扰,此时属性约简为我们提供了良好的解决方法。

属性约简本质上是删除形式背景中的冗余属性,使得概念的表达更加简洁而不丢失其携带的信息。随着概念格理论的发展壮大,众多学者在概念格的构造以及属性约简方面取得了一些成果。Zhang 等率先提出了概念格基于可辨识属性矩阵的属性约简理论[9-10];Shao 等提出了近似算子的概念,给出了概念格中属性约简及对象约简的方法[11],之后还研究了基于单边形式背景的属性约简[12];Li 等研究了面向规则提取的概念格约简方法[13-14];Liu 等基于概念格同构理论,研究了属性约简及其算法[15];文献[16]通过引入交不可约元概念,提出了一种属性约简的新方法;Wang 等基于单边区间集概念格,在不完备形式背景下研究属性约简[17];Ma 等首先给出了面向对象概念的属性约简方法[18],随后研究了决策形式背景上区间集概念格的属性约简问题[19];Zhang 则揭示了区间集概念格属性约简的组成和结构[20]。

到稿日期:2019-05-20　返修日期:2019-07-22　本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。
基金项目:国家自然科学基金(61772019,61603278,71701021)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (61772019,61603278,71701021).
通信作者:马建敏(cjm-zm@126.com)

本文从对偶区间集概念格的结构出发,引入了对偶区间集概念格的细于关系,基于同构的对偶区间集概念格定义了区间集协调集,讨论了对偶区间集概念格上的区间集协调集的判定定理,利用区间集协调集给出了获取区间集约简的方法。

2　对偶区间集概念格

(U,A,I)称为一个形式背景[1-2],其中$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为有限非空论域,每个$x_i(i\leqslant n)$称为一个对象;$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$为非空有限集,每个$a_j(j\leqslant m)$称为一个属性;$I\subseteq U\times A$为U与A之间的二元关系。若$(x,a)\in I$,则称对象x具有属性a;若$(x,a)\notin I$,则称对象x不具有属性a。

设(U,A,I)为形式背景,对于任意$X\subseteq U,B\subseteq A$,充分性算子$({}^*,{}^*)$[1-2]定义为:

$$X^*=\{a\in A\mid\forall x\in X,(x,a)\in I\}$$

$$B^*=\{x\in U\mid\forall a\in B,(x,a)\in I\}$$

则对任意$x\in U,a\in A$:

$$x^*=\{x\}^*=\{a\in A\mid(x,a)\in I\}$$

$$a^*=\{a\}^*=\{x\in U\mid(x,a)\in I\}$$

对于任意$X\subseteq U,B\subseteq A$,对偶性充分算子$({}^\#,{}^\#)$[6]定义为:

$$X^\#=\{a\in A\mid X^c\cap a^{*c}\neq\emptyset\}$$

$$B^\#=\{x\in U\mid B^c\cap x^{*c}\neq\emptyset\}$$

显然,$X^\#=X^{c*c},B^\#=B^{c*c}$。

设(U,A,I)为形式背景,若$X^*=B$且$B^*=X$,则称(X,B)是形式概念(简称概念);若$X^\#=B$且$B^\#=X$,则称(X,B)是对偶形式概念(简称对偶概念)。

用$L_d(U,A,I)$表示形式背景(U,A,I)上的全体对偶概念,对于任意$(X_i,B_i)\in L_d(U,A,I)(i=1,2)$,定义$L_d(U,A,I)$上的关系$\leqslant_d$为:

$$(X_1,B_1)\leqslant_d(X_2,B_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2\Leftrightarrow B_2\subseteq B_1$$

