计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.191200056

直觉主义视角下量子逻辑的进一步解释

周 恒 王拥军 王宝山 燕 健
北京航空航天大学数学科学学院 北京 100191
(zhouheng@buaa.edu.cn)

摘 要 量子计算机将成为计算机科学未来的发展方向之一,量子逻辑是反映量子计算与量子信息的数学基础。Von Neumann用希尔伯特空间的闭子空间表示量子物理系统的性质,构成正交模格,其元素有明确的物理意义,但无法刻画叠加性质;Bob Coecke填加析取元素来表示叠加性质,借助Heyting代数,基于正交模格构造命题格对量子逻辑进行刻画,命题格中元素有明确的数学含义,但物理意义不够明确。针对后者,文中对命题格中元素的物理含义做出了进一步的解释,认为补充的析取元素代表的物理意义为描述叠加性质时所依赖的"观察者视角",使得命题格中所有元素都获得了清晰的物理含义,通过阐述量子逻辑在测量时的应用,为量子计算中的隐形传态、超距同步等技术提供了重要的理论依据。

关键词:量子计算机;叠加性质;直觉主义逻辑;析取元素;观察者视角;测量
中图法分类号 O142

Deeper Explanation of Quantum Logic in Intuitionistic Perspective

ZHOU Heng, WANG Yong-jun, WANG Bao-shan and YAN Jian
School of Mathematical Science, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract Quantum computer is becoming one of ongoing research direction of computer science. Quantum logic is the mathematical foundation of quantum computation and quantum information. Von Neumann represented properties of quantum physical systems by closed subspaces of Hilbert space, thus constituting orthomodular lattice. Elements of orthomodular lattice own definite physical understanding but lack of the ability to describe superposition. Therefore, Bob Coecke constructed propositional lattice with Heyting algebra by adding disjunction elements for superposition. Elements of propositional lattice own definite mathematical meaning but lack of physical understanding. For latter, this paper gives a deeper explanation about physical understanding of elements of propositional lattice. As our viewpoint, the added disjunction elements represent "observer perspective", which is required while depicting superposition in propositional lattice. Thus, by applying quantum logic on measurement operation, all elements of propositional lattice are given definite physical understanding and provide theoretical basis for quantum teleportation and action at distance.

Keywords Quantum computer, Superposition, Intuitionistic perspective, Disjunction element, Observer perspective, Measurement

1 引言

Google科学家在*Nature*上给出了量子计算的突破性成果[1]。作为计算机科学、量子力学与逻辑代数相结合的产物,量子计算机必将成为计算机科学未来发展的主要道路。量子逻辑是一种用于研究量子力学基础并极富启发性的非经典逻辑[2],可以反映量子计算与量子信息中的数学刻画。在经典逻辑向量子逻辑过渡的过程中,Birkhoff等在美国数学年刊上发表了著名论文"The Logic of Quantum Mechanics"[3],说明描述量子力学的逻辑与经典逻辑存在着差异性,其核心内容是将各个物理系统用希尔伯特空间的闭子空间来描述,将闭子空间的投射与相应的物理系统中的命题或者事实对应起来,而相应的否命题也就对应元素的正交补。Birkhoff等的研究成果是量子逻辑产生的里程碑,以正交模格为基础扩展出来的量子逻辑,仍然是量子计算研究领域中的一个热点。

Birkhoff等指出,希尔伯特空间的闭子空间的格保持着布尔代数的大量相似特征(布尔代数构成了经典命题逻辑的语义),即它是正交补的而且满足De Morgan律,然而不满足分配律。面对当时向直觉主义逻辑发展的趋势,文中提到:"从纯逻辑的角度来看,命题演算的模型也很令人感兴趣。它们的性质是基于拟物与技术上的推理,与目前引领逻辑学家的内省与哲学的方式不同。逻辑学家通常认为非的(正交补)性质是最禁不起考查的,针对力学的研究指出分配恒等式是逻辑代数中最弱的联系"。该文指出了Heyting代数(直觉主

到稿日期:2019-12-06 返修日期:2020-01-09 本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。
基金项目:国家自然科学基金(11871083)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(11871083).
通信作者:王拥军(wangyj@buaa.edu.cn)

义命题逻辑的语义)与正交模格(通常理解的量子逻辑的语义)之间的基本差异。这种差异使得量子逻辑变为对于传统逻辑领域影响较小的独立的范围。Hardegree[4] 和 Kalmbach[5] 等多次尝试为讨论物理性质而提供逻辑语法,但都先后遭到了如 Goldblatt[6],Malinowski[7] 和 Moore[8] 等的批评,未能使量子逻辑具有令人满意的蕴涵运算。

然而,这两种想法,即物理上考虑不分配的正交补格以及逻辑上考虑分配的伪补格,不是不相容的,而是在物理性质本身以及物理性质的逻辑命题之间有所差异。Bob Coecke 提出,可以用一个数学对象来进行考察,即含有一种额外运算(称为 operational resolution)的完备 Heyting 代数[9-10]。

