

# 基于分块集成的图像聚类算法



刘淑君 魏 莱

上海海事大学信息工程学院 上海 201306

(1076626476@qq.com)

**摘要** 基于谱聚类的子空间聚类算法已经显示出良好的效果,但是传统的子空间聚类算法需要将图像进行向量化处理,而这种向量化会导致图像本身携带的二维结构信息的丢失。为了减少这种信息的丢失,文中提出了基于分块集成的图像聚类算法(Block Integration Based Image Clustering, BI-CI)。首先,将图像数据分为若干矩阵块;然后,利用核范数矩阵回归构造基于某一矩阵块的系数矩阵,同时提出了一种依据矩阵块秩信息设定各个矩阵块的权重方法;最后,通过每一系数矩阵及其所对应矩阵块的权重,得到整体系数矩阵。在此系数矩阵上,利用谱聚类算法得到最终的聚类结果。在4个图像数据集上的实验表明,相比现有算法,所提算法具有更强的鲁棒性,可以获得更优的聚类效果。

**关键词:** 子空间聚类; 矩阵块; 核范数; 矩阵回归; 秩

中图法分类号 TP391

## Block Integration Based Image Clustering Algorithm

LIU Shu-jun and WEI Lai

School of Information Engineering, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China

**Abstract** Spectral based subspace clustering algorithms have shown good results. But the traditional subspace clustering algorithms need to vectorize the image, which will lead to the losses of the two-dimensional structure informations carried by the image itself. In order to reduce the losses, block integration based image clustering (BI-CI) algorithm is proposed. First, the images are divided into several matrix blocks. Then, the nuclear norm based matrix regression is used to get the coefficient matrix of one block, and a method is proposed to set the weight for each matrix block according to the rank information of matrix blocks. Finally, based on each coefficient matrix and according to the rank of the corresponding matrix block, the integral coefficient matrix is obtained. The final clustering results are obtained by using spectral clustering performed on the coefficient matrix. Experimental results show that the proposed method is more robust than the existing algorithms and can achieve more accurate clustering results.

**Keywords** Subspace clustering, Block, Nuclear norm, Matrix regression, Rank

## 1 引言

在计算机视觉和图像处理领域,高维数据通常被认为散布于几个不同的线性子空间<sup>[1-2]</sup>。子空间分割<sup>[3-4]</sup>的目标是将数据样本划分到相应的子空间中。在过去的几十年中,许多子空间分割算法被相继提出。根据文献<sup>[5]</sup>的总结,现有的子空间分割算法大致可分为四大类:迭代法<sup>[6-7]</sup>、代数法<sup>[8-9]</sup>、统计方法<sup>[10-11]</sup>和基于谱聚类的方法<sup>[12-15]</sup>。其中,基于谱聚类的方法在运动分割和图像恢复等实际应用中取得了巨大的成功,引起了人们的广泛关注。该类方法的子空间分割可以分解为两个步骤:首先,对一组数据样本构造邻接图;其次,在构造的邻接图上使用特定的谱聚类算法(如 normalize cut, Ncut<sup>[16]</sup>)生成最终的分割结果。其中代表性的方法有稀疏子空间聚类(Sparse Subspace Clustering, SSC)<sup>[17-18]</sup>、基于低秩表示的子空间聚类(Low-Rank Representation, LRR)<sup>[19]</sup>、基

于最小二乘回归的子空间聚类(Least Squares Regression, LSR)<sup>[20]</sup>和光滑表示聚类(Smooth Representation Subspace Clustering, SRSC)<sup>[21]</sup>,以及在这些经典算法的基础上加以改进的算法(如结构化低秩表示(Structure-Constrained Low-Rank Representation, SCLRR)<sup>[22]</sup>)等。

通过研究发现,上述基于谱图的算法都将数据进行了向量化处理,即将数据样本表示成一高维向量,然后通过向量之间的线性表示得到相似度矩阵。但实际上,向量化对于图像和视频等数据来说会存在如下两方面的问题。

(1)信息损失。二维及以上的多维数据样本本身携带的自然结构信息非常丰富,而通过向量化处理将其转化为一维向量后,改变了样本的整体结构特征,从而损失了样本原先的某些结构聚类信息。

(2)数据向量化处理会导致数据维度变高,因此必要时须采取一定的降维措施,否则可能会导致维数灾难<sup>[23]</sup>。

到稿日期:2019-04-09 返修日期:2019-07-29 本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。

基金项目:国家自然科学基金(61203240);上海市科研创新项目(14YZ102)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (61203240) and Shanghai Scientific Research and Innovation Project (14YZ102).