则$\leqslant_d$是$L_d(U,A,I)$上的偏序关系。偏序集$(L_d(U,A,I),\leqslant_d)$构成一个完备格,称为对偶概念格[7],其上的交、并定义为:

$$(X_1,B_1)\vee_d(X_2,B_2)=(X_1\cup X_2,(B_1\cap B_2)^{\#\#})$$

$$(X_1,B_1)\wedge_d(X_2,B_2)=((X_1\cap X_2)^{\#\#},B_1\cup B_2)$$

设$L_d(U,A_1,I_1)$和$L_d(U,A_2,I_2)$是两个对偶概念格,如果对于任意$(X,B)\in L_d(U,A_2,I_2)$,存在$(X',B')\in L_d(U,A_1,I_1)$,使得$X'=X$,则称$L_d(U,A_1,I_1)$细于$L_d(U,A_2,I_2)$[6],记作$L_d(U,A_1,I_1)\leqslant L_d(U,A_2,I_2)$。如果$L_d(U,A_1,I_1)\leqslant L_d(U,A_2,I_2)$且$L_d(U,A_2,I_2)\leqslant L_d(U,A_1,I_1)$,则称这两个对偶概念格同构,记作$L_d(U,A_1,I_1)\cong L_d(U,A_2,I_2)$。

设(U,A,I)为形式背景,对于任意$D\subseteq A$,$I_D=I\cap(U\times D)$,则(U,D,I_D)也是一个形式背景。用$X^{\#_D},B^{\#_D}$分别表示$X^\#,B^\#$在(U,D,I_D)下的运算。显然有$I_A=I,X^{\#_A}=X^\#$,$X^{\#_D}=X^\#\cap D,B^{\#_D}=B^\#$。

对于形式背景(U,A,I),$D\subseteq A,D\neq\emptyset$,总有$L_d(U,A,I)\leqslant L_d(U,D,I_D)$成立。

设形式背景(U,A,I),$D\subseteq A,D\neq\emptyset$,$D$是对偶协调集当且仅当:

$$L_d(U,D,I_D)\leqslant L_d(U,A,I)\qquad(1)$$

文献[8]将区间集引入概念格,提出了区间集概念格,给出了一种描述具有不精确外延的形式概念的方法。而将区间集引入对偶概念格,则可利用对偶区间集概念格对不确定性对偶概念进行刻画。

设U是有限论域,2^U是U的幂集,区间集X定义为[3]:

$$X=[X_l,X_u]=\{X\in 2^U\mid X_l\subseteq X\subseteq X_u\}$$

其中,$X_l\subseteq X_u\subseteq U$,$X_l$和$X_u$分别称为区间集$X$的下界和上界。$U$上所有区间集的全体用$\mathbb{I}(2^U)$表示,称为$U$上的区间集幂集。对于任意的$X\in 2^U$,$\hat{X}=[X,X]$是下界和上界相等的区间集,称为退化区间集。

设U是有限论域,对于任意区间集$X=[X_l,X_u]$,$Y=[Y_l,Y_u]\in\mathbb{I}(2^U)$,定义区间集幂集上的交、并、差、补运算[3]分别为:

$$X\sqcap Y=[X_l\cap Y_l,X_u\cap Y_u]$$

$$X\sqcup Y=[X_l\cup Y_l,X_u\cup Y_u]$$

$$X-Y=[X_l-Y_u,X_u-Y_l]$$

$$\neg X=[U-X_u,U-X_l]$$

$\mathbb{I}(2^U)$上的序关系$\sqsubseteq$定义为[3]:

$$[X_l,X_u]\sqsubseteq[Y_l,Y_u]\Leftrightarrow X_l\subseteq Y_l,X_u\subseteq Y_u$$

定义 1[8]　设(U,A,I)为形式背景,对于任意区间集$X=[X_l,X_u]\in\mathbb{I}(2^U)$,$B=[B_l,B_u]\in\mathbb{I}(2^A)$,定义区间集上的对偶充分性算子$(f_d,g_d)$如下:

$$f_d(X)=f_d([X_l,X_u])=[X_u^\#,X_l^\#]$$

$$g_d(B)=g_d([B_l,B_u])=[B_u^\#,B_l^\#]$$

其中,$f_d(X)$表示$\mathbb{I}(2^A)$中介于$X_u^\#$与$X_l^\#$之间的所有属性子集的全体,$g_d(B)$表示$\mathbb{I}(2^U)$中介于$B_u^\#$与$B_l^\#$之间的所有对象子集的全体。

性质 1[8]　设(U,A,I)为形式背景,对于任意区间集X,$X_1,X_2\in\mathbb{I}(2^U)$,$B,B_1,B_2\in\mathbb{I}(2^A)$,下述性质成立:

(1)$X_1\sqsubseteq X_2\Rightarrow f_d(X_2)\sqsubseteq f_d(X_1)$,$B_1\sqsubseteq B_2\Rightarrow g_d(B_2)\sqsubseteq g_d(B_1)$;

(2)$g_df_d(X)\sqsubseteq X$,$f_dg_d(B)\sqsubseteq B$;

(3)$f_d(X_1\sqcap X_2)=f_d(X_1)\sqcup f_d(X_2)$,$g_d(B_1\sqcap B_2)=g_d(B_1)\sqcup g_d(B_2)$;

(4)$f_dg_df_d(X)=f_d(X)$,$g_df_dg_d(B)=g_d(B)$;

(5)$f_d(X)\sqsubseteq B\Leftrightarrow g_d(B)\sqsubseteq X$;

(6)$f_d(X_1\sqcup X_2)\sqsubseteq f_d(X_1)\sqcap f_d(X_2)$,$g_d(B_1\sqcup B_2)\sqsubseteq g_d(B_1)\sqcap g_d(B_2)$;

(7)$(g_df_d(X),f_d(X))$,$(g_d(B),f_dg_d(B))$均为对偶区间集概念。

设(U,A,I)为形式背景,对于任意区间集$X\in\mathbb{I}(2^U)$,$B\in\mathbb{I}(2^A)$,如果$f_d(X)=B$且$g_d(B)=X$,则称(X,B)为对偶区间集概念[8],其中X称为(X,B)的对偶区间集概念外延,B称为(X,B)的对偶区间集概念内涵。

用$IL_d(U,A,I)$表示(U,A,I)上所有对偶区间集概念的全体,对于任意对偶区间集概念$(X_1,B_1),(X_2,B_2)\in IL_d(U,

$A,I)$，定义$\leqslant_d$为$(X_1,B_1)\leqslant_d(X_2,B_2)\Leftrightarrow X_1\sqsubseteq X_2\Leftrightarrow B_2\sqsubseteq B_1$，则$\leqslant_d$为对偶区间集概念之间的偏序关系。偏序集$(IL_d(U,A,I),\leqslant_d)$构成一个完备格，称为对偶区间集概念格，其上确界和下确界分别定义为：

$$(X_1,B_1)\vee_d(X_2,B_2)=(X_1\sqcup X_2,f_dg_d(B_1\sqcap B_2))$$

$$(X_1,B_1)\wedge_d(X_2,B_2)=(g_df_d(X_1\sqcap X_2),B_1\sqcup B_2)$$

例1 表1列出了形式背景(U,A,I)，其中$U=\{1,2,3,4\}$，$A=\{a,b,c,d,e\}$。

表1 形式背景(U,A,I)

Table 1 Formal context (U,A,I)

	a	b	c	d	e
1	1	0	1	1	0
2	0	1	0	0	1
3	0	1	0	0	0
4	1	0	1	0	0

图1给出了形式背景(U,A,I)的对偶区间集概念格$IL_d(U,A,I)$。为方便起见，对象集$\{234\}$用234表示，属性集$\{acd\}$用acd表示。

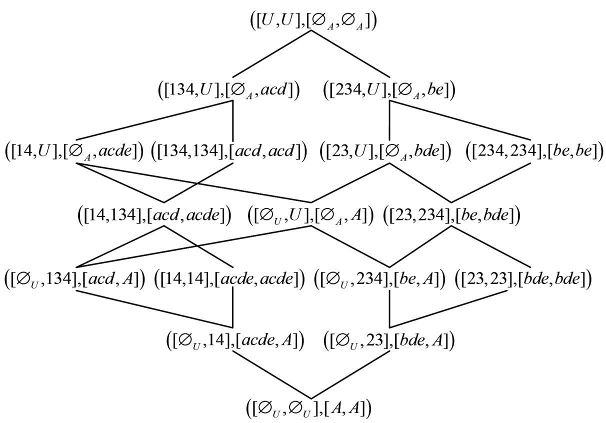

图1 对偶区间集概念格$IL_d(U,A,I)$

Fig.1 Dual interval-set concept lattice $IL_d(U,A,I)$

3 对偶区间集概念格的区间集协调集判定定理

为了研究对偶区间集概念格的属性约简，首先给出区间集协调集的定义以及判定定理。

定义2 设(U,A_1,I_1)和(U,A_2,I_2)是具有相同论域的两个形式背景，若对于任意$(X,B)\in IL_d(U,A_2,I_2)$，存在$(X',B')\in IL_d(U,A_1,I_1)$，使得$X'=X$，则称$IL_d(U,A_1,I_1)$细于$IL_d(U,A_2,I_2)$，记作$IL_d(U,A_1,I_1)\leqslant IL_d(U,A_2,I_2)$。

