

基于二次规划的直觉模糊数的多属性决策方法

张市芳

(西安工业大学计算机科学与工程学院 西安 710021)

摘要 针对属性权重完全未知且属性值为直觉模糊数的多属性决策问题,提出了一种新的决策方法。首先引入了直觉模糊数的一些运算法则、得分函数和精确函数等概念。然后构建了一个二次规划模型,通过求解该模型获得属性的权重。接着利用直觉模糊加权平均(IFWA)算子对属性值进行集结,得到方案的综合属性值。最后利用得分函数和精确函数对方案进行排序并择优。给出的算例说明了该方法的实用性和可行性。

关键词 直觉模糊数,多属性决策,二次规划

中图分类号 TP182,O223 **文献标识码** A

Method of Multi-attribute Decision Making with Intuitionistic Fuzzy Number Based on Quadratic Programming

ZHANG Shi-fang

(School of Computer Science and Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an 710021, China)

Abstract A new method was proposed with respect to multi-attribute decision making problem in which the attribute weights are unknown completely and the attribute values are intuitionistic fuzzy numbers. First, some operational laws, score function and accuracy function of intuitionistic fuzzy numbers were briefly introduced. Further, a quadratic programming model was established and the attribute weights were obtained by solving this model. Moreover, overall attribute values of every alternative were aggregated by utilizing the intuitionistic fuzzy weighted averaging (IFWA) operator. Finally, the alternatives were ranked and the most desirable one was selected according to score function and accuracy function. In addition, an example was given to show the practicality and feasibility of the developed approach.

Keywords Intuitionistic fuzzy number, Multi-attribute decision making, Quadratic programming

1 引言

直觉模糊集^[1]是保加利亚学者 Atanassov 于 1986 年提出的。其同时考虑隶属度和非隶属度两方面的信息,因此比仅考虑单一隶属度的传统模糊集^[2]在处理模糊性和不确定性等方面更具有实用性和灵活性,更能细腻地描述和刻画客观世界的模糊性本质。自从直觉模糊集出现以来,其理论研究已引起人们的广泛关注并取得了丰硕的成果^[3-5]。近年来,一些学者将其应用到多属性决策领域^[5-9]。文献[6]研究了属性权重已知且属性值以直觉模糊数形式给出的多属性决策问题,基于“交”和“并”运算以及加权平均算子给出了决策方法。文献[7]针对属性值为直觉模糊数且决策者对方案有偏好的模糊多属性决策问题,基于得分函数和直觉判断矩阵,利用转换函数建立线性规划模型提出了解决途径。文献[8]基于直觉模糊集理论,提出了一种解决模糊多属性决策问题的灰色关联分析方法。文献[9]针对各决策时段的时间权重及属性权重已知的动态直觉模糊多属性决策问题,提出了一种基于多准则妥协解排序的决策方法。

然而,有关属性权重完全未知且属性值为直觉模糊数的多属性决策问题的研究到目前为止还很少见。为此,本文对其进行探讨,提出了一种基于二次规划模型的直觉模糊数的

多属性决策方法。

2 直觉模糊集基本理论

定义 1^[1] 设 X 是一个非空集合,则称 $A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) | x \in X\}$ 为 X 上的一个直觉模糊集。其中, $\mu_A(x)$ 和 $\nu_A(x)$ 分别表示 X 中的元素 x 属于 A 的隶属度 $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ 和非隶属度 $\nu_A: X \rightarrow [0, 1]$, 且满足条件 $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1, \forall x \in X$ 。

实际中为了方便起见,可将直觉模糊数简记为 (μ_A, ν_A) 。

此外,称 $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ 为 X 中的元素 x 的直觉指数,它表示 x 属于 A 的犹豫度或不确定度。