由希尔伯特空间的闭子空间形成的性质格映射为通过完备 Heyting 代数构成的命题格的过程中,命题格比性质格多了一些元素,Coecke 认为这些元素表达了一些物理性质的叠加性质,是性质格中的元素的析取。本文进一步认为,这些析取元素的物理意义是表示基于"观察者视角"的叠加性质。

本文第 2 节介绍了刻画量子物理系统的传统方式;第 3 节介绍了直觉主义方式描述量子逻辑的相关知识;第 4 节解释了"观察者视角",并分析了"观察者视角"在格运算中的作用;第 5 节对量子逻辑在测量时的应用进行了说明。

2 传统视角的量子逻辑

传统视角的量子逻辑是在格理论的基础上增加了正交模律等性质后形成的逻辑。这里,首先引入格的概念。

2.1 格

定义 1 设 L 为一个非空集合,$\leqslant$ 为 L 上的二元关系,称 $\langle L,\leqslant\rangle$ 为一个偏序,如果对任意 $a,b,c\in L$,满足:

1)(自反性)$a\leqslant a$

2)(反对称性)$a\leqslant b, b\leqslant a\Rightarrow a=b$

3)(传递性)$a\leqslant b, b\leqslant c\Rightarrow a\leqslant c$

定义 2 令 $\langle L,\leqslant\rangle$ 为一个偏序,如果对任意 $a,b\in L$,都存在 a 与 b 的下确界 $a\wedge b$ 和上确界 $a\vee b$,则称 $\mathscr{L}=\langle L,\leqslant,\wedge,\vee\rangle$ 为一个格。$\wedge$ 运算称为 meet,$\vee$ 运算称为 join。

对于格 $\mathscr{L}$,如果存在两个元素 $0,1\in L$ 满足对任意 $a\in L$,都有 $0\leqslant a\leqslant 1$,则称格 $\mathscr{L}$ 是有界的。格的任意子集都有 meet 和 join,即 $\wedge$ 和 $\vee$,即上确界和下确界都存在于 L 中,则称格为完备格。格的任意子集都有 meet,则称为 meet-半格;格的任意子集都有 join,则称为 join-半格。

定义 3 称 $\mathscr{L}=\langle L,\leqslant,\wedge,\vee\rangle$ 是分配的,如果对任意 $a,b,c\in L$,有:

$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

定义 4 称 $\mathscr{L}=\langle L,\leqslant,\wedge,\vee,\neg\rangle$ 为一个正交格,如果 $\mathscr{L}=\langle L,\leqslant,\wedge,\vee\rangle$ 是有界格,$\neg$ 是格上的一个一元运算,满足对于任意 $a,b\in L$,有:

1)(对合律)$\neg(\neg a)=a$

2)(反调性)$a\leqslant b\Rightarrow\neg b\leqslant\neg a$

3)(非矛盾律)$a\wedge\neg a=0$

4)(排中律)$a\vee\neg a=1$

$\neg$ 为正交格上的正交补运算。

注:为了叙述方便,在不引起歧义的情况下,有时也用格中的集合 L 直接表示格本身,不区分 $\mathscr{L}$ 和 L 符号。

2.2 性质格(正交模格)

给定希尔伯特空间,可得其闭子空间类 $Sub(H)$,在 $Sub(H)$ 中给定 3 个运算 $\wedge,\vee,\neg$,其中,$\wedge$ 是求两个闭子空间的交,$\vee$ 是求两个闭子空间张成的闭子空间,$\neg$ 是求一个闭子空间的补空间。$\langle Sub(H),\wedge,\vee,\neg\rangle$ 不满足分配律,取而代之的是比分配律更弱的正交模律。

命题 1(正交模律 OMC) 如果 $a\leqslant b$,则 $a\vee(a'\wedge b)=b$,对偶地,有 $b\wedge(b'\vee a)=a$。

证明对偶:若 $a\leqslant b$,则 $b'\leqslant a'$,进而 $b'\vee(b\wedge a')=a'$,由 De Morgan 律,$a=b\wedge(b\wedge a')'$,即 $b\wedge(b'\vee a)=a$。

$\langle Sub(H),\wedge,\vee,\neg\rangle$ 是一个正交模格,该格以闭子空间的包含为序。以正交模格作为量子力学的数学模型来讨论。以 $Sub(H)$ 为元素产生的正交模格,即为刻画量子系统的性质格。

然而,性质格中的 meet 运算表示闭子空间相交的空间,join 运算表示闭子空间张成的空间,这两种格运算不足以刻画量子力学的特征,因此需要定义运算 $\wedge_s$,其作用相当于闭子空间的投射:

$A\wedge_s B=A\wedge(\neg A\vee B)$

$A\wedge_s B$ 表示 B 在 A 上的投影,或者用 A 对 B 进行测量。注意,$\wedge_s$ 运算没有交换律,其伴随运算是 Sasaki hook $\rightsquigarrow_s$:

$A\rightsquigarrow_s B=\neg A\vee(A\wedge B)$

该运算反映了量子逻辑的推理能力,其关系相当于逻辑推理机制中的分离规则 $a\wedge_s(a\rightsquigarrow_s c)\leqslant c$。

下面证明伴随性:

令 $\varphi_a: L\to L: b\mapsto a\wedge(a'\vee b)$,$\varphi_a^*: L\to L: b\mapsto a'\vee(a\wedge b)$,有 $\varphi_a\dashv\varphi_a^*$,实际上 φ_a 就是 $a\wedge_s\_$,φ_a^* 就是 $a\rightsquigarrow_s\_$。伴随性表示为:

$\varphi_a(b)\leqslant c\Leftrightarrow b\leqslant\varphi_a^*(c)$

即 $a\wedge(a'\vee b)\leqslant c\Leftrightarrow b\leqslant a'\vee(a\wedge c)$。

注:由正交格的性质有 $a=a''$。

$(\Rightarrow)$

$\because a'\leqslant a'\vee b$

$\therefore a'\vee(a\wedge(a'\vee b))=a'\vee b$　　(OMC)

$$\begin{aligned}\because b\leqslant a'\vee b&=a'\vee(a\wedge(a'\vee b))\\&=a'\vee(a\wedge a\wedge(a'\vee b))\\&\leqslant a'\vee(a\wedge c)\end{aligned}$$

$\therefore b\leqslant a'\vee(a\wedge c)$

$(\Leftarrow)$(注:以下证明过程为了形式上的美观,以 $\geqslant$ 来进行偏序运算,其含义与上述证明中的偏序符号 $\leqslant$ 的意义相同,但偏序方向相反。)

$\because a\geqslant a\wedge c$

$\therefore a\wedge(a'\vee(a\wedge c))=a\wedge c$　　(dual OMC)

$$\begin{aligned}\because c\geqslant a\wedge c&=a\wedge(a'\vee(a\wedge c))\\&=a\wedge(a'\vee a'\vee(a\wedge c))\\&\geqslant a\wedge(a'\vee b)\end{aligned}$$

$\therefore c\geqslant a\wedge(a'\vee b)$

$\varphi_a(\varphi_a^*(c))\leqslant c$ 就相当于逻辑推理机制中的分离规则 $a\wedge_s(a\rightsquigarrow_s c)\leqslant c$。

$Sub(H)$中的所有一维闭子空间和零空间表示所有的状态空间。一个一维闭子空间表示当前物理系统所处的一个具体状态,任意闭子空间对一个一维闭子空间进行测量,即投射,得到的仍然是一维闭子空间或零空间。

2.3　叠加

物理系统的性质等同于确定实验投射(Definite Experimental Project)的等价类。确定实验投射是一个精确定义的物理过程,包括在实行该过程时得到的正结果。物理系统的性质构成性质格 L,其中的偏序为性质的真实性(actuality),即若 $a \leqslant b$,则 a 为真,可推出 b 为真。格上的 meet 运算就是合取(conjunction),但是格上的 join 运算并不能看作是析取(disjunction),因为量子系统存在叠加的概念:如果系统中的两个状态用性质 p_1 和 p_2 来表示,那么不同于二者的其他状态 q,只要满足 $q \leqslant p_1 \vee p_2$,就称为 p_1 和 p_2 的叠加。$p_1 \vee p_2$ 的真实性并不能得到 p_1 或 p_2 的真实性,即存在一个状态使得 $p_1 \vee p_2$ 为真,但 p_1 和 p_2 均不为真。

叠加的概念可以扩展为:$a \vee b$ 的真值并不一定含有 a 的真值或 b 的真值,即存在一个状态使 $a \vee b$ 为真,但 a 跟 b 都不为真。对于 $A \subseteq L$,由 A 的 join 得到的叠加态是使 $\vee A$ 为真而没有 $a \in A$ 为真的状态。

为了弥补传统视角量子逻辑对叠加性质刻画的不足,本文引入直觉主义视角量子逻辑。

3　直觉主义视角量子逻辑

为了使格结构能够刻画量子逻辑中的叠加性质,需要对性质格做出一些修改,修改后的格被称为命题格,直觉主义视角量子逻辑就是以命题格为基础进行讨论。

3.1　命题格的提出

正交模格中的元素都是量子物理系统中的可测性质,因此正交模格为刻画量子逻辑的性质格 L。为了刻画量子物理系统中的叠加性质,Bob Coecke 将性质格 L 嵌入到更大的格 H(称为命题格)中,其中的元素为命题,比性质格多出来的元素表示的是性质的析取。这种方式没有冗余,即所有的析取都被保留,任何其他元素 $a \in H$ 表达的都是性质的析取。本文采用 MacNeille 完备化(MacNeille Completion)的方法,为性质格补全其中的析取。