如果$IL_d(U,A_1,I_1)\leqslant IL_d(U,A_2,I_2)$且有$IL_d(U,A_2,I_2)\leqslant IL_d(U,A_1,I_1)$，则称这两个对偶区间集概念格同构，记作$IL_d(U,A_1,I_1)\cong IL_d(U,A_2,I_2)$。

对于任意属性子集$D\subseteq A$，可知(U,D,I_D)为(U,A,I)的子形式背景。对于任意区间集$X\in\mathbb{I}(2^U)$，$f_d(X)$和$f_d^D(X)$分别表示算子f_d在(U,A,I)和(U,D,I_D)下对X的作用，$g_d(B)$和$g_d^D(B)$分别表示算子g_d在(U,A,I)和(U,D,I_D)下对B的作用。显然有：$f_d^A(X)=f_d(X)$，$f_d^D(X)=f_d(X)\sqcap\hat{D}$，$g_d^D(B)=g_d(B)$。

定理1 设(U,A,I)为形式背景，对于任意的$D\subseteq A$，$D\neq\emptyset$，有$IL_d(U,A,I)\leqslant IL_d(U,D,I_D)$。

证明：设$D\subseteq A$且$D\neq\emptyset$。对于任意对偶区间集概念$(X,B)\in IL_d(U,D,I_D)$，由性质1(7)可知$(g_df_d(X),f_d(X))\in IL_d(U,A,I)$。

下证$g_df_d(X)=X$。由$g_d(B)=g_d^D(B)=X$及性质1(2)可得：$f_d(X)=f_dg_d(B)\sqsubseteq B$。于是$X=g_d(B)\sqsubseteq g_df_d(X)$，即$X\sqsubseteq g_df_d(X)$。又由$g_df_d(X)\sqsubseteq X$得$g_df_d(X)=X$。由定义2可知：$IL_d(U,A,I)\leqslant IL_d(U,D,I_D)$。

定义3 设(U,A,I)为形式背景，如果存在属性子集$D\subseteq A$，使得$IL_d(U,A,I)\cong IL_d(U,D,I_D)$，则称$D$是$(U,A,I)$的区间集协调集。进一步，若对于任意$d\in D$，都有$IL_d(U,A,I)\ncong IL_d(U,D-\{d\},I_{D-\{d\}})$，则称$D$是$(U,A,I)$的区间集约简。

由定义3及定理1可知，对于形式背景(U,A,I)上的任意属性子集$D\subseteq A$，$D\neq\emptyset$，D是区间集协调集，当且仅当：

$$IL_d(U,D,I_D)\leqslant IL_d(U,A,I) \tag{2}$$

下面讨论对偶区间集概念格的区间集协调集判定定理。

定理2 设(U,A,I)为形式背景，对于任意$D\subseteq A$，$D\neq\emptyset$，$E=A-D$，D是区间集协调集，当且仅当$\forall F\in\mathbb{I}(2^E)$，$F\neq\hat{\emptyset}$，$g_d(f_dg_d(F)\sqcap\hat{D})=g_d(F)$。

证明：（必要性）设D是区间集协调集，由式(2)知$IL_d(U,D,I_D)\leqslant IL_d(U,A,I)$。对于任意$F\in\mathbb{I}(2^E)$，$F\neq\hat{\emptyset}$，根据性质1(7)可知$(g_d(F),f_dg_d(F))\in IL_d(U,A,I)$。由定义2知，存在$C\in\mathbb{I}(2^D)$，$C\neq\hat{\emptyset}$，使得$(g_d(F),C)\in IL_d(U,D,I_D)$。于是$g_d^D(C)=g_d(C)=g_d(F)$，且$C=f_d^Dg_d(F)=f_dg_d(F)\sqcap\hat{D}$。因此$g_d(f_dg_d(F)\sqcap\hat{D})=g_d(F)$。

