

基于原子范数最小化的二维稀疏阵列波达角估计算法

卢爱红^{1,2} 郭艳¹ 李宁¹ 王萌¹ 刘杰¹

1 陆军工程大学通信工程学院 南京 210007

2 苏州经贸职业技术学院 江苏 苏州 215009

(lahnet@163.com)

摘要 基于二维稀疏平面阵列的波达角(Direction-of-arrival, DOA)估计问题在第五代移动通信大规模多输入多输出阵列的应用中日益重要。无网格稀疏重构技术促进了 DOA 估计问题的发展,原子范数理论则使得 DOA 估计的超分辨率得到进一步的提高。文中研究了多个方向的频谱稀疏信号入射到二维稀疏阵列时的 DOA 估计问题。为了准确、成对地识别出所有入射信号的仰角和方向角,提出了一种基于多个测量矢量(Multiple Measurement Vectors, MMV)的二维原子范数算法,并用半正定规划进行求解。所提算法将二维 DOA 估计问题中的压缩感知理论从单个测量矢量拓展到多个测量矢量,从而有效利用 MMV 的联合稀疏性。数值仿真结果表明,随着 MMV 矢量的增长,可识别的信源个数增加,稀疏阵列中物理传感器所占比例降低到 30%,DOA 估计误差也显著降低,并且在信噪比增大时,所提算法能够取得很好的收敛效果。

关键词: 原子范数最小化;波达角;联合稀疏性;多个测量矢量;二维稀疏阵列

中图法分类号 TN911.7

Direction-of-arrival Estimation with Two-dimensional Sparse Array Based on Atomic Norm Minimization

LU Ai-hong^{1,2}, GUO Yan¹, LI Ning¹, WANG Meng¹ and LIU Jie¹

1 College of Communications Engineering, Army Engineering University of PLA, Nanjing 210007, China

2 Suzhou Institute of Trade and Commerce, Suzhou, Jiangsu 215009, China

Abstract Direction-of-arrival (DOA) estimation based on two-dimensional planar sparse array is increasingly important in the application of massive MIMO arrays of 5G. The gridless sparse reconstruction technology promotes the development of DOA estimation research, and the super-resolution of DOA estimation methods has been advanced with the atomic norm theory. In this paper, DOA estimation is studied when spectrally-sparse signals from multiple directions are incidented on a two-dimensional sparse array. In order to accurately identify the azimuth and elevation angles of all incident signals in pairs, a two-dimensional atomic norm approach based on multiple measurement vectors (MMV) is proposed, and can be solved by semidefinite programming. The proposed algorithm extends compressive sensing of two-dimensional DOA estimation from a single measurement vector to multiple measurement vectors, so as to effectively use the joint sparsity of MMV. Numerical simulation results show that, as the MMV vector grows, the number of identifiable sources increases, the proportion of physical sensors in the sparse array decreases to 30%, the DOA estimation error decreases significantly, and the proposed algorithm can achieve a good convergence effect when the signal-to-noise ratio increases.

Keywords Atomic norm minimization, Direction-of-arrival, Joint sparsity, Multiple measurement vectors, Two-dimensional planar sparse array

1 引言

大规模多输入多输出(Multiple-Input Multiple-Output, MIMO)阵列在通信方面具有显著优势,是第五代移动通信系统(5G)的关键技术。大规模 MIMO 中不断增加的阵元数量

和天线阵列维数成为了制约其发展的关键因素。稀疏阵列可以为昂贵的均匀矩形阵列(Uniform Rectangular Array, URA)提供替代方案^[1]。稀疏阵列使用部分物理阵元,可以获得与 URA 相当的性能。目前已有一些有效的二维稀疏阵列的配置方法,如边界阵列^[2]、最小冗余阵列^[3]和同心矩阵阵

到稿日期:2019-12-16 返修日期:2020-03-06 本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。

基金项目:国家自然科学基金(61871400);江苏省自然科学基金(BK20171401)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (61871400) and Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China(BK20171401).

通信作者:郭艳(guoyan_1029@sina.com)

列^[1]。针对不同形式的二维稀疏阵列,提出一种任意稀疏平面阵列 DOA 估计问题,准确地联合估计入射信号的仰角和方位角至关重要。

过去几十年里,研究人员在 DOA 估计方面做出了很多努力^[4]。有许多常见的经典方法用于估计一维和二维 DOA,例如多信号分类算法(Multiple Signal Classification, MUSIC)^[5]和旋转不变信号参数估计算法(Estimation of Signal Parameter by Rotational Invariant Techniques, ESPRIT)^[6]。然而,这些方法通常需要事先知道源的个数,且 ESPRIT 算法只适用于均匀阵列。近年来,DOA 估计中的稀疏信号表示和压缩感知理论引起了广泛关注。基于稀疏表示的 DOA 估计方法在模型阶未知、快拍数有限和高相关性源的情况下能获得比传统方法更优越的性能。稀疏方法需要将 DOA 估计中的连续方向域离散化为有限数量的网格点集。如果真实的 DOA 正好位于某些网格点上,现有的稀疏表示算法则可以直接应用于 DOA 估计。实际上,有限的离散化会导致网格失配,因此出现了偏离网格的稀疏表示算法。这些算法引入更多需要估计的变量来解决网格失配问题,从而增加了算法的复杂度,并且这类算法仍然需要离散化网格来完成稀疏估计。无格点稀疏方法不需要对方向域进行离散化,可以通过更简单的方式来完美解决网格失配问题。文献[7]首先引入了一种典型的无格点稀疏方法:基于连续时间信号的原子范数理论。在一定条件下,原子范数最小化(Atomic Norm Minimization, ANM)能够准确恢复频谱稀疏信号^[8-11]。但是,现有算法研究都只关注均匀线性阵列和稀疏线性阵列问题^[12-14]。