通信作者:魏莱(weilai@shmtu.edu.cn)

为了解决上述问题, Yang 等提出了基于核范数的矩阵回归模型(Nuclear Norm based Matrix Regression, NMR)<sup>[24]</sup>。不同于以前基于一维向量的回归模型,核范数矩阵回归模型 NMR 是一种二维图像矩阵自表示模型。该模型不必事先将图像数据转化为向量,而是在二维图像矩阵的基础上,计算重构误差的核范数。文献[24]的实验结果证明,该方法用于分类能达到非常好的效果。核范数矩阵回归模型的优势可以详细归为以下几点。

(1)保留更多的图像信息。直接以矩阵的形式对图像进行处理,避免了矩阵结构的转换,从而减少了因图像结构变换而带来的结构信息损失。

(2)具有更强的鲁棒性。作为一种相似度度量,在减少光照等影响方面,核范数比一些线性回归模型中使用的  $L_2$  等范数更具有鲁棒性。

(3)去除结构噪声。在损坏的图像中,被遮挡部分或阴影部分的秩很显然是小于整个图像的秩的。当损坏部分的尺寸变大时,噪声像素不稀疏,但误差图像仍然低秩,而且核范数矩阵回归模型可以直接恢复噪声而不需要利用字典。

(4)不必单独处理像素误差。NMR 模型不需要假设像素的表示误差或噪声是独立的,因此也不需要单独处理像素误差,而是通过误差图像的低秩结构,利用核范数对其进行表征。

受到核范数矩阵回归用于分类器方面的启发,在核范数矩阵回归的基础上,本文提出基于分块集成的图像聚类算法。BI-CI 考虑到图像不同子块重要性的不同,对图像预先进行分块,并提出了一种依据矩阵块秩信息来设定各个矩阵块权重的方法,最后通过不同子块得到的邻接图及其权重的加权和获得最终邻接图。

## 2 相关工作

### 2.1 低秩子空间聚类算法

为了更好地使用损坏的观测数据来恢复干净的数据, Liu 等提出了低秩表示算法(LRR)<sup>[19]</sup>。与稀疏子空间聚类算法(SSC)<sup>[17-18]</sup>致力于找到数据集的最稀疏表示不同,低秩表示算法想要得到的是数据集的最低秩表示<sup>[19]</sup>。LRR 的目标函数可以表示为如下形式:

$$\min_{Z, E} \|Z\|_* + \lambda \|E\|_{2,1} \quad (1)$$

$$\text{s. t. } X = XZ + E$$

其中,  $Z$  是  $X$  在字典下的最低秩表示,式(1)中用  $X$  自身作为字典;参数  $\lambda > 0$ ; 误差项  $\|E\|_{2,1} = \sum_{j=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^N (E_{ij})^2}$  用来描述样本一些特殊的异常值。式(1)可用 ADM 算法进行求解,之后将谱聚类算法(N-cut)<sup>[16]</sup>应用到所得到的解之上计算出最终的聚类结果。

基于谱聚类的子空间分割算法如算法 1 所示。

#### 算法 1 基于谱聚类的子空间分割算法(LRR)

输入:  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  以及参数  $\lambda$

输出: 聚类结果  $S$

步骤: 求解目标函数(如式(1)), 得到最优解  $Z^*$

根据最优解构造相似度矩阵  $W: W = (|Z^*| + |Z^{*T}|) / 2$

对  $W$  运用谱聚类算法, 获得最终的聚类方案  $S$

### 2.2 矩阵回归问题

文献[24]提出了矩阵回归问题(Matrix Regression, MR), 可以描述为: 给定图像数据集  $M$ , 其中包含  $n$  个数据矩

阵  $M_1, M_2, \dots, M_n \in \mathbb{R}^{p \times q}$ , 则矩阵  $Y \in \mathbb{R}^{p \times q}$  可用  $M_1, M_2, \dots, M_n$  线性表示为:

$$Y = x_1 M_1 + x_2 M_2 + \dots + x_n M_n + E \quad (2)$$

其中,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是一组表示系数,  $E$  表示误差矩阵。

定义  $\mathbb{R}^n$  域到  $\mathbb{R}^{p \times q}$  域的线性映射:  $M(x) = x_1 M_1 + x_2 M_2 + \dots + x_n M_n$ , 则式(2)可以表示为:

$$Y = M(x) + E \quad (3)$$

式(3)即为矩阵回归的一般模型,文献[24]表明在最优情况下误差矩阵为  $E$ , 也就是  $Y - M(x)$  通常是低秩的, 因此对误差矩阵进行低秩约束可以将式(3)表述为:

$$\min_x \text{rank}(Y - M(x)) \quad (4)$$

式(4)中, 最小秩的优化问题是一个 NP-Hard 问题, 因此该问题常常转化为其凸优化核范数模型<sup>[25-27]</sup>, 于是式(4)可以转化为:

$$\min_x \|Y - M(x)\|_* \quad (5)$$

为了防止过拟合, 加入  $L_2$ -范数正则项则得到以下带有正则项的核范数矩阵回归模型(NMR)。

$$\min_x \|Y - M(x)\|_* + \frac{1}{2} \lambda \|x\|_2^2 \quad (6)$$

其中,  $\lambda$  是正则项的平衡参数。从式(6)可以看出, 在处理图像等数据时, NMR 模型避免了图像数据的向量化, 直接以矩阵的形式进行处理, 同时该模型直接最小化误差的核范数, 避免了目标函数引入过多参数和数据项的问题。

最小化残差的核范数可以解决图像的光照变化和遮挡等图像损坏问题, 因为当图像受光照影响产生阴影或者图像有遮挡时, 其误差矩阵仍然保持低秩结构。实际上, 当残差矩阵不是低秩时, 可以最小化残差的  $L_1$ -范数, 这时模型称为稀疏矩阵回归模型(Sparse-MR), 具体表示为:

$$\min_x \|Y - M(x)\|_1 + \frac{1}{2} \lambda \|x\|_2^2 \quad (7)$$

## 3 基于分块集成的图像聚类算法

在 NMR 的启发下, 本文提出了基于分块集成的图像聚类算法, 同时介绍了矩阵分块以及矩阵块权重的设置方法。

分块集成的图像聚类算法(BI-CI)的流程如图 1 所示。

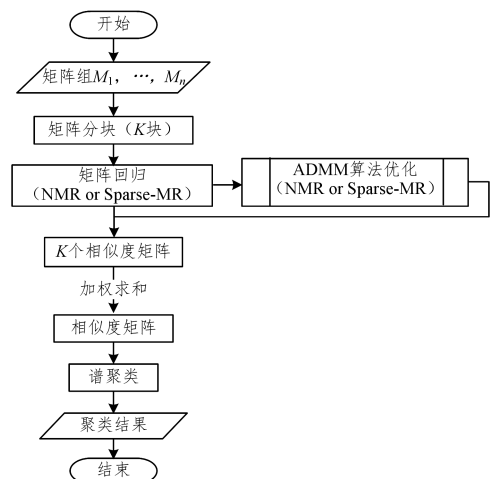


图 1 分块集成的图像聚类算法流程图

Fig. 1 Sketch of block integration based image clustering

### 3.1 矩阵分块

图 1 所示的算法对矩阵进行了分块预处理。矩阵分块的

目的在于捕捉图像的局部信息,一方面图像的局部块信息可以更准确地反映不同图像之间的局部差异;另一方面对于具有光照和阴影等部分损坏的图像,分块可能会将图像的非损坏部分和损坏部分划分开来,可以在一定程度上弱化损坏部分对整体分类的影响。图像分块的方式并不固定,需要根据数据库的具体情况确定。图2展示了一种图像分块方式。

图2的分割方式是按照人脸特征将人脸的不同部位划分开来,以获得不同人脸图像之间相同部位更具针对性的对比,此外,在进行图像分割时还可以根据不同部位之间的相对位置关系等进行划分。

