

带有一刀切约束的二维非规则装箱算法

张旭 王莉莉 杨博韬
哈尔滨理工大学计算机科学与技术学院 哈尔滨 150080
(291737750@qq.com)



摘要 针对切割下料领域的二维非规则一刀切装箱问题,首先给出了最小移动距离的定义,然后给出了一种基于最大移动距离的启发式算法。该算法通过计算一个凸多边形滑动至另一个凸多边形内部所允许的最大移动距离,对待排件的摆放位置进行一次定位,避免使用传统的 NFP(Not-Fit-Polygon)预判交方法,极大地缩短了排样的整体时间,最后使用模拟退火算法对下料流程进行了优化,改善了排样结果。

关键词: 启发式算法;一刀切;二维非规则装箱问题

中图法分类号 TH164,TP311

Heuristic Algorithms for Two-dimensional Irregular Bin Packing Problem with Guillotine Constraints

ZHANG Xu, WANG Li-li and YANG Bo-tao
School of Computer Science and Technology, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China

Abstract Aiming at the two-dimensional irregular packing problem with guillotine constraint in the cutting field, the definition of minimum moving distance is given firstly, and a heuristic algorithm based on maximum moving distance is proposed. The algorithm calculates the maximum moving distance needed for a convex polygon to slide into the interior of another convex polygon. The disposable positioning of the layout position avoids using the traditional NFP intersection method, and simulated annealing algorithm is used to optimize the packing process, which greatly reduces the overall time consumption of layout and meets the high requirements on layout results.

Keywords Heuristic algorithm, Guillotine, Two-dimensional irregular bin packing

1 引言

不规则件的切割、包装问题广泛存在于玻璃切割、集成电路设计、报刊排版、衣料裁剪等工业生产领域。在生产过程中,由于玻璃等物品的固有物理特性,其切割过程与布料、皮料、金属等切割过程不同,需要在切割的过程中满足一刀切的条件(Guillotine Constraint)。在排样问题本身就属于 NPC 问题的前提下,实现一刀切的约束条件会更为困难。

带有一刀切约束的二维非规则装箱问题由 Han 等于 2013 年提出^[1],在玻璃等大规模切割工业中被广泛应用,属于 NPC 问题。针对不规则凸多边形问题的解法中,由于一刀切约束的特殊性,较为通用的处理方法是先采用包络矩形(Envelope Rectangle)这个方法,再对矩形件排样,最后反推还原得到解集。有学者尝试通过不规则多边形的组合搭配(Pair),结合上述步骤来求解,从而形成了“二步法”^[2]。但是,此方法针对的是更多不规则多边形的组合,实现一

刀切的约束会更为困难。

带有一刀切约束的装箱二维非规则装箱问题可描述为:将若干个凸多边形(待排项) I 摆放至宽度为 W 、高度为 H 的大矩形(箱子)内,要求所使用的箱子个数最少,同时满足:

1) 对于任意的已排件 I 和 J ,当 I 不等于 J 时,有 $I \cap J = \emptyset$;

2) 排样结束后,每一个 I 从所在箱子中进行切割分离时,须满足一刀切条件,即在切割刀线须从一边开始,经直线到对边处结束;

3) 算法为离线算法,即在对 I 进行摆放的过程中,其他待排项的相关信息均已知。表 1 列出了本文中常用的符号集及意义。

表 1 符号集
Table 1 Symbol set

符号	说明
W, H	初始箱子的宽度和高度
I_j	待排项序列中的第 j 项
2IG-BPT	二维非规则一刀切二叉排样树

因此,本文的主要工作将分为两个方面:1)不使用不规则多边形的包络组合(Merge Envelope of Irregular, MER)方法,而是直接对不规则多边形进行下料,并在一刀切约束下实现对不规则多边形的快速排样;2)根据相关研究,在排样过程中显式地进行不规则多边形件间的判交是非常耗时的^[3-5],因此本文将摒弃传统的 NFP 多边形判交,通过凸多边形间最大移动距离、正向边、方向边的概念来进行动态监测,尽可能地缩短算法运行时间,并在此基础上改善排样结果。

2 凸-凸条件下,由外至内的最大移动距离

2.1 基本定义

在摆放待排件的过程中,主流的判交算法是在 NFP 多边形判交的基础上进行的^[6-8]。图 1 给出了两个多边形 P_i 和 P_j 形成 NFP 多边形的过程。NFP 多边形是指,将 P_j 的某点与 P_i 重合,并围绕 P_i 一周所形成的重叠区域。该方法存在的问题是:算法复杂度高^[9],待排项轮廓复杂从而导致在实际工程应用过程中生成所有 NFP 多边形组合会消耗大量的时间等。