目前,DOA 估计的研究主要集中在—维阵列、URA 和特定结构的二维稀疏阵列,对任意二维稀疏阵列的研究很少。最近,文献[15]将—维 ANM 方法扩展到二维频率估计问题。ANM 能够处理随机选择的部分观测值,适用于任意稀疏平面阵列。因此,我们提出利用二维 ANM 算法来估计任意大规模 MIMO 稀疏平面阵列的 DOA。然而,二维 ANM 算法处理的是单快拍信号,波达角的估计误差相对较大,并且二维 ANM 算法要求稀疏平面阵列中的物理传感器个数所占比例较高,这一限制使得该方法不能处理典型的稀疏阵列,如互质阵列的波达角估计。为了降低所需物理阵元的比率,减小估计误差,引入多测量矢量的概念并利用多信号快拍的组稀疏性来改善性能,这样不仅能够降低估计误差和所需物理阵元的比例,还能增加可识别的信源个数。

本文提出一种用于二维稀疏阵列的新型无格点 DOA 估计算法,通过引入二维 ANM 算法来适应任意形状的稀疏阵列。为了进一步减小稀疏阵列中所需物理阵元数的比例,降低估计误差,提出一种基于 MMV 联合稀疏性的二维 MMV-ANM 算法。为了恢复均匀阵列的数据矩阵,理论上推导出基于多快拍的原子范数最小化等价半正定规划公式(Semi-Definite Programming, SDP),并通过凸优化来求解^[16]。根据恢复出的多快拍二维均匀阵列的数据矩阵,采用 Unitary ESPRIT 算法估计 DOA^[17]。实验结果表明,所提算法适用于各种不同的二维稀疏阵列,并能显著提高 DOA 估计的性能。与现有方法相比,MMV 模型的快拍数增加时,所提算法的稳定性优势更加明显。

本文第 2 节描述二维 MMV DOA 信号模型;第 3 节描述

二维 MMV 模型的原子范数最小化问题和求解方法;第 4 节通过数值实验验证所提算法的有效性;最后总结全文。

2 信号模型

考虑用广义矩形阵列(Generalized Rectangular Array, GRA)来表示任意稀疏平面阵列,从 URA 中随机选择其物理传感器。假设 URA 由 $N \times M$ 个具有半波长阵元间隔 $d = \lambda/2$ 的阵元组成,则 URA 传感器的索引集表示为 $J = \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}$, GRA 传感器的索引集用 Ω 表示。显然,如果 GRA 代表 URA,那么 $\Omega = J$;如果 GRA 代表二维稀疏阵列,可看作“丢失”的传感器的 URA,那么 $\Omega \subset J$ 。对 GRA 中丢失的传感器进行插值,可得到对应的具有半波长阵元间隔的 URA。图 1(a)给出了一个典型的稀疏阵列 CRA,其对应的插值 URA 如图 1(b)所示。

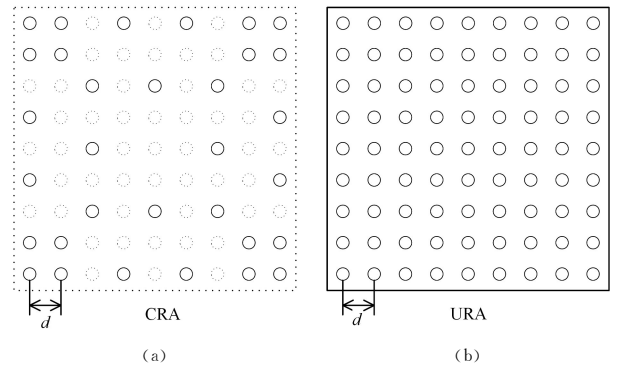


图 1 稀疏阵列 CRA 及其插值 UR

Fig. 1 Sparse array CRA and its interpolation URA

假设远场中的源信号产生的电磁波入射到 GRA,如图 2 所示,描述源信号位置的唯一参数是 DOA。

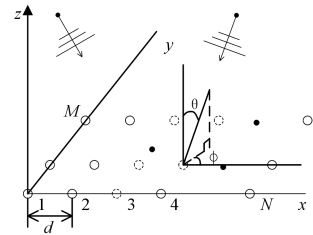


图 2 二维稀疏阵列的信号模型

Fig. 2 Signal model of two-dimensional sparse array

远场窄带信号矢量表示为 $\mathbf{s}_l = [s_{1,l}, \dots, s_{K,l}]^T, l = 1, \dots, L$, 其中 l 是快拍的索引号, L 是快拍数, $s_{k,l} \in \mathbb{C}$ 表示第 k 个源信号的复数幅值。入射电磁波信号的波达角方向可以表示为 $\Theta_k = (\theta_k, \phi_k), k = 1, \dots, K$, 其中 $\theta_k (0 \leq \theta_k \leq 90^\circ)$ 和 $\phi_k (0 \leq \phi_k \leq 360^\circ)$ 分别表示仰角和方向角。设第一个传感器为参考零点,第 k 个入射信号从第一个传感器传输到第 (n, m) 个传感器的时间差为:

$$\tau_{n,m}(\Theta_k) = \frac{1}{C} [d(n-1)\cos\phi_k \sin\theta_k + d(m-1)\sin\phi_k \sin\theta_k] \quad (1)$$