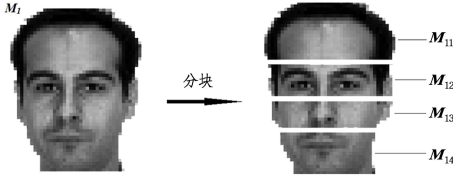


图2 图像分块示意

Fig. 2 Image segmentation into blocks

### 3.2 权重设置

BI-CI 首先将每张图像分成  $K$  块,经过矩阵回归处理后会得到  $K$  个  $n \times n$  的相似度矩阵 ( $n$  为图像总数),显然这  $K$  个矩阵代表的是图像的不同部位,而图像的不同部位包含的信息是不一样的(见图2),由此带来的聚类信息也有所不同。

图3是4个邻接矩阵,分别对应图2中的4个子块  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{13}$  和  $M_{14}$ 。从图3中可以看到,由子块  $M_{11}$  得到的邻接矩阵(见图3(a))的分割效果是最好的,其次是由  $M_{12}$  得到的邻接矩阵(见图3(b)),再次是由  $M_{14}$  得到的邻接矩阵(见图3(d)),最后是由  $M_{13}$  得到的邻接矩阵(见图3(c))。直观上看,我们希望邻接矩阵(见图3(a))能对分割结果起到较大的作用,而其他邻接矩阵(见图3(b)~图3(d))则相应地起较小作用,因此给不同部位的相似度矩阵设置相应的权重是重要而且合理的。众所周知,一个矩阵秩的大小能够反映该矩阵携带的信息量多少,而这些信息量正可以用来权衡一个矩阵的重要性,因此本文使用图像块的秩信息作为权重的设置标准。

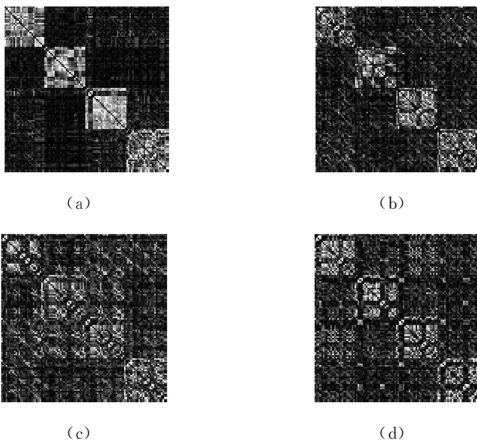


图3 图像不同子块对应的邻接矩阵

Fig. 3 Adjacency matrix corresponding to different sub-blocks of image

给定  $n$  个图像  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , 每个图像根据需要分别按照同样的划分方式划分成  $K$  个矩阵子块,对每个图像的第  $i$  个矩阵子块分别求秩得到  $R_{1i}, R_{2i}, \dots, R_{ni}$  ( $i \in [1, K]$ ), 接下来综合每幅图像对应矩阵子块的秩就可以求得  $n$  个矩阵第  $i$  个矩阵子块的平均秩  $MR_i$ 。

$$MR_i = \frac{\sum_{j=1}^n R_{ji}}{n} \quad (i \in [1, K]) \quad (8)$$

为了使平均秩更准确地反映每个矩阵子块在整体中所占的比重,即每个矩阵子块对分割结果影响的大小,本文采取以下方式确定第  $i$  个矩阵子块的最终权重  $t_i$  为:

$$t_i = \frac{MR_i}{\sum_{l=1}^K MR_l} \quad (i \in [1, K]) \quad (9)$$

由此得到整体权重  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_K\}$ 。根据以上权重计算方式得到图2中的子块  $M_{11}, M_{12}, M_{13}$  以及  $M_{14}$  对应的权重为  $0.3373, 0.2620, 0.1612, 0.2395$ 。可以看到,这个计算结果很好地符合了图3中4个邻接矩阵的直观表现。

根据算法流程,经过矩阵回归之后会得到  $K$  个相似度矩阵,之后需要将这  $K$  个相似度矩阵整合为一个相似度矩阵。本文采取的整合方式是首先根据  $T$  给  $K$  个相似度矩阵分别设置相应的权重,以发挥不同图像子块在聚类中的重要性,然后将这个加权后的带权矩阵相加,合为一个矩阵。即给定一组相似度矩阵  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_K\}$  (注意,这里的每一个  $C_i \in R^{n \times n}$  ( $i = [1 \dots K]$ ) 都是一个  $n \times n$  的矩阵),通过加权求和得到相似度矩阵  $C^*$  :

$$C^* = \sum_{i=1}^K t_i C_i = t_1 C_1 + t_2 C_2 + \dots + t_K C_K \quad (C^* \in R^{n \times n}) \quad (10)$$