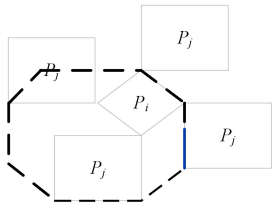


图 1 NFP 多边形示意图
Fig. 1 Example diagram of NFP polygon

为了解决这一问题,本文根据凸多边形之间的关系,给出了一种基于最大移动距离的启发式求解算法。此处所阐述的最大移动距离是:将待排件 I_j 放到起始位置,以某指向待排区域的射线为滑轨,然后计算其沿滑动轨道滑到待排区域,但不滑出待排区域的最大移动距离(Maximum Moving Distance),该距离即为两多边形之间的最大移动距离。

如图 2 所示,为方便描述,因此将其简记为 MMD。

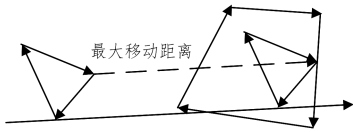


图 2 最大移动距离
Fig. 2 Maximum moving distance

为方便计算,本文约定:对于每一个将进行下料操作的箱子,其左下角顶点与二维直角坐标系的(0,0)坐标点重合。

定义 1(滑轨) 对于多边形 A 和多边形 B, B 固定, A 在不旋转的前提下,沿着某一条有向射线 L 向 B 内保持滑动,则称 L 为 A 滑到 B 内部的滑轨。

定义 2(凸条件下的正向边、反向边和无向边) 如图 3 所示,右侧多边形中如果有某条有向边从 L 的左侧通往 L 的右侧,则称该边为基于滑轨 L 的正向边;若有向边从 L 的右侧通往 L 的左侧,则该边为反向边;如果该有向边与 L 平行,则称其为在 L 条件下的无向边。图 3 中,虚线为左侧待排件相对于滑轨移动时的反向边,实线为左侧待排件相对于滑轨移动时的正向边。

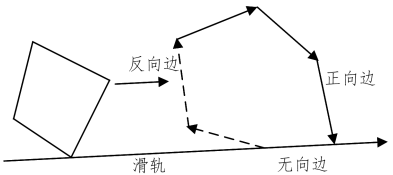


图 3 正、反向边
Fig. 3 Positive and negative slide

定义 3(在 L 条件下点 A 和点 B 之间的距离 L_{AB}) 由 A, B 两点分别向 L 做垂线,与 L 分别交于 A' 和 B', 则定义 A' 和 B' 两点间的几何长度为在 L 条件下点 A 和点 B 的距离。

定义 4(在 L 条件下多边形的宽度 L_p) $L_p = \max\{L_{AB}\}$, 其中 A 和 B 为 P 的任意两个顶点。

结论:在简单凸多边形条件下,如果在 L 滑轨的基础上,正接触点与反接触点的距离大于或等于 L_p , 则凸多边形 A 可以放置到凸多边形 B 内,且凸多边形 A 移动到凸多边形 B 内的距离与正接触点沿滑轨 L 运动到反接触点的距离相等。

2.2 基于最大移动距离的定位算法

计算移动待排件距离的具体步骤如算法 1 所示。

算法 1 计算移动待排件距离 CalMovingDistance (Area, Item)

Input: 待排区域 Area, 待排项 Item
Output: 最大移动距离 Distance
Begin:
计算 Item 沿滑轨方向 L 的长度 L_p ;
For p range Item: {
将 Area 的每条边 l_i 依次视为滑轨;
以顶点 p 所在起始边为基准,将 Item 旋转到与滑轨重合;
判断是否可交,若不可交,continue;
判断交点所在边是正向边还是反向边,然后计算移动距离并记录;
}
对比每组结果,计算点 p 至正、反向距离的差值,并将其与 L_p 进行对比;
在所有结果中,选择最大移动距离作为 Distance;
Return Distance;
End