其中, C 是光速^[4]。根据叠加原理得到 K 个源信号入射时的无噪声均匀阵列输出的数据矩阵 $\mathbf{X}_l^?$, 其中 l 表示快拍号。数据矩阵由 J 索引, 每个元素可以表示为:

$$x_{n,m,l}^o = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi[d(n-1)\cos\phi_k \sin\theta_k + d(m-1)\sin\phi_k \sin\theta_k]} \quad (2)$$

对于第 k 个信号,定义 x 和 y 方向上的电子频率为:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_k &= (f_{1,k}, f_{2,k}) \in [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2] \\ f_{1,k} &= d \cos \phi_k \sin \theta_k / \lambda \\ f_{2,k} &= d \sin \phi_k \sin \theta_k / \lambda \end{aligned} \quad (3)$$

那么,第 k 个源信号在 x 和 y 方向的导向矢量分别为:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x(f_{1,k}) &= [1, e^{j2\pi f_{1,k}}, \dots, e^{j2\pi(N-1)f_{1,k}}]^T / \sqrt{N} \\ \mathbf{a}_y(f_{2,k}) &= [1, e^{j2\pi f_{2,k}}, \dots, e^{j2\pi(M-1)f_{2,k}}]^T / \sqrt{M} \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_l^o = \frac{1}{\sqrt{NM}} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K s_{k,l} & \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi f_{2,k}} & \dots & \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi(M-1)f_{2,k}} \\ \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi f_{1,k}} & \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi(f_{1,k} + f_{2,k})} & \dots & \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi[f_{1,k} + (M-1)f_{2,k}]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi(N-1)f_{1,k}} & \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi[(N-1)f_{1,k} + f_{2,k}]} & \dots & \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi[(N-1)f_{1,k} + (M-1)f_{2,k}]} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_x \mathbf{D}_l \mathbf{A}_y^T \quad (5)$$

其中, $\mathbf{D}_l = \text{diag}([s_{1,l}, \dots, s_{K,l}]) = \text{diag}(s_l)$ 。通过矢量化二维数据矩阵 $\mathbf{x}^o = \text{vec}(\mathbf{X}_l^o)^T$ 得到:

$$\mathbf{x}_l^o = \mathbf{A} \mathbf{s}_l = \sum_{k=1}^K s_{k,l} \mathbf{c}(\mathbf{f}_k), l=1, \dots, L \quad (6)$$

其中, \mathbf{x}_l^o 是 K 个复数矢量 $\mathbf{c}(\mathbf{f}_k)$ 的线性叠加,它是有限个 \mathbf{f}_k 的稀疏和,因此是 Θ 的稀疏表示。

将 L 个信号快拍堆叠在矩阵 $\mathbf{x}^o = [\mathbf{x}_1^o, \dots, \mathbf{x}_L^o]$ 中,可以表示为:

$$\mathbf{x}^o = \mathbf{A} \mathbf{s} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_L] \in \mathbb{C}^{K \times L}$ 表示 L 个不同时刻的源信号。

本文旨在基于 GRA 传感器的观测值来估计入射信号的 DOA。给定的 L 个快拍观测值为 $\mathbf{X}_\Omega^o = [\mathbf{X}_{\Omega 1}^o, \dots, \mathbf{X}_{\Omega L}^o]$, 其中数据矩阵 \mathbf{X}_Ω^o 的索引集是 Ω , 矩阵 $\mathbf{x}_\Omega^o = [\mathbf{x}_{\Omega 1}^o, \dots, \mathbf{x}_{\Omega L}^o]$ 的列表示矢量化的数据矩阵 \mathbf{X}_Ω^o 。

3 二维 MMV 模型的原子范数理论

3.1 原子范数

根据文献[8]中的一维原子范数理论,本节描述了二维 MMV DOA 模型中的频谱稀疏信号的原子范数。为表示式(7)中的数据矩阵,定义如下原子:

$$\mathbf{a}'(\mathbf{f}, \mathbf{b}) := \mathbf{c}(\mathbf{f}) \mathbf{b}^H \in \mathbb{C}^{NM \times L} \quad (8)$$

其中, $\mathbf{f} \in [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^L$ 的范数 $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$ 。定义原子集 \mathcal{A} 为:

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{a}'(\mathbf{f}, \mathbf{b}) : \mathbf{f} \in [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2], \|\mathbf{b}\|_2 = 1\} \quad (9)$$