（充分性）若要证明D是区间集协调集，只需证$IL_d(U,D,I_D)\leqslant IL_d(U,A,I)$，即证对于任意$(X,B)\in IL_d(U,A,I)$，有$(X,B\sqcap\hat{D})\in IL_d(U,D,I_D)$。由$(X,B)\in IL_d(U,A,I)$知$f_d(X)=B$，$g_d(B)=X$，于是$f_d^D(X)=f_d(X)\sqcap\hat{D}=B\sqcap\hat{D}$。下证$g_d(B\sqcap\hat{D})=X$。显然，$B=(B\sqcap\hat{D})\sqcup(B\sqcap\hat{E})$。若$B\sqcap\hat{E}=\hat{\emptyset}$，则$X=g_d(B)=g_d(B\sqcap\hat{D})$。若$B\sqcap\hat{E}\neq\hat{\emptyset}$，由$B\sqcap\hat{E}\sqsubseteq\hat{E}$及题设条件有$g_d(B\sqcap\hat{E})=g_d(f_dg_d(B\sqcap\hat{E})\sqcap\hat{D})$。故由$f_dg_d(B\sqcap\hat{E})\sqsubseteq B$可得$f_dg_d(B\sqcap\hat{E})\sqcap\hat{D}\sqsubseteq B\sqcap\hat{D}$。因此有$g_d(B\sqcap\hat{D})\sqsubseteq g_d(f_dg_d(B\sqcap\hat{E})\sqcap\hat{D})=g_d(B\sqcap\hat{E})$，从而$X=g_d(B)\sqsubseteq g_d(B\sqcap\hat{D})$。又根据性质1(7)可知$(g_d(B),f_d^Dg_d(B))\in IL_d(U,D,I_D)$，因此$g_df_d^Dg_d(B)=g_d(B)$。由于$f_d^Dg_d(B)=f_dg_d(B)\sqcap\hat{D}\sqsubseteq B\sqcap\hat{D}$，因此有$g_d(B\sqcap\hat{D})\sqsubseteq g_d(f_dg_d(B)\sqcap\hat{D})=g_d(B)=X$。综上可得$X=g_d(B\sqcap\hat{D})$，也即$D$是区间集协调集。

定理3 设(U,A,I)为形式背景，对于任意$D\subseteq A$，$D\neq\emptyset$，$E=A-D$，D是区间集协调集，当且仅当$\forall F\in\mathbb{I}(2^E)$，$F\neq\emptyset$，$\exists C\in\mathbb{I}(2^D)$，$C\neq\emptyset$，$g_d(C)=g_d(F)$。

证明：（必要性）由定理2可得。

(充分性)由 $g_d(C)=g_d(F)$ 得 $f_dg_d(F)=f_dg_d(C)\sqsubseteq C$。首先,由 $C\sqsubseteq\hat{D}$ 可得 $f_dg_d(F)\sqsubseteq\hat{D}$,于是 $f_dg_d(F)\sqcap\hat{D}=f_dg_d(F)$,故 $g_d(F)=g_df_dg_d(F)=g_d(f_dg_d(F)\sqcap\hat{D})$。根据定理 2 可知 D 是区间集协调集。

引理 1[21] 设(U,A,I)为形式背景,对于任意的 $D\subseteq A$,$D\neq\emptyset$,$E=A-D$,D 是对偶协调集,当且仅当 $F\subseteq E$,$F\neq\emptyset$,$\exists C\subseteq D$,$C\neq\emptyset$,使得 $C^{\#}=F^{\#}$。

证明:(必要性)由 D 是对偶协调集可知 $L_d(U,D,I_D)\leqslant L_d(U,A,I)$。对于任意 $F\subseteq E$,$F\neq\emptyset$,总有$(F^{\#},F^{\#\#})\in L(U,A,I)$,因而存在 $C\subseteq D$,使得$(F^{\#},C)\in L(U,D,I_D)$,于是 $C^{\#}=F^{\#}$。