3 凸-凸条件下由外至内的最大移动距离

3.1 基于最大移动距离的定位算法

在基于最大移动距离的排样过程中,构建合理有效的结构化描述,可以极大地降低排样过程中的计算量。本文构造了用于非规则一刀切装箱问题的二叉排样树。

首先,构造排样树的节点结构为: (Polygon, pLeft, pRight)。其中, Polygon 为当前节点对应的多边形,该多边形用数组的方式进行坐标描述; pLeft 为左子节点指针; pRight 为右子节点指针。二叉排样树与切割过程如图 4 所示。

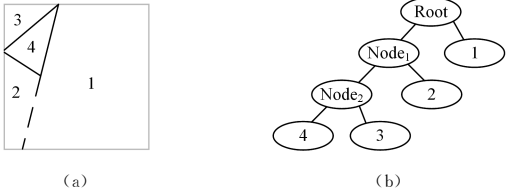


图 4 排样树示意图
Fig. 4 Example diagram of packing tree

在依次对待排项进行摆放和切割的过程中,会不断形成图 4(a)所示的排样图,同时也分解出了图 4(b)所示的二叉排样树。显然,通过该排样树的结构化描述,在新增排样项时,通过二叉树的性质进行二分查找,可以快速找到其匹配的位置并对其进行排列。该过程的时间复杂度为 $O(\log n)$ 。

结论:该排样树的每一个右子节点所对应的区域均为可摆放区域,而左侧叶子节点均为已排项。

3.2 子树生成算法

当待排件 I 被摆放至空白区域 B 后,先依次对 I 的所有边进行切割,不断地构成子二叉排样树;然后在每轮切割结果中选择最优结果作为本轮切割的解,从而生成新的待排区域;最后再对未切割的边继续进行切割,具体过程如算法 2 所示。

算法 2 BuildChildTree(Root, Item)

Input:排样树根结点 Root,待排项 Item

Output:切割后的排样树根节点 Root

Begin;

For L range Item {

 将 L 与 Root 所在的区域进行对比,若与 Root 中某边重合,continue;

 将当前边作为切割边,计算与 Root 所在区域的交点;

 生成新的待排区域,并记录其大小

}

对比所有切割情况,选择不包含 Item 且面积最大的解作为切割方案;

将包含 Item 的区域作为根的左子节点,剩余区域作为右子节点,分别插入 Root;

继续对未切割的边进行切割;

Return Root;

End

3.3 待排项 I 摆放算法

通过上述描述可知,待排件间移动距离的方法及待排件摆放后对待排区域的切割方式已确定,当有一个待排件 I 需要被摆放时,可通过算法 3 计算当前待排件的实际摆放位置。在算法执行过程中,考虑多边形形状导致的不可摆放因素,会对多边形进行多次的旋转、翻折等几何操作,并在确定可摆放的初始位置后,对待排项 I 进行二次移动,使待排件尽量“贴合”待排箱的左下角,以减少占用的空间。图 5 给出了摆放算法的实际执行过程。

算法 3 摆放算法 PackingAlgorithm(L, Item, Times)

Input:滑轨 L,待排项 Item,最大旋转次数 Times

Output:待排项 Item 的摆放位置 position

Begin;

For n<Times{

 For slide range Item{

 通过旋转,使边 slide 与滑轨 L 贴合;

 CalMovingDistance(),计算出沿滑轨的最大移动距离;

 If 可摆放 {

 进行二次移动,尽可能向待排区域的左下角移动;

 BuildChildTree(),切割当前区域并记录;

 }

 Else continue;

 }

若都不可放入,对当前多边形进行翻折操作,重复上述步骤;

}

旋转多边形,重复上述步骤,记录每次旋转中摆放区域的大小等数据;

在所有旋转方案中选择待排区域最优的解作为摆放位置 position;

Return position;

End

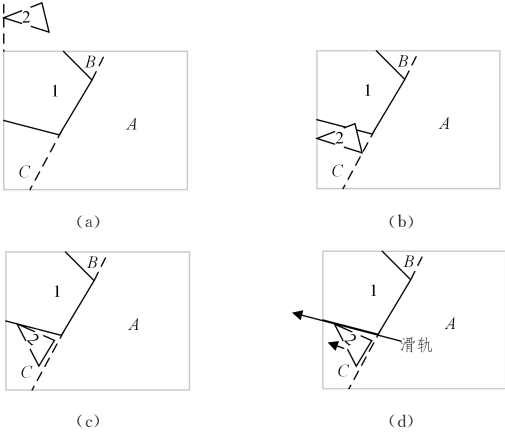


图 5 下料过程示意图

Fig. 5 Schematic diagram of packing process

3.4 基于模拟退火算法的最优解搜索

根据上文的描述,本文使用基于凸多边形间的最大移动距离算法来动态计算下料过程中多边形间的可移动距离,避免了使用传统的 NFP 多边形进行多边形判交;同时使用启发式算法对下料流程进行控制。