格 L 的 MacNeille 完备化是一个包含 L 的完备格 C,L 是 C 的子格,L 在 C 中是 meet-dense 和 join-dense 的(即 C 的每个元素既是 L 的元素的 join 又是 L 的元素的 meet),如果 C' 是另一个这样的格,则 C 和 C' 对于 L 是同构意义下唯一的且保持 L 不变[11]。在偏序集范畴中,一个对象的 MacNeille 完备化就是它的 injective hull。

这样,对性质的合取与析取将提升为对命题的合取与析取,使性质格嵌入直觉主义逻辑中后有直觉主义的非和蕴涵。

命题格是性质格的“壳”(Injective Hull),壳 H 同构于 $DI(L)$,即 L 的分配理想(Distributive Ideal)。可以将性质格 L 中的每个元素映射为该元素作为理想的生成元而生成的主理想。考虑 L 中多个元素生成的理想,本文定义一个元素作为这样的理想的生成元,便得到了 L 的分配理想。这些理想的生成元即为壳 H 中的元素。

$L \cong \{\downarrow a \mid a \in L\} \hookrightarrow DI(L) \cong H$

$H \cong DI(L) :: a \mapsto \{b \in L \mid b \leqslant a\}; \bigvee_{H} \leftarrow\!\!\dashv A$

命题格上的逻辑连接词如下:

$\wedge_{DI(L)}: P(DI(L)) \to DI(L): \mathscr{A} \mapsto \bigcap \mathscr{A}$

$\vee_{DI(L)}: P(DI(L)) \to DI(L): \mathscr{A} \mapsto C(\bigcup \mathscr{A})$

注:$DI(L)$对并运算未必封闭,故需要定义闭包 C:

$P(L) \to P(L): A \mapsto \bigcap \{B \in DI(L) \mid B \supseteq A\}$。

该闭包算子把 A 映射成 $DI(L)$中刚好包含 A 的集合。

$$\begin{aligned}\Rightarrow_{DI(L)}: DI(L) \times DI(L) \to DI(L): (B, C) \mapsto & \bigvee_{DI(L)} \{A \in DI(L) \mid A \cap B \subseteq C\} \\ & = \{a \in L \mid \forall b \in B, a \wedge b \in C\}\end{aligned}$$

$\neg_{DI(L)}: DI(L) \to DI(L): A \mapsto (A \Rightarrow \downarrow 0)$

$R_{DI(L)}: DI(L) \to DI(L): A \mapsto \downarrow(\bigvee_{L} A)$

其中,“与”和“蕴涵”构成伴随,实际上与 Heyting 代数的伴随相同,因为这种构造方式就是按照 Heyting 代数的思想进行的。将物理系统的性质映射到命题格中的元素后,就可以按照 Heyting 代数的方式进行代数运算。

3.2　命题格与性质格的区别联系

若将命题回归到性质,需要 operational resolution 运算 R:

$R: H \to H: a \mapsto \bigvee_{L} \{c \in L \mid c \leqslant a\}$

$R_{DI(L)}: DI(L) \to DI(L): A \mapsto \downarrow(\bigvee_{L} A)$

按照包含关系将性质格 L 嵌入命题格 H 中,而 R 运算的作用就是将 H 中的命题映射到 L 中的性质上,映射的方式为在 L 中找到使得该命题成立的最强的性质。对于 $a \in H$,如果 $a \in L$,那么 $R(a) = a$;如果 $a \notin L$,而 H 比 L 多出来的命题所表达的是 L 中性质的析取,那么就把 a 映射为 L 中所有比 a 小的元素的上确界。

如图 1 所示,实线表示性质格中的偏序关系,虚线表示命题格中增加的偏序关系。

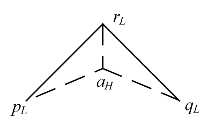

图 1　性质格与命题格的偏序关系

Fig. 1　Partial order of poverty lattice and propositional lattice

p_L, q_L, r_L 都是 L 中的性质,对应于 H 中的命题;而 a_H 是仅存在于 H 中的命题,表示 p_L 和 q_L 的析取,$a_H = \vee(p_L, q_L) \neq r_L$。$R$ 运算将 a_H 映射回 L 中,得到的是比 a 小的元素的上确界,即 r_L,亦即刚好满足命题 a_H 成立而得到的性质。

考虑 $R_{DI(L)}$,同样地,对于 $A \in DI(L)$,如果 $A \subseteq L$,那么 $R(A) = A$;如果 $A \not\subseteq L$,那么 $R(A)$的结果为先在 L 中取 A 的上确界,再得到该上确界生成的理想。换句话说,R 运算将 $DI(L)$中的一个理想映射为一个主理想。

如果给定的性质格是完备格,那么对应的命题格就是完备 Heyting 代数。

注意到,在性质格上的偏序关系为子空间的包含关系;而在命题格上的偏序关系的含义有所改变,命题格中的元素不再是子空间,而是理想,其偏序关系为理想的包含关系。

命题格中的元素有明确的数学含义(理想)与数学运算(Heyting 代数),性质格中的元素代表物理系统中的性质或

状态。那么,命题格比性质格多出来的析取元素代表什么物理含义呢?