其中, \mathcal{A} 可被认为是由变量 \mathbf{f} 和 \mathbf{b} 索引的无限字典,它是信号 \mathbf{x} 的构建块。数据矩阵可以表示为 $\mathbf{x}^o = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}'(\mathbf{f}_k, \mathbf{b}_k)$, 是原子集 \mathcal{A} 中 K 个原子的组合,且 K 是稀疏的。

假设 L 个矢量化的 URA 快拍组成的数据矩阵表示为 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{NM \times L}$, 则其原子范数为:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A},0} = \inf_{\mathbf{c}_k \in \mathbb{C}} \sum_k |\mathbf{c}_k| \|\mathbf{x} = \sum_k \mathbf{c}_k \mathbf{a}'(\mathbf{f}_k, \mathbf{b}_k), \mathbf{a}'(\mathbf{f}_k, \mathbf{b}_k) \in \mathcal{A}\| \quad (10)$$

其中, \mathbf{c}_k 在复单位圆上独立同分布地均匀分布。式(10)是文献[14]中最少原子个数定义 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A},0}$ 的凸松弛。

对于 K 个源信号,沿着 x 和 y 方向的导向矩阵可用 Vandermonde 矩阵 $\mathbf{A}_x = [\mathbf{a}_x(f_{1,1}), \dots, \mathbf{a}_x(f_{1,K})]$ 和 $\mathbf{A}_y = [\mathbf{a}_y(f_{2,1}), \dots, \mathbf{a}_y(f_{2,K})]$ 来表示^[11]。因此,URA 的阵列导向矩阵为:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{c}(\mathbf{f}_1), \dots, \mathbf{c}(\mathbf{f}_K)] \quad (4)$$

其中, $\mathbf{c}(\mathbf{f}_k) = \mathbf{c}(f_{1,k}, f_{2,k}) := \mathbf{a}_x(f_{1,k}) \otimes \mathbf{a}_y(f_{2,k})$ 是二维导向矢量, \otimes 表示 Kronecker 积。阵列导向矩阵由阵列的物理结构决定。

根据式(2),可以将二维数据矩阵 \mathbf{X}_l^o 写成如下形式:

$$\mathbf{X}_l^o = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K s_{k,l} & \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi f_{2,k}} & \dots & \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi(M-1)f_{2,k}} \\ \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi f_{1,k}} & \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi(f_{1,k} + f_{2,k})} & \dots & \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi[f_{1,k} + (M-1)f_{2,k}]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi(N-1)f_{1,k}} & \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi[(N-1)f_{1,k} + f_{2,k}]} & \dots & \sum_{k=1}^K s_{k,l} e^{j2\pi[(N-1)f_{1,k} + (M-1)f_{2,k}]} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_x \mathbf{D}_l \mathbf{A}_y^T \quad (5)$$

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A},0} = \inf_{\mathbf{c}_k} \|\mathbf{x} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}'(\mathbf{f}_k, \mathbf{b}_k), \mathbf{a}'(\mathbf{f}_k, \mathbf{b}_k) \in \mathcal{A}, c_k \in \mathbb{C}\| \quad (11)$$

原子范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ 中 $L=1$ 的情况与文献[15]中单测量矢量的原子范数是一致的。当 $L>1$ 时,可用联合稀疏性来提高估计性能。

在无噪声的情况下,二维稀疏阵列的输出值是式(7)中 \mathbf{x}^o 的矩阵元素的子集。在部分观测值的限制条件下,恢复 URA 传感器中未观测的元素,使用原子范数最小化公式。

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \quad (12)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{x}_\Omega = \mathbf{x}_\Omega^o$$

定理 1 给出了所提算法能够精确恢复二维全数据矩阵的条件。定理 1 是直接来自文献[15]中单个测量矢量情况下的二维频率估计扩展而来的。

定理 1 设 Ω 是均匀随机地从 J 中选择的索引子集,且 $Q = \max\{M, N\}$ 。 $\delta \in (0, 1)$ 是限制概率的一个小常数。假设 $\Delta_{\min,1} := \min_{i \neq j} |f_{1,i} - f_{1,j}| \geq 1.19 / \lfloor (N-1)/4 \rfloor$ 和 $\Delta_{\min,2} := \min_{i \neq j} |f_{2,i} - f_{2,j}| \geq 1.19 / \lfloor (M-1)/4 \rfloor$ 是单位圆上的环绕距离,则存在常数 $C > 0$, 使得:

$$|\Omega| \geq CL \max\{\log^2 \frac{Q}{\delta}, K \log \frac{K}{\delta} \log \frac{Q}{\delta}\} \quad (13)$$

其中, $|\cdot|$ 表示集合的元素个数,为式(12)能以概率 $1-L\delta$ 恢复出 \mathbf{x}^o 提供了充分条件。

从定理 1 可以看出,在适当的频率分隔条件下,当 Ω 的元素个数大于理论值下界时,很容易以高概率恢复出真实的 \mathbf{x}^o 。

3.2 原子范数最小化

为求得式(12)的最优解,提出以半正定规划来等价求解 MMV 情况下的二维 ANM 问题。原子范数 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ 可通过以下定理提供的 SDP 公式来计算。