通过  $C^*$  构造最终的相似度矩阵  $W = |C^*| + |C^*|^T$ , 最后在  $W$  上使用谱聚类算法得到聚类结果。

## 4 实验和分析

本节通过实验验证本文算法的有效性。实验对比基于谱聚类的相关算法,包括低秩表示(LRR)<sup>[19]</sup>、具有结构约束的低秩表示(SCLR)<sup>[22]</sup>以及最小二乘回归算法(LSR)<sup>[20]</sup>。

### 4.1 实验环境配置

实验环境配置如下。

(1)硬件环境:3.20 GHz Intel(R) Core(TM) i5-6500 处理器,4GB 内存,463GB 硬盘内存。

(2)软件环境:64 位 Windows7 Enterprise 操作系统, R2018a 版本的 Matlab。

### 4.2 实验所用数据集

实验用到4个典型的数据集,分别是 ORL 数据库<sup>[28]</sup>、Yale 数据库<sup>[29]</sup>、AR 数据库<sup>[30]</sup>和 FERET 数据库<sup>[31]</sup>。

(1)ORL 数据库。ORL 数据库包含40个个体中的10个不同的图像。这些照片是在不同的时间拍摄的,有不同的光照、不同的面部表情(睁开/闭上眼睛、微笑/不微笑)和不同的面部细节(戴眼镜/不戴眼镜)。实验中,每个图像都被调整为  $64 \times 64$  像素。图4展示了其中两个人的样本图像。



图4 ORL数据库样本图像

Fig. 4 Sample images of ORL database

(2)Yale数据库。本文所用的Yale人脸数据库包含15个人体实验对象和165张不同光照下的正面近照图像,图像带有光照阴影变化。实验中,每个图像都被调整为 $64 \times 64$ 像素。图5展示了其中一个人的样本图像。



图5 Yale数据库样本图像

Fig. 5 Sample images of Yale database

(3)AR数据库。AR数据库包含126个人的4000多张人脸图像。每个人在两个阶段(间隔两周)共拍摄26张照片,每个阶段包含13张照片。这些图像包括不同表情、光照和遮挡的人脸的正面图像。本文实验使用AR前30人的所有照片(780张照片)。实验中,每个图像都被调整为 $50 \times 40$ 像素。图6展示了其中一个人的样本图像。



图6 AR数据库样本图像

Fig. 6 Sample images of AR database

(4)FERET数据库。FERET人脸数据库包含200个人的1400张人脸图像。每个人在不同的灯光、姿势和表情下拍摄7张照片。实验中每个图像都被调整为 $80 \times 80$ 像素,实验使用该数据库的前28人的所有照片,共196张。图7展示了其中两个人的一些样本图像。



图7 FERET数据库样本图像

Fig. 7 Sample images of FERET database

#### 4.3 在不同数据库上的实验

本节将展示不同算法在上述4个数据库上的实验。

首先,将在4个数据库上分别测试本文算法BI-CI的参

数敏感性。为了提高计算效率,本文将数据映射到其相应的 $n-1$ 维PCA空间, $n$ 是每个数据库中数据样本的数量。然后,令参数 $\lambda$ 在 $[0.001, 10]$ 这个区间范围内改变,并且记录下BI-CI在每个节点相应的分割精度。实验结果如图8所示。