由于排料过程受初始解的影响较大,为了尽可能逼近全局最优解,本文将基于模拟退火算法的思想来提升初始解的排样质量。通过增加部分时间消耗,在上文启发式算法结果的基础上,以启发式算法完成下料后的箱子使用数及空间利用率为初始解,通过模拟退火算法尝试搜索空间最优解^[10]。

模拟退火算法 (Simulated Annealing, SA) 的思想是由 Metropolis 等^[11]提出的。本文将每轮下料过程中切割后的待排域大小作为目标函数值 T 来进行模拟,即针对下料过程中每轮排料的件进行判断,并进行“降温”,从而实现对解空间的搜索。

SACheck 算法的具体流程如算法 4 所示。将启发式算法的结果作为初始温度和初始解,通过变化下料顺序来调整温度 E ,从而达到搜索最优解的目的。

算法 4 SACheck(Item, Polygons, Area)

Input:待排项 Item,待排项集合 Polygons,当前待排区域 Area

Output:最终待排项 Item

Begin;

以 Item 的解为初始温度和初始解,根据 Area 计算温度增量 E ;

在 Polygons 中随机选择一个待排件作为接下来下料的部件,判断排料完成后的排样率是否满足 E 要求,若满足,则接受最优解并退出;

若充分搜索后仍无待排项的下料结果可满足温度增量 E 的要求,则对 E 进行温度衰减;

求出当前 Area 的最优解 Item_{Best};

Return Item_{Best};

End

带有一刀切约束的二维非规则排样算法的流程如图 6 所示。

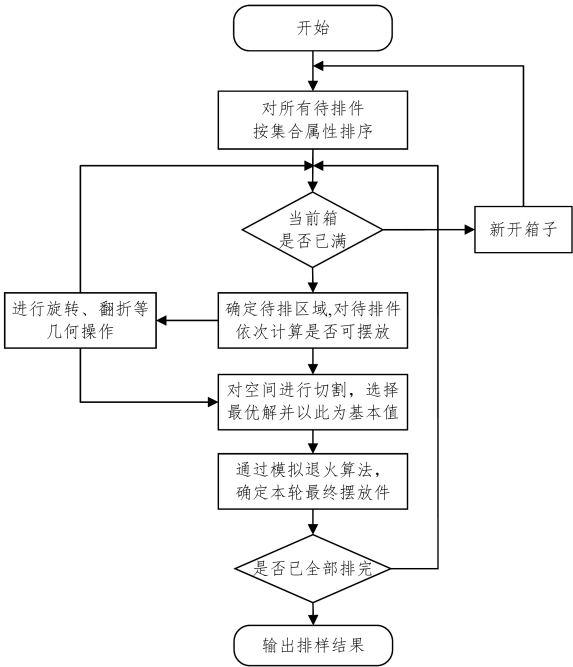


图 6 装箱过程示意图

Fig. 6 Schematic diagram of bin packing process

4 数值实验

本文算法的测试平台为:G3250 3, 20GHz CPU,16GB 内存, 64 位 Windows 7 SP1 操作系统, Golang 编程语言。由于一刀切不规则排样问题具有独特的应用性,选择来自英国 Country Glass 工厂 2009 年的实际订单需求数据作为对比测试数据¹⁾, 其中的 4 组数据来自订单数据,另外 4 组由工业数据生成。

所有待排件的个数介于 40 至 149 之间。该数据集中,箱子的大小设定为长 2250 cm,宽 3210 cm。

表 2 列出了在使用相同测试数据源、应用 BL 算法的基础上,分别使用 NFP 多边形判交和通过最大移动距离判交的两种算法,从开始下料到排样完成所需的耗时对比。

表 2 不同判交方式的时间消耗

Table 2 Time consumption of different handing ways

测试案例	(单位:s)	
	T_{NFP}	T_{MMD}
J40	0.73	0.03
J50	1.09	0.04
J60	1.40	0.06
J70	2.01	0.12
H80	2.46	0.15
H100	4.11	0.29
H120	5.74	0.38
H149	8.74	0.64