定义 2^[5] 设 $\tilde{a} = (\mu, \nu)$, $\tilde{a}_1 = (\mu_1, \nu_1)$ 和 $\tilde{a}_2 = (\mu_2, \nu_2)$ 为直觉模糊数,则其运算法则有:

$$1) \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 = (\mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \mu_2, \nu_1 \nu_2);$$

$$2) \lambda \tilde{a} = (1 - (1 - \mu)^\lambda, \nu^\lambda), \lambda > 0.$$

为了对直觉模糊数进行比较,下面给出直觉模糊数的得分函数和精确函数。

定义 3^[5] 设 $\tilde{a} = (\mu, \nu)$ 为一个直觉模糊数,则称

$$s(\tilde{a}) = \mu - \nu \quad (1)$$

为 $\tilde{a}$ 的得分函数,其中 $s(\tilde{a}) \in [-1, 1]$ 。显然, $s(\tilde{a})$ 越大,则 $\tilde{a}$ 越大。

然而,当 $s(\tilde{a}_j)(j=1,2,\dots,n)$ 的值有相等情况出现时,用得分函数就不能对其进行比较。为了解决这类特殊情况,下面给出精确函数的定义。

定义 4^[5] 设 $\tilde{a}=(\mu,\nu)$ 为一个直觉模糊数,则称

$$h(\tilde{a})=\mu+\nu \quad (2)$$

为 $\tilde{a}$ 的精确函数,其中 $h(\tilde{a})\in[0,1]$ 。

得分函数 $s(\tilde{a})$ 和精确函数 $h(\tilde{a})$ 类似于统计学中的均值和方差。因此可以认为,在直觉模糊数的得分函数值相等的情况下,精确函数值越大,相应的直觉模糊数就越大。

基于上述分析,给出直觉模糊数的一种排序方法。

定义 5^[5] 设 $\tilde{a}_1$ 和 $\tilde{a}_2$ 为任意两个直觉模糊数,则:

(1)若 $s(\tilde{a}_1)<s(\tilde{a}_2)$,则 $\tilde{a}_1<\tilde{a}_2$ 。

(2)若 $s(\tilde{a}_1)=s(\tilde{a}_2)$,则

1)当 $h(\tilde{a}_1)=h(\tilde{a}_2)$ 时, $\tilde{a}_1=\tilde{a}_2$;

2)当 $h(\tilde{a}_1)<h(\tilde{a}_2)$ 时, $\tilde{a}_1<\tilde{a}_2$ 。

定义 6^[10] 设 $\tilde{a}_1=(\mu_1,\nu_1)$ 和 $\tilde{a}_2=(\mu_2,\nu_2)$ 为两个直觉模糊数,则这两个直觉模糊数之间的标准化 Hamming 距离为

$$d(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)=(|\mu_1-\mu_2|+|\nu_1-\nu_2|)/2 \quad (3)$$

定义 7^[5] 设 $\tilde{a}_j=(\mu_j,\nu_j)(j=1,2,\dots,n)$ 为一组直觉模糊数,且设 $IFWA:\Theta^n\rightarrow\Theta$,若

$$\begin{aligned} IFWA_w(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_n) &= \sum_{j=1}^n w_j \tilde{a}_j \\ &= (1 - \prod_{j=1}^n (1 - \mu_j)^{w_j}, \prod_{j=1}^n \nu_j^{w_j}) \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $w=(w_1,w_2,\dots,w_n)^T$ 为直觉模糊数组 $\tilde{a}_j(j=1,2,\dots,n)$ 的权重向量, $w_j\in[0,1](j=1,2,\dots,n)$, 且 $\sum_{j=1}^n w_j=1$, 则称 $IFWA$ 为直觉模糊加权平均算子。

3 基于二次规划的直觉模糊多属性决策方法

对于属性权重完全未知且属性值为直觉模糊数的多属性决策问题,设 $X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ 为方案集, $U=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ 为属性集, $w=(w_1,w_2,\dots,w_n)^T$ 为属性的权重向量,其中 $w_j\in[0,1](j=1,2,\dots,n)$, 且 $\sum_{j=1}^n w_j=1$ 。记 $M=\{1,2,\dots,m\}$, $N=\{1,2,\dots,n\}$ 。对方案 x_i 按属性 u_j 进行测度,得到 x_i 关于 u_j 的属性值为直觉模糊数 $\tilde{r}_{ij}=(\mu_{ij},\nu_{ij})$,从而构成直觉模糊决策矩阵 $R=(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}=(\mu_{ij},\nu_{ij})_{m\times n}$,其中 μ_{ij} 表示方案 x_i 满足属性 u_j 的程度, ν_{ij} 表示方案 x_i 不满足属性 u_j 的程度,且 $\mu_{ij}\in[0,1],\nu_{ij}\in[0,1],\mu_{ij}+\nu_{ij}\leq 1,i\in M,j\in N$ 。