(充分性)要证 D 是对偶协调集,由式(2)知,需证 $L_d(U,D,I_D)\leqslant L_d(U,A,I)$。由$(F^{\#},F^{\#\#})\in L_d(U,A,I)$知,只需证$(F^{\#},F^{\#\#}\cap D)\in L_d(U,D,I_D)$。首先,由 $C^{\#}=F^{\#}$ 可得 $F^{\#\#}=C^{\#\#}\subseteq C$,由 $C\subseteq D$ 可得 $F^{\#\#}\subseteq D$,因此 $F^{\#\#}\cap D=F^{\#\#}$,于是$(F^{\#\#}\cap D)^{\#}=F^{\#\#\#}=F^{\#}$,即 D 是对偶协调集。

定理 4 设(U,A,I)为形式背景,对于任意的 $D\subseteq A$,$D\neq\emptyset$,$E=A-D$,D 是区间集协调集,当且仅当 $\forall F\in 2^E$,$F\neq\emptyset$,$\exists C\in\mathbb{I}(2^D)$,$C\neq\hat{\emptyset}$,使得 $g_d(C)=g_d(\hat{F})$。

证明:(必要性)由定理 3 可证。

(充分性)对于任意 $F=[F_l,F_u]\in\mathbb{I}(2^E)$,$F\neq\hat{\emptyset}$,有 $F_l\subseteq F_u\subseteq E$。由假设知,存在 $C_1,C_2\in\mathbb{I}(2^D)$,$C_i=[C_l^i,C_u^i]$,$C_l^i$,$C_u^i\subseteq D$,使得 $g_d(C_1)=g_d(\hat{F}_l)$,$g_d(C_2)=g_d(\hat{F}_u)$。由引理 1 得 $F_l^{\#}=C^1{}_l^{\#}=C^1{}_u^{\#}$,$F_u^{\#}=C^2{}_l^{\#}=C^2{}_u^{\#}$。由性质 1 知 $F_l\subseteq F_u\Rightarrow F_u^{\#}\subseteq F_l^{\#}$。令 $C=[C_l^1\cap C_l^2,C_l^2]$,则 $g_d(C)=[C^2{}_l^{\#},(C_l^1\cap C_l^2)^{\#}]=[C^2{}_l^{\#},C^1{}_l^{\#}\cup C^2{}_l^{\#}]=[F_u^{\#},F_l^{\#}\cup F_u^{\#}]=[F_u^{\#},F_l^{\#}]=g_d(F)$。因此,存在 $C\in\mathbb{I}(2^D)$使得 $g_d(C)=g_d(F)$。由定理 3 知,D 是区间集协调集。

定理 5 设(U,A,I)为形式背景,对于任意的 $D\subseteq A$,$D\neq\emptyset$,$E=A-D$,D 是区间集协调集,当且仅当 $\forall\hat{F}\in\mathbb{I}(2^E)$,$\hat{F}\neq\hat{\emptyset}$,$g_d(f_dg_d(\hat{F})\sqcap\hat{D})=g_d(\hat{F})$。

证明:(必要性)由定理 2 可证。

(充分性)设对于任意 $\hat{F}\in\mathbb{I}(2^E)$,$\hat{F}\neq\hat{\emptyset}$,有 $g_d(\hat{F})=g_d(f_dg_d(\hat{F})\sqcap\hat{D})$。令 $C=f_dg_d(\hat{F})\sqcap\hat{D}$,则 $C\in\mathbb{I}(2^D)$,且 $g_d(C)=g_d(\hat{F})$。由定理 4 可得 D 是区间集协调集。

定理 6 设(U,A,I)为形式背景,对于任意的 $D\subseteq A$,$D\neq\emptyset$,$E=A-D$,D 是区间集协调集,当且仅当 $IL_d(U,D,I_D)\leqslant IL_d(U,E,I_E)$。

证明:(必要性)设 D 是区间集协调集,则由式(2)知 $IL_d(U,D,I_D)\leqslant IL_d(U,A,I)$。由 $D\subseteq A$,$D\neq\emptyset$ 可知 $E=A-D\subseteq A$ 且 $E\neq\emptyset$,根据定理 1 中 $IL_d(U,A,I)\leqslant IL_d(U,E,I_E)$ 可得 $IL_d(U,D,I_D)\leqslant IL_d(U,E,I_E)$。