首先使用双重 Toeplitz 结构来定义增广矩阵^[15]。给定一个 $(2N-1) \times (2M-1)$ 的矩阵 $\mathbf{U} = [u_{x_i, y_j}], 1 \leq x_i \leq 2N-1, 1 \leq y_j \leq 2M-1$ 。定义一个双重 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{S}(\mathbf{U}) \in \mathbb{C}^{NM \times NM}$, 它由 $N \times N$ 个来自 \mathbf{U} 的块矩阵 U_{x_i} 组成,方式如下:

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{x_N} & \mathbf{U}_{x_{N+1}} & \cdots & \mathbf{U}_{x_{2N-1}} \\ \mathbf{U}_{x_{N-1}} & \mathbf{U}_{x_N} & \cdots & \mathbf{U}_{x_{2N-2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{U}_{x_1} & \mathbf{U}_{x_2} & \cdots & \mathbf{U}_{x_N} \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中,每个块 \mathbf{U}_{x_i} ($1 \leq x_i \leq 2N-1$) 是根据 \mathbf{U} 的第 x_i 行定义的 $M \times M$ 大小的 Toeplitz 矩阵得到的,方式如下:

$$\mathbf{U}_{x_i} = \begin{bmatrix} u_{x_i, y_M} & u_{x_i, y_{M+1}} & \cdots & u_{x_i, y_{2M-1}} \\ u_{x_i, y_{M-1}} & u_{x_i, y_M} & \cdots & u_{x_i, y_{2M-2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_i, y_1} & u_{x_i, y_2} & \cdots & u_{x_i, y_M} \end{bmatrix} \quad (15)$$

由文献[18]可知,假设双重 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ 是一个半正定矩阵,且 $\text{rank}(\mathbf{S}(\mathbf{U})) = K < \min\{N, M\}$,那么 $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ 存在一个 Vandermonde 分解 $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$,其中 $\mathbf{V} = [\mathbf{c}(f_1), \dots, \mathbf{c}(f_K)]$, $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}([\sigma_1, \dots, \sigma_K])$,且 $\sigma_i > 0, i = 1, \dots, K$. 根据双重 Toeplitz 的 Vandermonde 分解,可以证明原子范数最小化式(12)等价于定理 2 中的半正定规划。

定理 2 考虑一个 $N \times M \times L$ 的数据矩阵 \mathbf{X} , 设 $\mathbf{x}_l = \text{vec}((\mathbf{X}_l)^T) \in \mathbb{C}^{NM \times 1}$, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_L]$. 假设双重 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ 有一个 Vandermonde 分解,那么原子范数 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ 可以等效地写成:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = \inf_{\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{(2N-1) \times (2M-1)}, \mathbf{W} \in \mathbb{C}^{L \times L}} \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S}(\mathbf{U})) + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{W}) \right\}$$

$$\text{s. t. } \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{U}) & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^H & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (16)$$

证明:用 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}}$ 表示式(16)右侧值。设 $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{c}(f_k) \mathbf{b}_k^H$, $c_k = |c_k| e^{i\theta_k}$. 令 $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \sum_k |c_k| \mathbf{c}(f_k) \mathbf{c}(f_k)^H$, $\mathbf{W} = \sum_{k=1}^K |c_k| \mathbf{b}_k \mathbf{b}_k^H$, 那么有 $\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{U}) & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^H & \mathbf{W} \end{bmatrix} = \sum_k |c_k| \begin{bmatrix} \mathbf{c}(f_k) \\ \mathbf{b}_k e^{-i\theta_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}(f_k)^H & \mathbf{b}_k^H e^{i\theta_k} \end{bmatrix} \geq 0$, 且 $\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S}(\mathbf{U})) + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{W}) = \sum_k |c_k| = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}}$. 因此 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \leq \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}}$.

相反,假设有最优 \mathbf{U} 和 \mathbf{W} 满足 $\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{U}) & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^H & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq 0$, 且 $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$, $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_i), \sigma_i \geq 0$, 那么对于合适的矩阵 \mathbf{C} , \mathbf{x} 可以表示为 $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{C}$. 将 \mathbf{C}^T 的列表示为 \mathbf{c}_i . 根据 Schur 补的条件,有 $\mathbf{W} - \mathbf{x}^H \mathbf{S}(\mathbf{U})^\dagger \mathbf{x} \geq 0$, 那么:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{W}) &\geq \text{tr}(\mathbf{x}^H \mathbf{S}(\mathbf{U})^\dagger \mathbf{x}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{C}^H \mathbf{V}^H (\mathbf{V}^H)^{-1} \mathbf{\Sigma}^\dagger \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{C}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{\Sigma}^\dagger \mathbf{C}^H \mathbf{C}) = \sum_i \sigma_i^{-1} \|\mathbf{c}_i\|_2^2 \end{aligned} \quad (17)$$

因此:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S}(\mathbf{U})) + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{W}) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{\Sigma}) + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{W}) \\ &\geq \sqrt{\text{tr}(\mathbf{\Sigma}) \cdot \text{tr}(\mathbf{W})} \\ &\geq \sqrt{(\sum_i \sigma_i) \cdot (\sum_i \sigma_i^{-1} \|\mathbf{c}_i\|_2^2)} \\ &\geq \sum_i \|\mathbf{c}_i\|_2 \geq \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)表明 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}} \geq \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$, 因此 $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{S}} = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$. 证毕。