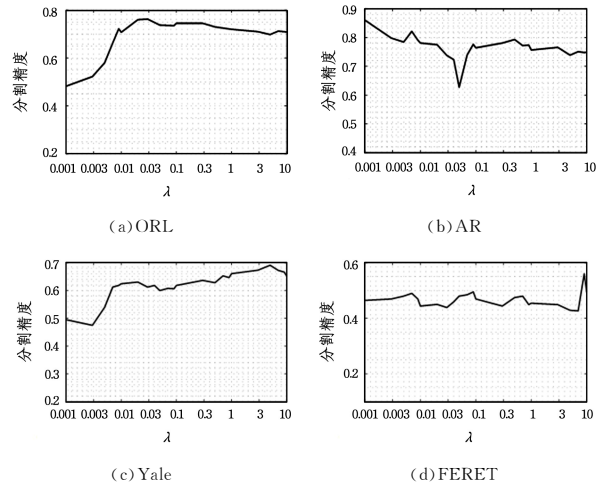


图8 4个数据库上的参数敏感度

Fig. 8 Parameter sensitivity on four databases

从图8可以看出,BI-CI在这4个数据库上都是参数不敏感的。这里所说的参数不敏感是一个相对的问题,指的是算法性能不会随着参数的变化而剧烈地起伏,从ORL以及其他数据库上的实验可以看出,算法性能并没有随着参数的微小改变而发生剧烈的变化。因此本文认为所提算法对参数不敏感。表1列出了BI-CI与3个对比算法LRR,SCLRR以及LSR在以上4个数据库实验中所取得的最佳分割精度对比。为了防止实验结果的随机性,使实验结果更可靠,每一个实验数据都经过5次实验并选取结果中的最大值。在每个数据库上,本文选择两组由不同类别样本构成的两个子集。通过表1可以发现,4个数据库上的最佳结果都是由BI-CI获得,并且AR数据库上的结果远好于其他算法。

为了进行更进一步的比较分析,本文在上述4个数据库中都进行了子数据库结构的实验。每个子数据库都包含数据库中的 $Q$ 个人的图像,其中 $Q$ 的值是从一个相对较小的数不断变化到数据集中类的总数(或者本文选取的类的总数)。然后对本文算法和其他3种对比算法在不同的类别量下进行实验。在这些实验中,每一种算法相应的参数都会会在 $[0.001, 10]$ 范围内进行调整,并且将选择能够使实验达到最高分割精度的参数作为最佳参数。最后记录每一种算法对于不同 $Q$ 的分割精度,实验结果如图9所示。

表1 4个数据库上使用不同算法的分割精度对比

Table 1 Segmentation accuracies of different algorithms on four databases

| 数据集                       | AR            |               | ORL           |               | Yale          |               | FERET         |               |
|---------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
|                           | 12            | 30            | 16            | 40            | 3             | 15            | 4             | 28            |
| LRR( $\lambda$ )          | 0.8221        | 0.8244        | 0.8563        | 0.7775        | 0.6667        | 0.6909        | <b>0.7500</b> | 0.5408        |
| SCLRR( $\beta, \lambda$ ) | 0.7644        | 0.8090        | 0.8625        | 0.7625        | 0.7667        | <b>0.7030</b> | 0.7143        | 0.5459        |
| LSR( $\lambda$ )          | 0.9519        | 0.8564        | 0.9000        | 0.7625        | 0.6667        | 0.6848        | 0.7143        | 0.5102        |
| BI-CI( $\lambda$ )        | <b>0.9760</b> | <b>0.8701</b> | <b>0.9188</b> | <b>0.7800</b> | <b>0.9697</b> | <b>0.7030</b> | <b>0.7500</b> | <b>0.5561</b> |

注:AR数据库下4个算法的最优参数分别为1,(0.001,2),0.1,0.001;ORL数据库下4个算法的最优参数分别为0.9,(0.01,4),2,0.1;Yale数据库下4个算法的最优参数分别为0.7,(0.1,2),0.6,1;FERET数据库下4个算法的最优参数分别为0.8,(0.5,3),0.05,7

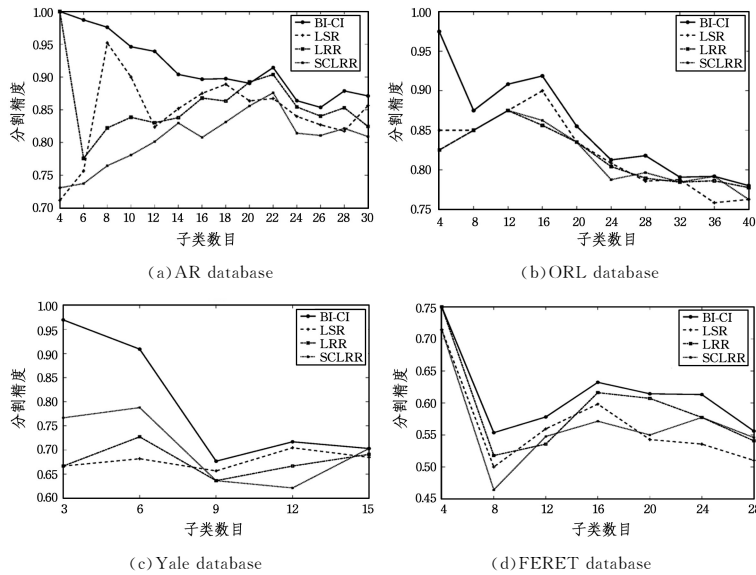


图9 不同子数据库上4种算法的分割精度

Fig. 9 Segmentation accuracies of four algorithms on different sub-databases

从图9可以看出:1)在4个数据库的所有实验中,BI-CI总能得到最好的实验效果;2)BI-CI在AR数据库上的结果比其他算法更优,其稳定性和精确度都高于其他算法。