表 2 中, T_{NFP} 表示使用 NFP 判交后每组算法排样完成所需的时间, T_{MMD} 表示通过凸多边形间最大移动距离的计算到下料完成的耗时。每组算法的时间为运行 10 次后计算得到的平均值,精确到小数点后两位。

通过表 2 可知,NFP 多边形判交的特性,使得预处理阶段需要对 N 个不规则多边形依次求解 NFP 多边形,因此需要求解 N^2 个 NFP 多边形,综合时间复杂度为 $O(N^4)$ 。而本文通过

二叉排样树搜索,实现了将下料过程转化为凸多边形间两两判断的过程,综合时间复杂度为 $O(N^2 \log n)$ 。因此,基于多边形间最大移动距离的判断方式有效减少了算法的时间消耗。

表 3 列出了在上述相同数据集下,本文算法与已有相关算法的下料结果对比。其中, CA_{best} 为理论推算所需的算法下界, 2S 意为两步构造。首先,使用 Haims 的方法^[12]将 N 个多边形两两组合,再将组合后的结果依次嵌入该组合的最小外接矩形中,并采用文献[13]中的方法进行矩形排样。1S-0.94-5 及 1S-0.97-3 是来自文献[1]中的较好数据,数字 3 和 5 分别代表加权值,0.97 和 0.94 分别代表不规则多边形的适应度; CA1 及 CA1-Ph-imp 是来自最新的启发式多边形组合构造算法^[14]中的排样结果。以上对比结果数据来自文献[15]中各个经典算法,已覆盖文献中对比结果,本文此处不再赘述。

表 3 测试结果的对比

Table 3 Comparison of experiment dataset

(单位:pcs)

测试案例	CAbest	2S	1S-0.94-5	1S-0.97-3	CA1	CA1-2ph-imp	本文结果
J40	7	8	8	8	8	7	8
J50	9	10	11	10	10	9	10
J60	10	11	11	11	11	10	11
J70	12	12	13	13	12	12	12
H80	10	10	10	10	10	10	10
H100	16	17	17	17	16	16	17
H120	16	17	17	17	16	16	16
H149	22	23	23	23	22	22	23

表 4 列出了相同数据集下不同构造算法的时间消耗。本文在启发式排样算法下料完成的基础上,进一步利用模拟退火的方法,使数据结果逼近理论下界值;同时,由于避免了大量的预处理过程,相比目前主流的通过预处理阶段后再进行排样的算法,算法的时间消耗有了显著减少,从而证明了避免 NFP 预处理进行排样的做法是有效的。

表 4 算法消耗时间的对比

Table 4 Algorithms time comparison

(单位:s)

测试案例	CAbest	2S	1S-0.94-5	1S-0.97-3	CA1	CA1-2Ph-imp	本文结果
J40	14	>360°	110	47	14	168	2.21
J50	18	>360°	130	74	18	344	3.30
J60	32	>360°	170	60	32	204	3.32
J70	62	>360°	200	98	62	703	4.40
J80	155	>360°	405	187	155	1275	6.60
J100	124	>360°	700	210	124	1412	7.58
J120	326	>360°	714	247	326	2406	10.10
J149	624	>360°	947	389	624	3314	11.28