4 用观察者视角解释析取元素

通过对命题格与性质格中元素的讨论,本文认为,命题格比性质格多出来的析取元素所代表的物理含义为观察某个性质时的“观察者视角”。

4.1 何谓观察者视角

希尔伯特空间的刻画方式是把希尔伯特空间的闭子空间看作性质,一维闭子空间看作状态,用希尔伯特空间的闭子空间对状态进行测量,将投射看作测量的行为,投射的结果是测量出的状态(性质)。由闭子空间构成的正交模格没有分配律,但是有正交模律。

而直觉主义视角的刻画方法是把性质组成的正交模格看作性质格。性质格是完备的,可以嵌入更大的命题格中,用增加的命题来表示性质的析取,把命题格看作完备 Heyting 代数。命题格中有分配律,但是没有补运算,需要定义伪补。通过 R 运算,可以将命题格中的元素映射回性质格中。

根据命题格的定义,命题格中的元素均为理想。在命题格中有与性质格直接对应的元素,即性质格中的某个元素直接作为理想生成元构成主理想,从而对应命题格中的元素;而命题格中无直接与性质格对应的元素,其是为了表示性质格中元素的“析取”,是性质格中的多个元素作为理想生成元构成的理想。定义一个新元素作为该理想的生成元,使其成为一个主理想,此元素即为命题格中的元素。本文把这种只在命题格中定义而性质格中无对应的元素称作“观察者视角”。

“观察者视角”的出现本质上是为了刻画量子逻辑中的“叠加”现象。性质格中的某些元素 $p_1, p_2, \cdots, p_i$ 作为一组基,不同于这组基的元素 q 满足 $q \leqslant \vee(p_1, p_2, \cdots, p_i)$,$q$ 即为该组基的叠加性质(一维闭子空间又为状态)。叠加性质表示这组基性质的析取,而不是该组基张成的空间。因此,对于这组基 $p_1, p_2, \cdots, p_i$ 生成的理想,定义唯一一个元素,作为该理想的生成元,记作 $\vee(p_1, p_2, \cdots, p_i)$。该元素表示这组基的整体性质(叠加性质),即为命题格中对应的元素。叠加性质是基于所选择的基而产生的性质,一组基对应一个“观察者视角”,命题格中的“观察者视角”元素是由性质格中的多个元素共同决定的。

4.2 空间中的观察者视角

对于不同基所张成的同一空间,在性质格中,只能体现出张成的空间对每个基的包含关系,无法确定该空间是否由不同基所张成;而在命题格中,不仅能够体现张成的空间对基的包含关系,还能表示不同的基,即不同的“观察者视角”分别张成同一空间的关系。

以三维空间为例,给定三维空间如图 2 所示。三维空间中有无限多的一维闭子空间和二维闭子空间。为了选择最简单的模型来说明问题,本文只取 x, y, z 为三维空间的一组标准正交基,a, b 为 y, z 平面上互相垂直的一维闭子空间。其中,x, y, z, a, b 均为一维闭子空间,对应的补 x', y', z', a', b' 为一维空间的补,即二维平面。

对应的性质格如图 3 所示。

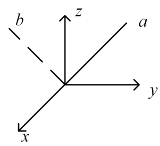

图 2 三维空间

Fig. 2 Three-dimensional space

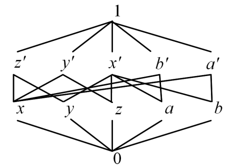

图 3 性质格

Fig. 3 Property lattice

可以验证性质格中的运算成立,如:$z' \wedge_s a = z' \wedge (z \vee a) = z' \wedge x' = y$ 表示将 a 投射到平面 z' 上,得到 y;$a \rightsquigarrow_s x' = a' \vee (a \wedge x') = a' \vee a = 1$ 表示若 a 成立,则 x' 必成立;$x' \rightsquigarrow_s a = x \vee (x' \wedge a) = x \vee a = b'$ 表示在 b' 成立的条件下,若 x' 成立,则 a 成立。

将该性质格嵌入命题格中,补充了性质的析取,结果如图 4 所示。可以看到,(y, z) 与 (a, b) 是张成同一平面的两组基,在性质格中无法区分,而命题格中二者析取的结果不同。