综上所述可以发现,BI-CI在上述4个数据库上不论是在参数敏感度还是在聚类精度方面都取得了非常不错效果,可能的原因包括以下两点。

(1)由4个数据库上的参数敏感度测试可以看出,最优解搜寻范围较小,整体数值呈稳步变化趋势,变化幅度都非常小,最小变化量不超过0.005。这种稳定趋势主要得益于图像的分块加权,一方面在于权重的设置增强了不同子块对应的对聚类有用的相似矩阵的比重,同时减弱了对聚类作用不大的矩阵的比重,这样对每一次的参数变化都能找到重点相似矩阵;另一方面在于不同的相似矩阵带有不同的特征信息,增强和减弱作用叠加的同时也将这些有利于聚类的特征信息整合到了一起,使得最终的相似矩阵结构更稳定,从而对参数变化更具有鲁棒性。

(2)BI-CI使用矩阵回归模型,在保留分块矩阵整体结构的基础上进行求解,减少了向量化带来的结构信息丢失,从而获得了聚类信息更加丰富的解,同时权重设置又对这些具有丰富聚类信息的解进行了合理的重组整合,得到了更有利于分割的解结构。4个数据库上的实验数据表明,BI-CI更好的解结构获得了更优的分割结果。此外,在AR等数据库上的实验数据可以发现,核范数矩阵回归模型可以很好地捕获并处理包括阴影和遮挡等在内的低秩噪声,恢复图像信息,从而得到更高的分割结果,证明了BI-CI在鲁棒性方面比其他算法要更胜一筹。

**结束语** 本文提出了一种新的图像聚类算法,称为基于分块集成的图像聚类算法(BI-CI)。该算法是在矩阵回归的基础上,采取集成分块的相似矩阵来实现的。分块相当于放大了图像的局部特征,可以对图像有更针对性的比对,从而获取各部位特征的聚类信息。通过矩阵子块的秩信息对不同特征的解进行加权重组,使解更具合理性。同时,矩阵回归能

够改善矩阵向量化带来的信息损失,捕获低秩噪声,对于具有低秩噪声的数据更具有鲁棒性。本文从4个数据库上的实验结果证实了所提算法BI-CI的有效性。

BI-CI可以获得不错的聚类结果,但是运行时间相对较长,本文简单考虑了利用稀疏表示的思想对误差矩阵进行规范,得到稀疏矩阵回归模型,以此处理具有一般噪声的数据,这种模型在运行速度上有较大的优势,有待进一步的研究和探讨。

## 参考文献

- [1] JAIN K A, DUIN R P W, MAO J C. Statistical pattern recognition: a review[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 2000, 22(1): 4-37.
- [2] DUDA R O, HART P E, STORK D G. Pattern Classification (2nd Edition)[M]. Wiley, 2001.
- [3] LI X L, TAO D C. Subspace Learning[J]. Neurocomputing, 2010, 73(10): 1539-1540.
- [4] CHENG H, VU K, HUA K A. SubSpace Projection: A unified framework for a class of partition-based dimension reduction techniques[M]. Elsevier Science Inc., 2009.
- [5] VIDAL R. Subspace Clustering[J]. Signal Processing Magazine IEEE, 2011, 28(2): 52-68.
- [6] SAMARIA F S, HARTER A C. Parameterisation of a stochastic model for human face identification[C]// IEEE Workshop on Applications of Computer Vision. 1994.
- [7] LEE K C, HO J, KRIEGMAN D J. Acquiring Linear Subspaces for Face Recognition under Variable Lighting[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 2005, 27(5): 684-698.
- [8] VIDAL R, MA Y, SASTRY S. Generalized principal component analysis (GPCA)[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(12): 1945-1959.
- [9] MA Y, YANG A Y, FOSSUM D R. Estimation of Subspace Arrangements with Applications in Modeling and Segmenting