根据定理 2, 式(12)可以等价地写成如下半正定规划:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \arg \min_{\mathbf{x}} \inf_{\mathbf{U}, \mathbf{W}} \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S}(\mathbf{U})) + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{W}) \right\} \\ \text{s. t. } &\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{U}) & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^H & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq 0 \\ &\mathbf{x}_\Omega = \mathbf{x}_\Omega^0 \end{aligned} \quad (19)$$

在恢复出多快拍均匀阵列观测值 $\hat{\mathbf{x}}$ 之后,可以使用常规方法如 Unitary-ESPRIT 算法来计算二维 DOA。

基于 MMV 的二维 ANM 算法来估计 DOA, 具体步骤如算法 1 所示。

算法 1 基于 MMV 的二维原子范数最小化算法

输入: $\mathbf{x}^0 = \mathbf{A}\mathbf{s}$, $\mathbf{s} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_L] \in \mathbb{C}^{K \times L}$

输出: 估计二维 DOA $(\theta_k, \phi_k), k = 1, \dots, K$

1. 建模表示多快拍稀疏阵列信号观测值 \mathbf{x}^0 ;
2. 对于无噪声信号, 用式(19)恢复多快拍均匀阵列信号 \mathbf{x}^0 数据矩阵。对于有噪声信号, 用式(23)恢复信号;
3. 依据恢复的多快拍均匀阵列数据矩阵 \mathbf{x}^0 , 用经典的 Unitary-ESPRIT 算法来估计 DOA。

4 实验

通过构建数值仿真实验来评估所提算法的性能, 从 $N \times M$ 的 URA 中随机选择物理传感器子集来生成稀疏阵列。假设远场窄带源信号入射到阵列中时, 振幅和初始相位是随机变化的。使用二维 DOA 估计的均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)作为价值函数, 定义为:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{1}{K} \sum_{v=1}^T \sum_{k=1}^K [(\hat{\phi}_{k,v} - \phi_k)^2 + (\hat{\theta}_{k,v} - \theta_k)^2]} \quad (20)$$

其中, T 是实验次数, $\hat{\phi}_{k,v}$ 和 $\hat{\theta}_{k,v}$ 是第 v 次实验中信号估计的方向, ϕ_k 和 θ_k 是信号真实的方向。仿真实验的主要参数如表 1 所列。

表 1 仿真实验参数

Table 1 Simulation experiment parameters

参数	实验 1	实验 2	实验 3	实验 4
Array Size	9×9	11×11	9×9	7×7
q	36	36	[10, 60]	30
K	4, 8	[1, 10]	2	2
L	8	3, 6, 9, 12	8	8

实验 1 用于显示多个方向源信号的二维 DOA 的识别能力。假设稀疏阵列是从 9×9 的 URA 中随机选择产生的, 物理传感器的个数 $q = 36$, 快拍数设定为 $L = 8$. $K = 4$ 和 $K = 8$ 个源信号入射到阵列, 其仰角和方位角对为 $\{(\theta_k, \phi_k)\}$, 每两个电子频率对 $(f_{1,k}, f_{2,k})$ 的间隔均大于 Δ_{\min} . 源信号的幅值和相位是随机分配的。使用凸优化工具 CVX^[19] 求解式(19)。在恢复完整数据矩阵集之后, 使用文献[17]中的 Unitary-ESPRIT 方法来估计二维 DOA。通过与真实的 DOA 和文献[20]中的 EMaC 算法恢复的 DOA 进行比较, 检验所提方法的性能, 结果如图 3 所示。可以看到, 在信源数为 4 时, 两种算法都能准确估计出 DOA; 当信源数增加到 8 时, MMV-ANM 算法估计准确, 而 EMaC 算法已经失效。因此, 使用所提方法增加了能够估计出 DOA 的源信号个数。

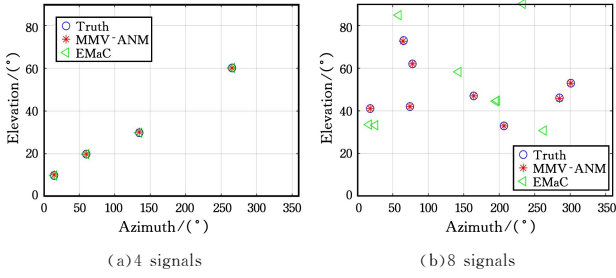


图3 DOA估计的性能.

Fig. 3 Performance of DOA estimation

实验2针对不同的源信号个数(也称为稀疏级别 K),测试二维 DOA 成功估计的概率。稀疏阵列从 11×11 的 URA 中随机选择产生 36 个物联网传感器。根据电子频率分隔条件 $\Delta_T \geq \Delta_{\min}$ 的限制,重复添加新的电子频率对,直到没有电子频率对能够被添加,从而生成入射波 DOA 方向集 T 。因此,在 T 中,任意两个相邻的电子频率对的间隔大于 Δ_{\min} 。假设源信号 $s = [s_{k,l}] \in \mathbb{C}^{K \times L}$ 是从独立同分布的标准复高斯分布中提取的,并且是非相关的。为了评估 MMV 的作用,考虑不同的测量矢量个数 $L=3, 6, 9, 12$; K 值在 $1 \sim 10$ 之间变化。对于每个 L 和 K 值,运行 50 次 Monte Carlo 实验,计算二维 DOA 成功估计的概率。如果估计的二维 DOA 的 RMSE 小于 1×10^{-4} ,则认为估计是成功的。仿真结果如图 4 所示,它证明了在适当的电子频率分隔条件下,全数据矩阵可以被精确恢复。当测量矢量的个数 L 增多时,成功估计的概率显著提升。实验表明,在 ANM 中加入 MMV 显然是有效的,但在 L 增到 6 及以上后这种优势不再明显,对稀疏级别 K 的增加也有限。由于 L 的增大会提高算法的计算复杂度,因此建议 L 取值 8 左右。