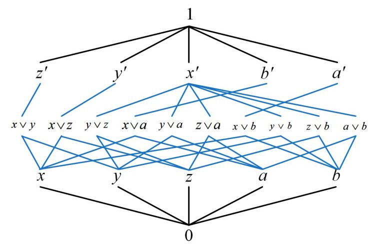

图 4 命题格

Fig. 4 Propositional lattice

注意到,这里只给出了一维闭子空间上升到二维空间的过程中形成的析取,一维与二维空间之间或者二维空间相互之间也有析取,这里为了画图的简洁和清晰并未具体给出。

性质格中的性质均为物理系统中的可测性质,在希尔伯特空间中出现的闭子空间都为性质格中的元素,其表示的就是某个可观测到的性质,因此闭子空间无法表示叠加性质,性质格中也就没有叠加性质对应的元素。而命题格中补充的元素表示的是性质格中元素的析取,刚好表达了叠加性质,而且析取元素正是由原来的某些元素共同决定的,其物理意义即表达了基于某些性质作为观察者视角而得到的叠加性质。

命题格中与性质格有直接对应的元素可直接映射回性质格中的性质,而表示叠加性质的元素无法直接映射回性质格中,只能映射为在不丢失叠加性质信息的前提下最小的元素,即刚好包含叠加性质的闭子空间。

4.3 观察者视角下的正交模律

正交模律只在有偏序关系时成立,因为格中的元素未能完全体现 $\wedge, \vee$ 运算的结果。具体体现在性质格中两个元素的 $\vee$ 并不一定是这两个元素的上确界,性质格中两条线的 $\vee$ 是这两条线张成的平面,而这不是这两条线求 join 所得的结果。换句话说,性质格中 $\wedge, \vee$ 运算下有些结果未能在性质格中体现出来。而一旦两个元素具有偏序关系,无论求 $\wedge$ 还是 $\vee$ 得到的都是二者之一的结果,可以说隐去了格序的影响,因此在此条件下的正交模律有类似分配律的结论。

注意到,当选取的性质格中元素互为正交关系时(即之前以三维空间为例的 x, y, z 3 条线),可验证分配律成立。换句话说,当所讨论的元素有包含关系或者正交关系时,正交模律

就有分配律的效果(两个元素正交时，一个元素与另一个元素的补就有包含关系)，多个元素相互正交时，就相当于取得了“标准正交基”，此时不同的基生成不同的平面，且叠加性质不对偏序关系产生影响，因此仍有分配律的效果。

标准正交基之间不构成叠加关系，只有上述例子中分别取 x，y 和 a，b 讨论时才能体现叠加的影响。二维空间中产生的叠加现象，是在同一平面上，使用不同的基对同一射线进行测量，测量的视角(即基)不同，产生的结果不同。由此体现出叠加性质产生的影响。

不同的基生成同一平面，意味着对该平面上的叠加性质的观察角度不同，在运算的过程中遗漏了观察者视角产生叠加性质带来的影响，因此没有分配律。而对于有偏序或正交关系的元素，偏序意味着包含关系，故不构成基，正交意味着元素之间不会存在不同的基生成同一平面(或高维空间)的情况，因此不构成不同的观察者视角，故没有由不同基在同一平面(或空间)产生不同叠加性质的情况，即这样产生的叠加性质不会在生成高维空间时产生混淆，在 meet 和 join 运算时没有影响，此时也有分配律成立。

5　量子逻辑在测量时的应用

“测量”这一行为是描述量子逻辑的关键特征，同时也是量子计算过程中不可或缺的运算 $\wedge_s$，研究测量行为可为量子计算机中的超距同步、暂态传输等技术提供理论依据。

现有两种方式可以对量子逻辑进行刻画，本节主要讨论这两种刻画方式下，系统中任意给定的对象对系统的状态分别进行测量时二者表现的差异。对于正交模格来说，其测量运算为 $\wedge_s$，而推理运算 Sasaki hook 刚好为测量运算 $\wedge_s$ 的伴随；引入对于叠加性质的刻画后，测量行为对结果的影响方式发生了改变。因此，通过研究两种刻画方式下测量运算的差异，可以间接体现二者在推理性质方面的区别与联系。

首先给出一个例子：高尔夫规则规定，高尔夫球的直径不得小于 1.680 英寸(42.67 mm)。测量方法为，在 23±1 ℃温度下，用直径为 1.680 英寸的环规对随机的 100 个球进行测量，在球自身的重量下，有少于 25 个球从环规中落下，则满足规范。

对于希尔伯特空间的闭子空间来说，测量行为就是用平面(性质)来测量射线(状态)的运算 $\wedge_s$，测量过程就是将被测量的射线(状态)投影到用来测量的平面(性质)中，得到一个新的射线(状态)，如图 5 所示。其中，代表“性质”的平面就相当于测量时的周围环境，如测量时的温度为 23℃，外界的气压、湿度等条件因素。对高尔夫球的“状态”(即直径)进行测量，高尔夫球原来处于一个状态，即具有某个直径，将高尔夫球放置在当前环境中后，此时高尔夫球从原来的状态变成当前环境下的状态，即“测量改变了系统的状态”，而且达到现在的状态以后，再次进行相同的测量后状态不会改变，即当前环境下高尔夫球的直径确定后就不会发生变化。