由于属性权重完全未知,而属性权重的不确定性会影响到方案排序结果的不同。一般地,若所有方案在属性 u_j 下的属性值差异越小,则说明该属性对方案决策和排序的作用越小;反之,若属性 u_j 能使所有方案的属性值有较大差异,则说明其对方案决策和排序将起重要作用。因此,从对方案进行排序的角度考虑,无论其本身的重要性程度如何,方案属性值偏差越大的属性应该赋予越大的权重,偏差越小的属性应该赋予越小的权重。特别地,若所有方案在属性 u_j 下的属性值无差异,则该属性对方案排序将不起作用,可令其权重为 0^[11]。

基于上述思想,在直觉模糊决策矩阵 R 中,利用标准化 Hamming 距离公式,对第 j 个属性 u_j ,方案 x_i 与其他所有方案之间的偏差为

$$\begin{aligned} d_{ij}(w) &= \sum_{k=1}^m d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{kj}) w_j \\ &= \sum_{k=1}^m ((|\mu_{ij}-\mu_{kj}|+|\nu_{ij}-\nu_{kj}|)/2) w_j \end{aligned} \quad (5)$$

令

$$\begin{aligned} d_j^2(w) &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m d^2(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{kj}) w_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m ((|\mu_{ij}-\mu_{kj}|+|\nu_{ij}-\nu_{kj}|)/2)^2 w_j^2 \end{aligned} \quad (6)$$

则 $d_j^2(w)$ 表示对属性 u_j 而言,所有方案与其他所有方案之间的总偏差平方和。根据上述分析,权重向量 w 的选择应使所有属性对所有方案的总偏差平方和最大。为此,建立二次规划模型如下:

$$\begin{cases} \max d^2(w) = \sum_{j=1}^n d_j^2(w) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m ((|\mu_{ij}-\mu_{kj}|+|\nu_{ij}-\nu_{kj}|)/2)^2 w_j^2 \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j \geq 0, j \in M \end{cases} \quad (7)$$

为了求解此模型,构造 Lagrange 函数如下:

$$\begin{aligned} L(w,\lambda) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m ((|\mu_{ij}-\mu_{kj}|+|\nu_{ij}-\nu_{kj}|)/2)^2 w_j^2 + 2\lambda \\ &\quad (\sum_{j=1}^n w_j - 1) \end{aligned} \quad (8)$$

对 w_j 和 λ 求偏导数,并令其等于零,得

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w_j} = 2 \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m ((|\mu_{ij}-\mu_{kj}|+|\nu_{ij}-\nu_{kj}|)/2)^2 w_j + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2(\sum_{j=1}^n w_j - 1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

即

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m ((|\mu_{ij}-\mu_{kj}|+|\nu_{ij}-\nu_{kj}|)/2)^2 w_j + \lambda = 0 \\ \sum_{j=1}^n w_j = 1 \end{cases} \quad (10)$$

解得

$$w_j = \frac{\frac{1}{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m ((|\mu_{ij}-\mu_{kj}|+|\nu_{ij}-\nu_{kj}|)/2)^2}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m ((|\mu_{ij}-\mu_{kj}|+|\nu_{ij}-\nu_{kj}|)/2)^2}} \quad (11)$$

将 w_j 代入式(4)中,得到方案 x_i 的综合属性值 $\tilde{r}_i(i\in M)$ 。由于 $\tilde{r}_i$ 仍然为直觉模糊数,可以利用定义 5 对方案进行排序择优。

为此,对属性权重完全未知且属性值为直觉模糊数形式的多属性决策问题,给出一种基于二次规划模型的决策方法,其具体步骤如下:

步骤 1 根据直觉模糊决策矩阵构造二次规划模型,确定最优属性权重向量 $w^+=(w_1^+,w_2^+,\dots,w_n^+)^T$ 。

步骤 2 利用 $IFWA$ 算子对直觉模糊决策矩阵 R 中的每一行进行集结,得到每个方案的综合属性值 $\tilde{r}_i(i\in M)$:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_i &= IFWA_{w^+}(\tilde{r}_{i1}, \tilde{r}_{i2}, \dots, \tilde{r}_{in}) = \sum_{j=1}^n w_j^+ \tilde{r}_{ij} \\ &= (1 - \prod_{j=1}^n (1 - \mu_{ij})^{w_j^+}, \prod_{j=1}^n \nu_{ij}^{w_j^+}) \end{aligned} \quad (12)$$

步骤 3 计算各方案综合属性值 $\tilde{r}_i$ 的得分函数 $s(\tilde{r}_i)(i\in M)$ 和精确函数 $h(\tilde{r}_i)(i\in M)$ 。

步骤 4 根据得分函数值和精确函数值的大小对方案 $x_i(i\in M)$ 进行排序并择优。

(下转第 253 页)

验证工作的目标、阶段、层次、内容、指标、方法、过程,为后续从概念建模的全过程、全要素的角度来对其验证打下了基础。

参考文献

- [1] 唐见兵.作战仿真系统可信性研究[D].长沙:国防科学技术大学,2009
- [2] 王勇.复杂仿真系统概念模型建立与评估方法研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2009
- [3] 王杏林.概念建模[M].北京:国防工业出版社,2007:125-131
- [4] Pace D K. Ideas About Simulation Conceptual Model Development[J]. Johns Hopkins APL Technical Digest, 2000, 21(3): 327-336
- [5] Johnson, Thomas H. Mission Space Model Development, Reuse and the Conceptual Models of the Mission Space Toolset[C]//Spring Simulation Interoperability Workshop Papers, 2003:893-900
- [6] 吴永波,何晓晔,谭东风.军事建模仿真中概念模型定义比较

- [J].火力与指挥控制,2007,32(11):49-53
- [7] 刘彬.仿真系统概念模型验证方法的分析与选择[J].计算机仿真,2012,29(5):111-115
- [8] 樊浩,黄树彩.基于Petri网的概念模型验证方法研究[J].计算机应用研究,2010,27(3):999-1002
- [9] 张琦,王达,黄柯棣.概念模型描述方法和验证过程[J].计算机仿真,2004,21(12):70-72
- [10] 黄力.基于Statechart图的C4ISR系统体系结构验证方法研究[D].长沙:国防科学技术大学,2004
- [11] 付广胜.基于xUML可执行模型的C4ISR系统需求开发与验证方法研究[D].长沙:国防科学技术大学,2007
- [12] 陈健.基于本体的仿真想定校验方法研究[D].长沙:国防科学技术大学,2009
- [13] 杨惠珍,李家宽,康凤举.联邦概念模型及其VV&A研究[J].计算机仿真,2009,26(7):109-112
- [14] 胡鹏,邵晨曦.一种军事仿真概念模型的完整性评估方法[J].系统仿真学报,2008,20(16):4207-4210

(上接第244页)

4 实例分析

采用文献[7]实例分析中的数据来说明本文的决策方法。

一个家庭欲购买一台冰箱,现有5种品牌冰箱 $x_i(i=1, 2, \dots, 5)$ 可供选择,主要的评价属性有6项: u_1 为安全性; u_2 为制冷性能; u_3 为结构性; u_4 为可靠性; u_5 为经济性; u_6 为美观性。利用统计方法,得到方案 x_i 对属性 u_j 的满足程度 μ_{ij} 和不满足程度 $\nu_{ij}(i=1, 2, \dots, 5; j=1, 2, \dots, 6)$,记为直觉模糊数 $\tilde{r}_{ij}=(\mu_{ij}, \nu_{ij})$,具体如表1所列。