(充分性)设 $IL_d(U,D,I_D)\leqslant IL_d(U,E,I_E)$,对于任意 $F\in\mathbb{I}(2^E)$,$F\neq\hat{\emptyset}$,根据算子性质 1(7)知$(g_d(F),f_dg_d(F)\sqcap\hat{E})\in IL_d(U,E,I_E)$。根据题设条件,存在 $B\in\mathbb{I}(2^D)$,$B\neq\hat{\emptyset}$,$(g_d(F),B)\in IL_d(U,D,I_D)$。于是 $f_d^Dg_d(F)=f_dg_d(F)\sqcap\hat{D}=B$,$g_d(B)=g_d(F)$。因此,$g_d(f_dg_d(F)\sqcap\hat{D})=g_d(F)$。由定理 2 可知,$D$ 是区间集协调集。

定理 7 设有形式背景(U,A,I),对于任意的 $D\subseteq A$,$D\neq\emptyset$,$E=A-D$,D 是区间集约简集的充要条件为:

(1) $\forall\hat{F}\in\mathbb{I}(2^E)$,$\hat{F}\neq\hat{\emptyset}$,$g_d(f_dg_d(\hat{F})\sqcap\hat{D})=g_d(\hat{F})$;

(2) $\forall d\in D$,$\exists F\subseteq E\cup\{d\}$,$F\neq\emptyset$,$g_d(\hat{F})\neq g_d(f_dg_d(\hat{F})\sqcap(\widehat{D-\{d\}}))$。

证明:由定义 3 及定理 5 可知结论成立。

例 2 (续例 1)对于例 1 给出的形式背景(U,A,I),根据定理 7 计算可得对偶区间集概念格的区间集约简集为:

$D_1=\{a,b,d,e\}$,$D_2=\{c,b,d,e\}$

图 2 和图 3 分别给出了区间集约简集 D_1 和 D_2 所对应的对偶区间集概念格。

比较图 1—图 3 可知:

$IL_d(U,A,I)\cong IL_d(U,D_1,I_{D_1})$

$IL_d(U,A,I)\cong IL_d(U,D_2,I_{D_2})$

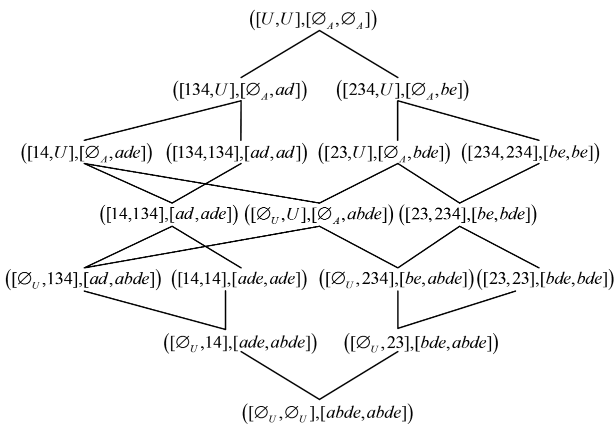

图 2 对偶区间集概念格 $IL_d(U,D_1,I_{D_1})$

Fig. 2 Dual interval-set concept lattice $IL_d(U,D_1,I_{D_1})$

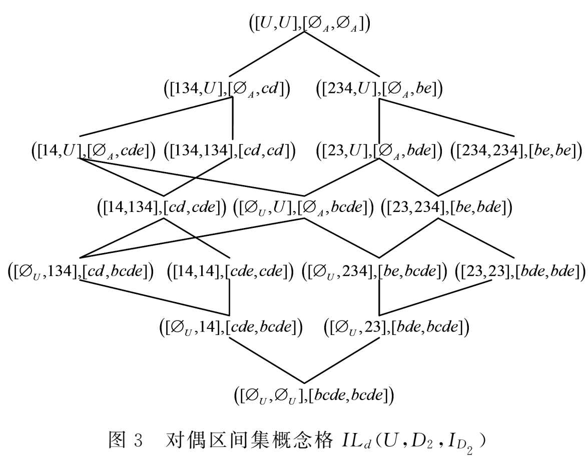

图 3 对偶区间集概念格 $IL_d(U,D_2,I_{D_2})$

Fig. 3 Dual interval-set concept lattice $IL_d(U,D_2,I_{D_2})$

结束语 本文针对形式背景上概念外延和内涵的不确定性,研究了基于区间集的对偶区间集概念格的区间集协调集

判定方法，并利用区间集协调集给出了寻找区间集属性约简的方法。

基于本文的研究结果，下一步将讨论基于关系矩阵的对偶区间集概念格上的属性约简。

参 考 文 献

[1] WILLE R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts[C]//Ordered Sets. Riedel, Dordrecht, 1982:445-470.

[2] GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis: Mathematics Foundations[M]. Berlin, Germany, 1999.

[3] YAO Y Y. Interval-set algebra for qualitative knowledge representation[C]//Proceeding of the 5th International Conference on Computing and Information. Society Press, 1993:370-374.

[4] YAO Y Y. Wong SKM: Interval approaches for uncertain reasoning[C]//International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems. 1997:381-390.

[5] YAO Y Y. Interval sets and interval-set algebras[C]//Proceeding of the 8th IEEE International Conference on Cognitive Informatics, Computer Society. 2009:309-314.

[6] YAO Y Y. Concept lattices in rough set theory[C]//Proceeding of 23 International Meeting of North American Fuzzy Information, Processing Society. 2004:796-901.

[7] YAO Y Y. Interval set and three-way concept analysis in complete contexts[J]. International Journal of Machine Learning & Cybernetics, 2017, 8(1):3-20.

[8] XU W H, LI J H, WEI L, et al. Formal Concept Analysis: Theory and application[M]. Beijing: Beijing Science Press, 2016: 69-82.

[9] ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction Theory of Concept Lattice[J]. Science in China (Series E), 2005, 35(6): 628-639.

[10] WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute reduction Theory of Concept Lattice Based on Decision Formal Contexts[J]. Science in China (Series E), 2008, 38(2):195-208.

[11] SHAO M W, LI K W. Attribute reduction in generalized one-sided formal contexts[J]. Information Sciences, 2017, 378: 317-327.

[12] LI J H. Rule Acquisition Oriented Reduction Methods for Concept Lattices and Their Implementation Algorithms[D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2012.

[13] LI J H, MEI S L, LV Y J. Knowledge reduction in real decision formal contexts[J]. Information Sciences, 2012, 189: 191-207.

[14] LIU JI M, LIU B X. Research on attribute reduction and its algorithm based on concept lattice isomorphism[J]. Computer Applications and Software, 2014, 31(5):34-36.

[15] LI J J, ZHANG Y L, WU W Z, et al. Attribute Reduction for Formal Context and Consistent Decision Formal Concext and Concept Lattice Generation[J]. Chinese Journal of Computers, 2014, 37(8):1768-1774.

[16] WANG Z, WEI L. Attribute Reduction on Partially-known Formal Concept Lattices for Incomplete Contexts[J]. Computer Science, 2018, 45(1):73-78.

[17] MA J M, CAI M J, ZOU C J. Concept acquisition approach of object-oriented concept lattice[J]. International Journal of Machine Learning & Cybernetics, 2017, 8(1):123-134.

[18] MA J M, LEUNG Y, ZHANG W X. Attribute reductions in object-oriented concept lattices[J]. International Journal of Machine Learning & Cybernetics, 2014, 5(5):789-813.

[19] MA J M, HU L L. Attribute Reductions of Interval-set Concept Lattices for Decision Formal Contexts[J]. Pattern Recognition and and Artificial Intelligence, 2018, 31(7):581-590.

[20] ZHANG E S. Composition and structure on attribute reduction of interval-set concept lattice[J]. Journal of ShanDong University (Natural Science), 2018, 53(8):17-24.

[21] MA J M, ZHANG W X. Axiomatic characterizations of dual concept lattice[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(5):690-697.

GUO Qing-chun, born in 1995, postgraduate. Her research interests include formal concept analysis and rough set.

MA Jian-min, born in 1978, Ph.D, professor. Her research interests include rough set, granular computing and concept lattice.