- Mixed Data[J]. *SIAM Review*, 2008, 50(3):413-458.
- [10] LEONARDIS A, BISCHOF H, MAVER J. Multiple eigenspaces [J]. *Pattern Recognition*, 2002, 35(11):2613-2627.
- [11] DERKSEN H, MA Y, HONG W, et al. Segmentation of multivariate mixed data via lossy coding and compression[C]// *Visual Communications & Image Processing*. International Society for Optics and Photonics, 2007.
- [12] VIDAL R, FAVARO P. Low rank subspace clustering (LRSC) [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2014, 43(1):47-61.
- [13] PATEL V M, NGUYEN H V, VIDAL R. Latent Space Sparse Subspace Clustering [C] // *IEEE International Conference on Computer Vision*. IEEE, 2014.
- [14] LU C, TANG J, LIN M, et al. Correntropy Induced L2 Graph for Robust Subspace Clustering[C]// *IEEE International Conference on Computer Vision*. IEEE Computer Society, 2013.
- [15] YIN M, GAO J, LIN Z, et al. Dual Graph Regularized Latent Low-Rank Representation for Subspace Clustering [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2015, 24(12):4918-4933.
- [16] SHI J, MALIK J. Normalized cuts and image segmentation[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(8):888-905.
- [17] ELHAMIFAR E, VIDAL R. Sparse subspace clustering [C]// *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2009)*. IEEE, 2009:2790-2797.
- [18] ELHAMIFAR E, VIDAL R. Sparse Subspace Clustering: Algorithm, Theory, and Applications[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, 2013, 35(11):2765-2781.
- [19] LIU G, LIN Z, YAN S, et al. Robust Recovery of Subspace Structures by Low-Rank Representation[J]. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 2012, 35(1):171-184.
- [20] LU C Y, MIN H, ZHAO Z Q, et al. Robust and Efficient Subspace Segmentation via Least Squares Regression[M]// *Computer Vision (ECCV 2012)*. Berlin Heidelberg: Springer, 2014: 347-360.
- [21] HU H, LIN Z, FENG J, et al. Smooth Representation Clustering [C]// *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. IEEE Computer Society, 2014:3834-3841.
- [22] TANG K, LIU R, SU Z, et al. Structure-Constrained Low-Rank Representation[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems*, 2014, 25(12):2167-2179.
- [23] RADOVANOVIC M, NANOPOULOS N, LVANOVIC M, et al. Hubs in Space: Popular Nearest Neighbors in High-Dimensional Data[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2010, 11(5):2487-2531.
- [24] YANG J, QIAN J, LUO L, et al. Nuclear Norm based Matrix Regression with Applications to Face Recognition with Occlusion and Illumination Changes[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, 2014, 39(1):156-171.
- [25] ANDERS H, ZHANG L, LIEVEN V, et al. Subspace system identification via weighted nuclear norm optimization[C]// *2012 IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control (CDC)*. 2012.
- [26] RECHT B, FAZEL M, PARRILO P A. Guaranteed Minimum-Rank Solutions of Linear Matrix Equations via Nuclear Norm Minimization[J]. *SIAM Review*, 2010, 52(3):471-501.
- [27] RECHT B, XU W Y, HASSIBI B. Necessary and sufficient conditions for success of the nuclear norm heuristic for rank minimization[C]// *IEEE Conference on Decision and Control*, 2008. IEEE, 2008:3065-3070.
- [28] SAMARIA F S, HARTER A C. Parameterisation of a stochastic model for human face identification[C]// *IEEE Workshop on Applications of Computer Vision*. 1994.
- [29] LEE K C, HO J, KRIEGMAN D J. Acquiring Linear Subspaces for Face Recognition under Variable Lighting[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, 2005, 27(5):684-698.
- [30] MARTINEZ A M, BENAVENTE R. The AR Face Database [R]. Barcelona: Centre de Visio per Computador Univeresit, 1998.
- [31] HUANG J. The FERET database and evaluation procedure for face recognition[J]. *Image & Vision Computing J*, 1998, 16(5): 295-306.



**LIU Shu-jun**, born in 1993, postgraduate. Her main research interests include pattern recognition and machine learning.



**WEI Lai**, born in 1980, Ph.D, associate professor, postgraduate supervisor. His main research interests include pattern recognition, machine learning and data mining.