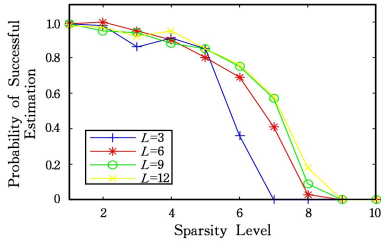

 图4 成功估计的概率 vs. 稀疏级别 K

Fig. 4 Probability of successful estimation vs. sparsity level

实验3在不同物理传感器个数的情况下,比较所提算法与现有算法能够成功估计 DOA 的概率。设快拍数 $L=8$,信号源的个数 $K=2$,其 DOA 设置为 $\{(\theta_k, \phi_k)\} = \{(20^\circ, 170^\circ), (60^\circ, 265^\circ)\}$ 。稀疏阵列是从 9×9 的 URA 中随机选择产生的,物理传感器个数 q 在 $[10, 60]$ 范围内变化。为了证明所提方法中 MMV 的有效性,将其与 EMaC 方法和文献[15]中的二维 ANM 方法进行比较。对于不同的观测值个数 q ,运行 50 次 Monte Carlo 实验来计算二维 DOA 估计的成功率。DOA 成功估计的概率关于 q 的变化曲线如图 5 所示。可以看出,3 种不同方法的性能都随着 q 的增加而提高。显然,文献[15]中的二维 ANM 算法与 EMaC 算法的性能相当,而二维 MMV-ANM 算法的性能最佳,且当 $q > 25$ 时,所提算法成功估计的概率稳定为 1。实验结果表明,MMV 能够将稀疏阵

列中所需物理传感器的比例大幅降低至 30%。

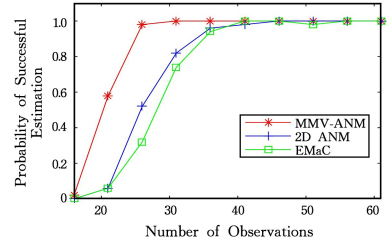

 图5 成功估计的概率 vs. 选择的观测值的数目 q

 Fig. 5 Probability of successful estimation vs. number of selected observations q

实验4根据稀疏阵列 L 个快拍的含噪声测量值来估计二维 DOA。稀疏阵列矢量化的数据矩阵表示为:

$$\mathbf{z}^o = \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (21)$$

其中, \mathbf{n} 是矢量化的噪声矩阵,它的每个元素都是根据独立同分布的高斯噪声 $N(0, \sigma^2)$ 随机生成的。将半正定规划式(19)修改为如下形式,以适应含噪声的情况。

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_x \inf_{\mathbf{U}, \mathbf{W}} \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S}(\mathbf{U})) + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{W}) \right\} \quad (22)$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{U}) & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^H & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \|\mathbf{x}_n - \mathbf{z}_n^o\|_F \leq \sqrt{q}\sigma$$

式(22)的优化问题可进一步重写为如下形式:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_x \inf_{\mathbf{U}, \mathbf{W}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{z}_n^o\|_F^2 + \tau \frac{1}{2} (\text{tr}(\mathbf{S}(\mathbf{U})) + \text{tr}(\mathbf{W})) \right\} \quad (23)$$

其中, τ 是平衡拟合误差和原子范数项的规则化系数。

将本文方法与二维 ANM、EMaC 方法和文献[21]的算法进行比较,以验证在 MMV 的数目 $L=8$ 的情况下通过式(23)恢复数据矩阵的性能。源信号和稀疏矩阵的测量值的生成方式与第一个实验相同,具体参数见表 1。规则化系数 τ 设置为 0.25。信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)在 $[-25, 30]$ 范围内变化。对于每个 SNR,运行 50 次 Monte Carlo 实验。文献[21]的算法是基于虚拟阵列插值的 ANM 算法,可用于一般的稀疏阵列,此算法适用于多快拍的情况,因此设定文献[21]算法中的快拍数为 50。几种算法的仿真结果如图 6 所示。

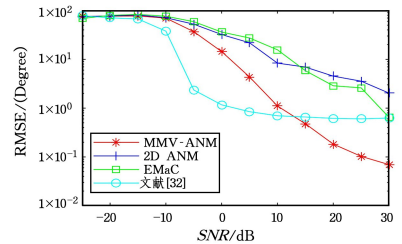


图6 RMSE vs. SNR

Fig. 6 RMSE vs. SNR

实验结果表明,与二维 ANM 算法相比,所提算法能够将 RMSE 降低约 2 dB,并且在 SNR 增加时,所提算法的一致收敛性效果最好,而二维 ANM 和 EMaC 方法的性能相当。由于文献[21]中的算法所用快拍数较大,其估计误差性能在低