这也可以解释 $\wedge_s$ 运算的无交换律特点：用“平面”测量“射线”，相当于给定环境条件，测量该环境下的高尔夫球直径的状态，得到的结果就是在当前条件下高尔夫球的直径；反之，若用“射线”测量“平面”，则是给定高尔夫球当前的直径，测量某个环境最能满足当前高尔夫球的状态，测得的结果即高尔夫球本身。换句话说，这就好比是给定了一些公理及定义的知识体系，在当前体系下对某个特定的运算进行测量，结果可以解释为“1＋1＝2”；反之，给定了某个特殊的运算“1＋1＝2”，测量某个知识体系，得到符合当前运算的知识体系，得到的结果只能是“1＋1＝2”本身作为一个知识体系。

这种测量方式相当于对某个具体的高尔夫球进行测量，测量出的结果即为该高尔夫球的直径。通过这种测量方式，只能在可测性质的层面上得到某个高尔夫球的具体性质，而无法得到这些高尔夫球的整体性质，即所谓的叠加性质。

而对于另外一种刻画方式，即引入了叠加性质以后，可以通过狄拉克符号来描述给定一组基的“不确定性”测量 $|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$，如图 6 所示。

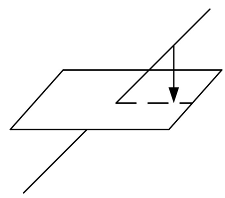

图 5　闭子空间的投射

Fig. 5　Projection of closed subspace

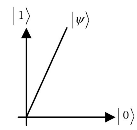

图 6　叠加性质的狄拉克符号表示

Fig. 6　Dirac notation of superposition property

这种方式可以看作当前环境下给出的一组基，ψ 表示当前环境下高尔夫球的“不确定性”状态，$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 分别表示能否从环规中落下，落下为不合格，即为 $|0\rangle$，落不下为合格，即为 $|1\rangle$。α 和 β 分别为 $\sqrt{0.25}$ 和 $\sqrt{0.75}$，$|\alpha|^2$ 和 $|\beta|^2$ 分别表示能否落下的概率，落下的概率为 0.25，不落下的概率为 0.75(可以是其他概率，这里假设这些高尔夫球刚好符合规范要求，对应的概率即为如此)。

在对某个具体的高尔夫球进行测量时，测量之前并不知道这个高尔夫球能否落下，对于每个高尔夫球来说，都有 75％的概率不会落下，25％的概率会落下，测量之后就可以确定该球是否落下，且坍缩到确定的本征态，即确定能落下的高尔夫球再次进行测量还是能落下，确定落不下的高尔夫球无论再测量多少次依然落不下。

这种测量方式相当于将每个高尔夫球都看作处于某种叠加状态 ψ，在测量之前并不能知道每个高尔夫球能不能从环规中落下，经过一次测量以后，落下的高尔夫球的状态变为 $|0\rangle$，没有落下的高尔夫球的状态变为 $|1\rangle$，若同样的环规进行相同的测量，则状态不会再次改变。这种测量方式同样满足“测量改变系统的状态”。换句话说，该方式相当于在第一种测量方式的基础上，在一个平面中给出一组基，用该组基对平面中的射线进行测量，射线以不同概率投影到这组基的每一个分量上，而一旦投影到某个分量之后，再用同一组基对投影后的分量进行测量，得到的结果会以概率 1 投影到相同的分量上，因此不会使结果发生改变。

第一种方式强调外部环境(性质)对状态的改变，即用某个性质对某种可观测的状态进行测量，测量的结果使得原状态变为符合当前性质的某个状态，且用相同的性质对之后的状态再次进行测量并不会改变该状态；第二种方式是在当前

环境下给定一组基,给出当前状态坍缩到基态的可能性,强调对状态本身的描述,即用一组可观测的基态对某个不可观测的叠加状态进行测量,测量的结果为叠加状态以某种概率坍缩到了一个可观测的基态上,且再次用相同的基态对坍缩后的结果进行测量时,会以概率 1 来得到相同的基态,再次测量的结果不会发生改变。换句话说,第一种方式是将某个可测状态 ψ 变成另一个 ψ',第二种方式是将某个叠加状态 $|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ 变成 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 的基态。