实验数据对比结果如图 7、图 8 所示。本文算法的排样示意结果如图 9 和图 10 所示。

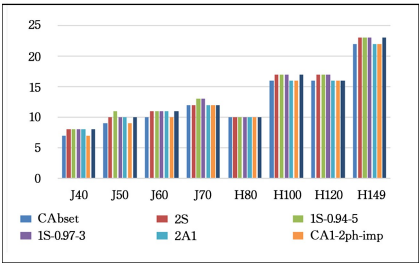


图 7 算法使用箱子数目的对比

Fig. 7 Comparing number of boxes used in algorithm

¹⁾ <http://paginas.fe.up.pt/esicup/tiki-index.php>

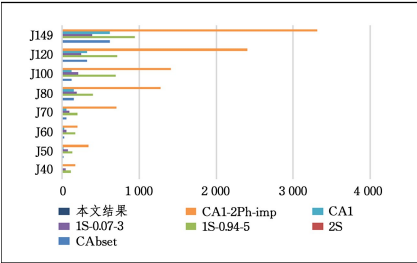


图 8 算法消耗时间的对比

Fig. 8 Comparison of algorithmic time consumption

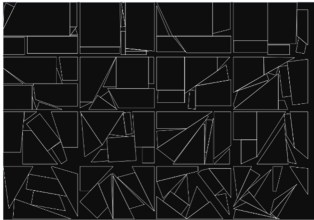


图 9 H120 下料结果图

Fig. 9 Packing result of H120 dataset

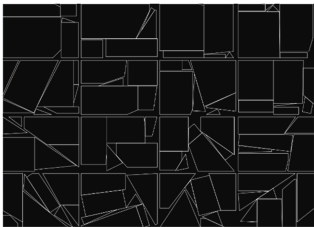


图 10 H149 下料结果图

Fig. 10 Packing result of H149 dataset

结束语 本文提出了利用多边形间的最大移动距离定位,将一个小的凸多边形通过滑轨滑至另一个凸多边形内部的算法,构造了二叉排样树;在此基础上,实现了用于非规则一刀切装箱问题的启发式算法,该算法大幅减少了时间消耗;同时,通过模拟退火算法对下料流程进行了优化。实验结果表明,该算法在玻璃、钢板切割等工程领域具有较高的实际应用价值。

参 考 文 献

[1] HAN W, BENNELL J A, ZHAO X, et al. Construction heuristics for two-dimensional irregular shape bin packing with guillotine constraints[J]. European Journal of Operational Research, 2013, 230(3): 495-504.

[2] HUANG H B, JIANG W D. Study on 2-D irregular packing[J]. Guanxi Kexueyuan Xuebao, 2004, 20(4): 225-227.

[3] CLAUTIAUX F, JOUGLET A, MOUKRIM A. A New Graph-Theoretical Model for k-Dimensional Guillotine-Cutting Problems[C] // International Conference on Experimental Algorithms. 2008.

[4] AMOSSEN R R, PISINGER D. Multi-dimensional bin packing problems with guillotine constraints[J]. Computers and Operations Research, 2010, 37(11): 1999-2006.

[5] LI H S. Recursive Algorithm Applied Study on a Single Rectan-

gle Blanks Unconstrained Optimal Layout [J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2017, 31(9): 125-131.

[6] SWEENEY P E, PATERNOSTER E R. Cutting and Packing Problems: A Categorized, Application-Orientated Research Bibliography[J]. Journal of the Operational Research Society, 1992, 43(7): 691-706.

[7] CARVALHO J M V D, RODRIGUES A J G. An LP-based Approach to a Two-stage Cutting Stock Problem[J]. European Journal of Operational Research, 1995, 84(3): 580-589.

[8] DOWSLAND K A, DOWSLAND W B. Solution Approaches to Irregular Nesting Problems[J]. European Journal of Operational Research, 1995, 84(3): 506-521.

[9] SWEENEY P E, PATERNOSTER E R. Cutting and Packing Problems: A Categorized, Application-Orientated Research Bibliography[J]. Journal of the Operational Research Society, 1992, 43(7): 691-706.

[10] WANG H, LIN F, ZHANG Y W. Research on Trajectory Tracking Control of Self-Driving Vehicle Based on Simulated Annealing Algorithm[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2015, 29(11): 106-111, 119.

[11] SHPITALNI M, MANEVICH V. Optimal Orthogonal Subdivision of Rectangular Sheets[J]. Journal of Manufacturing Science & Engineering, 1996, 118(3): 281-288.

[12] CARVALHO J M V D, RODRIGUES A J G. An LP-based Approach to a Two-stage Cutting Stock Problem[J]. European Journal of Operational Research, 1995, 84(3): 580-589.

[13] THEODORACATOS V E, GRIMSLEY J L. The Optimal Packing of Arbitrarily-Shaped Polygons Using Simulated Annealing and Polynomial-Time Cooling Schedules[J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 1995, 125(1/2/3/4): 53-70.

[14] MARTINEZ-SYKORA A, ALVAREZ-VALDES R, BENNELL J, et al. Constructive procedures to solve 2-dimensional bin packing problems with irregular pieces and guillotine cuts[J]. Omega, 2015, 52: 15-32.

[15] HAN W, ZHANG Z C. A Simulated Anneal algorithm for Irregular Guillotine Packing Problems[J]. China Mechanical Engineering, 2016, 27(24): 3326-3331.



ZHANG Xu, born in 1994, postgraduate. His main research interests include packing algorithm and so on.



WANG Li-li, born in 1980, Ph.D., professor, is a member of China Computer Federation. Her main research interests include detection and imaging, pattern recognition.