信噪比区间上比其他 3 种算法稍优,但是在高信噪比区间上所提算法的性能差。从算法复杂度来看,当快拍数 L 较小时,文献[21]中的算法的计算复杂度比所提算法高。所提算法需要依赖于双重 Toeplitz 结构的 Vandermonde 分解特性才能将原子范数表示为半正定规划,使得半正定规划的约束条件需要将二维数据矩阵矢量化,从而得到 NM 大小的数据矢量,因此二维 MMV-ANM 算法的计算复杂度为 $O((NM+L)^{3.5} \log(1/\epsilon))$, ϵ 是优化精度;文献[21]中的算法用于二维阵列波达角估计时,计算复杂度为 $O((4NM)^{3.5} \log(1/\epsilon))$ 。综合估计误差和计算复杂度来看,快拍数较小时,所提算法在性能上更有优势。

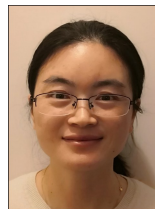
结束语 本文研究多个频谱稀疏源信号入射到稀疏阵列时,根据稀疏阵列的物理传感器观测值来估计源信号的二维 DOA 问题,提出在 MMV 情况下用二维原子范数最小化方法来恢复均匀阵列的全数据矩阵。该方法可通过半正定规划求解,在均匀阵列的数据矩阵恢复之后,使用传统的 Unitary-ESPRIT 方法来估计源信号的二维 DOA。多个数值仿真实验证明,基于任意二维稀疏大规模 MIMO 阵列,使用所提算法来估计二维 DOA,能够显著增加可识别的信源个数,降低估计误差 RMSE,有效提高成功估计的概率。

参 考 文 献

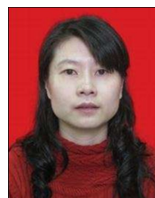
- [1] RAJAMÄKI R, KOIVUNEN V. Sparse active rectangular array with few closely spaced elements [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2018, 25(12): 1820-1824.
- [2] KOZICK R J, KASSAM S A. Synthetic aperture pulse-echo imaging with rectangular boundary arrays [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1993, 2(1): 68-79.
- [3] HOCTOR R T, KASSAM S A. Array redundancy for active line arrays [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1996, 5(7): 1179-1183.
- [4] STOCIA P, MOSES R L. Spectral analysis of signals [M]. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2005: 263-285.
- [5] SCHMIDT R. A signal subspace approach to multiple emitter location spectral estimation [D]. Stanford: Stanford University, 1981.
- [6] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1989, 37(7): 984-995.
- [7] CHANDRASEKARAN V, RECHT B, PARRILO P A, et al. The convex geometry of linear inverse problems [J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2012, 12(6): 805-849.
- [8] CANDÉS E J, FERNANDEZ-GRANDA C. Towards a mathematical theory of super-resolution [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2014, 67(6): 906-956.
- [9] BHASKAR B N, TANG G, RECHT B. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(23): 5987-5999.
- [10] YANG Z, XIE L. On gridless sparse methods for line spectral

estimation from complete and incomplete data [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(12): 3139-3153.

- [11] TANG G, BHASKAR B N, SHAH P, et al. Compressed sensing off the grid [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(11): 7465-7490.
- [12] YANG Z, XIE L. Continuous compressed sensing with a single or multiple measurement vectors [C]// *IEEE Workshop on Statistical Signal Processing (SSP) Gold Coast*. IEEE Press, 2014: 308-311.
- [13] YANG Z, XIE L. Exact joint sparse frequency recovery via optimization methods [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(19): 5145-5157.
- [14] LI Y, CHI Y. Off-the-grid line spectrum denoising and estimation with multiple measurement vectors [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(5): 1257-1269.
- [15] CHI Y, CHEN Y. Compressive two dimensional harmonic retrieval via atomic norm minimization [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(4): 1030-1042.
- [16] BOYD S, VANDENBERGHE L. Convex optimization [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 168-169.
- [17] HAARDT M, ZOLTOWSKI M, MATHEWS C, et al. 2D unitary ESPRIT for efficient 2D parameter estimation [C]// *1995 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. IEEE, 1995.
- [18] YANG Z, XIE L, STOICA P. Vandermonde decomposition of multilevel Toeplitz matrices with application to multidimensional super-resolution [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2016, 62(6): 3685-3701.
- [19] GRANT M, BOYD S, YE Y. CVX: Matlab software for disciplined convex programming [OL]. <http://cvxr.com/cvx/>, 2020.
- [20] CHEN Y, CHI Y. Robust spectral compressed sensing via structured matrix completion [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2014, 60(10): 6576-6601.
- [21] ZHOU C, GU Y, FAN X, et al. Direction-of-Arrival Estimation for Coprime Array via Virtual Array Interpolation [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(22): 5956-5971.



LU Ai-hong, born in 1981, postgraduate Ph.D. Her research interests focus on array signal processing, wireless communications, and compressive sensing.



GUO Yan, born in 1971, Ph.D, professor, Ph.D supervisor. Her main research interests include compressive sensing, MIMO and cognitive radio.