这两种测量方式并不是矛盾的。对于性质格中的测量,由于性质格无法表达叠加性质,因此只要元素能够出现在性质格中,其就一定是可测的性质,或者说就是某一种"基态",在性质格中的测量反映的是不同的性质对当前的状态(性质)的改变;而对于叠加状态的测量,由于叠加状态无法在性质格中体现,只能通过狄拉克符号进行表示,因此性质格中的测量方法不再适用,结果可用第 4 节中提到的"用观察者视角解释析取元素"来表示。叠加状态描述的就是"基态"的析取,某个"观察者视角"描述的就是对一组基的选取,测量行为即是将叠加状态坍缩到"观察者视角"下的某个具体结果,即在当前"观察者视角"下测量某个叠加状态所能得到的可能结果。

这两种测量方式虽然都可以表达"测量改变系统的状态"这一结论,但是它们反映的意义是不同的。第一种方式是对可观测的状态(性质)进行改变,用某个具体的性质对状态进行测量,得到的结果为符合测量环境的另一个可观测的状态(性质);第二种方式主要针对不可观测的叠加状态,对其进行的测量是将叠加状态坍缩到某个可观测的"基态",用选取的一组基态进行测量,以相应的概率得到其中一个基态作为结果。

结束语 希尔伯特空间量子逻辑以物理系统的性质为闭子空间构造正交模格(性质格),用一维闭子空间表示物理系统的状态,可以直观地表达"测量"这一行为对系统状态的改变,但是只要是能表达的状态都为可测状态(非叠加状态),用其他闭子空间对状态进行测量会改变当前的状态,得到新的状态,但也是从可测状态到可测状态之间的转变,无法表示叠加性质(一维情况时为叠加状态)。而且,正交模格中的格运算不能直接用于量子逻辑中的数学推理,需要新定义 $\wedge_s$ 和 $\rightsquigarrow_s$ 运算,才能实现逻辑推理机制。

直觉主义视角下的量子逻辑将(可观测的)性质与命题分成两个格,用命题来表示性质的理想,在命题格中补充了析取元素,其物理意义为表示基于"观察者视角"而产生的叠加性质(状态)。

对于命题格中的元素,有基于 Heyting 代数产生的逻辑连接词进行数学推导运算,而且有分配律,便于对物理系统的性质(状态)进行命题演算。

基于正交模格产生的性质格符合人对量子物理的直观认知,而基于完备 Heyting 代数产生的命题格则揭示了量子物理的数学本质。本文明确了命题格中数学元素的物理认知,使得直觉主义视角下的量子逻辑在物理系统中有更好的解释,通过阐述量子逻辑在测量时的应用,为量子计算中的隐形传态、超距同步等技术提供理论依据。

参 考 文 献

[1] ARUTE F, ARYA K, BABBUSH R, et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor[J]. Nature, 2019, 574: 505-510.

[2] SHEN J, GUI Q Q. Quantum Logic: A Brand New Logic Construction [J]. Journal of Anhui University (Philosophy and Social Sciences), 2011, 35(1): 51-58.

[3] BIRKHOFF G, NEUMANN J V. The Logic of Quantum Mechanics[J]. The Annals of Mathematics, 1936, 37(4): 823-843.

[4] HARDEGREE G M. The Conditional in Quantum Logic[J]. Synthese, 1974, 29(1): 63-80.

[5] KALMBACH G. Orthomodular Lattices[M]. London: Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 1983.

[6] GOLDBLATT R. Orthomodularity is not Elementary[J]. Journal of Symbolic Logic, 1984, 49(2): 401-404.

[7] MALINOWSKI J. The Deduction Theorem for Quantum Logic--Some Negative Results[J]. The Journal of Symbolic Logic, 1990, 55(2): 615-625.

[8] MOORE D J. Quantum logic requires weak modularity[J]. Helvetica Physica Acta, 1993(5).

[9] COECKE B. Quantum Logic in Intuitionistic Perspective[J]. Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic, 2002, 70(3): 411-440.

[10] COECKE B, SMETS S. The Sasaki Hook Is Not a [Static]. Implicative Connective but Induces a Backward [in Time]. Dynamic One That Assigns Causes[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2004, 43(7/8): 1705-1736.

[11] GEHRKE M, HARDING J, VENEMA Y. MacNeille completions and canonical extensions[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2006, 358(2): 573-590.

[12] BELLAC M L, JAEGER G. A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation[J]. Physics Today, 2007, 60(5): 64.

[13] RUSSO C. Quantale Modules and their Operators, with Applications[J]. Journal of Logic & Computation, 2010, 20(4): 917-946.

[14] ABRAMSKY S, TZEVELEKOS N. Introduction to Categories and Categorical Logic[J]. Lecture Notes in Physics, 2011, 813(1).

[15] SHI H, WANG B S, WU M H. Distributive Law in Deduction Mechanism of Logic [J]. Computer Science, 2016, 43(S1): 21-24.

ZHOU Heng, born in 1995, postgraduate. His main research interests include theoretical computer science and logical algebra.

WANG Yong-jun, born in 1970, associate professor. His main research interests include logical algebra, quantum logic, data mining, etc.