表1 直觉模糊决策矩阵

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	(0.3, 0.5)	(0.6, 0.3)	(0.6, 0.4)	(0.8, 0.2)	(0.4, 0.5)	(0.5, 0.3)
x_2	(0.7, 0.3)	(0.5, 0.3)	(0.7, 0.2)	(0.7, 0.1)	(0.5, 0.4)	(0.4, 0.1)
x_3	(0.4, 0.3)	(0.7, 0.2)	(0.5, 0.4)	(0.6, 0.3)	(0.4, 0.3)	(0.3, 0.2)
x_4	(0.6, 0.2)	(0.5, 0.4)	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.2)	(0.5, 0.4)	(0.7, 0.3)
x_5	(0.5, 0.3)	(0.3, 0.5)	(0.6, 0.3)	(0.6, 0.2)	(0.6, 0.2)	(0.5, 0.2)

基于直觉模糊决策矩阵,建立二次规划模型,利用式(11)求得最优属性权重向量为

$$w^+ = (0.1204, 0.1151, 0.2409, 0.1454, 0.2141, 0.1641)^T$$

然后利用式(12)计算各方案的综合属性值:

$$\tilde{r}_1 = (0.5623, 0.3596); \tilde{r}_2 = (0.6023, 0.2060);$$

$$\tilde{r}_3 = (0.4874, 0.2871); \tilde{r}_4 = (0.5844, 0.2686);$$

$$\tilde{r}_5 = (0.5454, 0.2573)$$

计算各方案的综合属性值的得分函数值:

$$s(\tilde{r}_1) = 0.2027; s(\tilde{r}_2) = 0.3963; s(\tilde{r}_3) = 0.2003;$$

$$s(\tilde{r}_4) = 0.3158; s(\tilde{r}_5) = 0.2881$$

由于 $s(\tilde{r}_2) > s(\tilde{r}_4) > s(\tilde{r}_5) > s(\tilde{r}_1) > s(\tilde{r}_3)$,得分函数值全不相等,不需要计算精确函数值,故决策者选择的优先顺序为 $x_2 > x_4 > x_5 > x_1 > x_3$,即首先考虑冰箱 x_2 作为最优购买方案。

结束语 本文的主要贡献是针对属性权重完全未知且属性值为直觉模糊数形式的多属性决策问题,提出了一种基于

二次规划模型的决策方法。该方法的基本思想是充分利用已有的决策信息,基于属性值偏差平方和最大建立一个二次规划模型,通过求解该模型获得属性权重。然后利用集结算子进行集结,得到各方案的综合属性值,并根据其得分函数和精确函数值的大小对方案进行优劣排序。实例分析表明,该方法实用可行,具有很好的可操作性。

参考文献

- [1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1):87-96
- [2] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3):338-356
- [3] Atanassov K. Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications [M]. Heidelberg:Physica-Verlag, 1999
- [4] Bustince H, Herrera F, Montero J. Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models [M]. Heidelberg:Physica-Verlag, 2007
- [5] 徐泽水.直觉模糊信息集成理论及应用[M].北京:科学出版社, 2008
- [6] Atanassov K, Pasi G, Yager R R. Intuitionistic fuzzy interpretations of multi-criteria multi-person and multi-measurement tool decision making[J]. International Journal of Systems Science, 2005, 36(14/15):859-868
- [7] 徐泽水.直觉模糊偏好信息下的多属性决策途径[J].系统工程理论与实践, 2007(11):62-71
- [8] 杨红军,雷董礼.基于直觉模糊集多属性决策的灰色关联分析法[J].微电子学与计算机, 2011, 28(9):155-157
- [9] 张市芳,刘三阳,翟任何.动态直觉模糊多属性决策的VIKOR扩展方法[J].计算机科学, 2012, 39(2):240-243
- [10] Wei Gui-wu. Maximizing deviation method for multiple attribute decision making in intuitionistic fuzzy setting[J]. Knowledge-Based Systems, 2008, 21(8):833-836
- [11] 周文坤.一种不确定型多属性决策的组合方法[J].系统工程, 2006, 24(2):96-100