计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.190700047

互连网络的模 p 剩余类加群的笛卡尔积模型

师 腾[1] 师海忠[2]
1 兰州城市学院电子与信息工程学院 兰州 730070
2 西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070
(14709318821@139.com)

摘 要 许多应用领域对系统的计算密度有很高的要求,这里的计算密度指的是系统在一定体积或面积内的计算能力,这也是网格计算和云计算等大量分布式计算不能完全代替超级计算的原因。超级计算机在新兴领域也有大量应用。陈左宁院士指出,美国正在研制一台具有新型先进体系结构(很可能不是经典的体系结构)的E级超级计算机,中国也在积极研制自己的E级超级计算机。互连网络是超级计算机体系结构的重要组成部分,陈国良院士指出,互连网络对系统的性能价格比有决定性的影响。文中设计了互连网络的模 p 剩余类加群的笛卡尔积模型。超立方体和折叠立方体等著名的互连网络都可用这种模型表征,更为重要的是,利用此模型还设计出了多种新的互连网络。这些新的互连网络都有它们各自的特点,也极大地丰富了互连网络的种子库。

关键词:E级超级计算机;互连网络;超立方体;折叠超立方体;模 p 剩余类加群;笛卡尔积;模型
中图法分类号 TP393

Model of Cartesian Product of Modulo p Residual Class Addition Group for Interconnection Networks

SHI Teng[1] and SHI Hai-zhong[2]
1 School of Electronic and Information Engineering,Lanzhou City University,Lanzhou 730070,China
2 College of Mathematics and Statistics,Northwest Normal University,Lanzhou 730070,China

Abstract Many applications require high computational density of the system,the computational density here refers to the computational power of a system in a certain volume or area. This is why a large number of distributed computing such as grid computing and cloud computing cannot completely replace supercomputing. Supercomputers are also widely used in emerging fields. Academician Chen Zuoning pointed out that the United States is developing an exascale supercomputer with a new advanced architecture (probably not a classical one),and China is also actively developing its own exascale supercomputer. Interconnection network is an important part of supercomputer architecture. Academician Chen pointed out that interconnection network is decisive to the performance-price ratio of the system. In this paper,a Cartesian product of modulo p residual class addition groups model for interconnection networks was designed,which can be used to characterize well-known interconnection networks such as hypercube and folded hypercube. More importantly,many new interconnection networks have been designed using this model. These new interconnection networks have their own characteristics and greatly enrich the seed bank of interconnection networks.

Keywords Exascale supercomputer,Interconnection network,Hypercube,Folded hypercube,Modulo p residual class addition group,Cartesian product,Model

1 引言

超级计算机通常由多个甚至成百上千个处理器(机)组成,具有巨大的数据计算能力和数据处理能力,能计算普通个人计算机和服务器不能完成的大型复杂课题。超级计算机广泛应用于科技、工业、军事等的最尖端领域。超级计算机的研制能力已成为国际上衡量一个国家综合国力和科技水平的最重要标志之一。第一个研发出符合超级计算机定义产品的人是西蒙.克雷(Seymour Roger Cray)[1]。20世纪以来,科学计算、科学实验和理论研究一起成为研究世界的三大支柱。超级计算机为解决国家经济建设、科学进步、国家安全等一系列重大挑战问题提供了不可替代的重要手段[2]。在许多应用领域对系统计算密度有很高的要求,这里的计算密度指的是系统在一定体积或面积内的计算能力,这也是网格计算和云计算等大量分布式计算不能完全代替超级计算的原因[2]。

美国正在研制一台具有新型先进体系结构的E级超级计算机原型系统,很可能不是经典的体系结构;中国也正在积极研制自己的E级超级计算机[2]。

互连网络是超级计算机体系结构的重要组成部分,它对系统的性能价格比有着决定性的影响[3]。

互连网络通常模型化为一个图,顶点对应处理器(机),边对应通讯链路[4]。该图(或网络)上的通信由一个信息通信协议来实现,通信延迟由信息经过的边数来度量。这个网络的关键特征指标有它的顶点度、直径、阻塞、对称性、连通度、路

通信作者:师海忠(haizhong.shi@163.com)

由算法以及结构[5,10-11]。典型的互连网络拓扑有圈、完全图、超立方体、折叠立方体、星网络、冒泡排序网络、煎饼网络等[5-13]。为设计出各具特点(因互连网络的有些特征指标是相互矛盾的,例如高连通度和小而固定的顶点度等)的互连网络,文献[5,10-21]提出了互连网络的多种模型。Liu 等[22]研究了“神威.太湖之光”超级计算机系统的应用及 E 级可扩展性。Du 等[23]提出了 d-连续有向图(d-consecutive digraph)的概念。

本文提出了互连网络的模 p 剩余类加群的笛卡尔积模型,超立方体和折叠超立方体等著名的互连网络都可用这种模型来表征,更为重要的是,利用此模型还设计出了多种新的互连网络,这些新的互连网络都有它们各自的特点,极大地丰富了互连网络的种子库。

本文第 2 节介绍了双{1,−1}图生成的模 p 剩余类加群的笛卡尔积图;第 3 节介绍了多{1,−1}超图生成的模 p 剩余类加群的笛卡尔积图;第 4 节介绍了双 1 图生成的模 2 剩余类加群的笛卡尔积网络;第 5 节介绍了加星网络;第 6 节介绍了加煎饼网络;第 7 节介绍了加立方煎饼网络;第 8 节介绍了双 1 图煎饼网络;最后总结全文。

2 双{1,−1}图生成的模 p 剩余类加群的笛卡尔积图

H 是一个有限加法群,S 是 H 的一个生成集且如果 $s\in S$ 则 $-s\in S$。构造图 $Cay(H,S)$:顶点集 $V=H$;对任意的 x,$y\in H$,x 与 y 连一边当且仅当存在 $s\in S$ 使得 $x=y+s$。称该图为 H 关于生成集 S 的加法 Cayley 图,简称为加法 Cayley 图。

设 Z_p 是模 p 剩余类加群,S 是 Z_p 的生成集且对任意的 $s\in S$ 有 $-s\in S$。加法 Cayley 图 $Cay(Z_p,S)$ 的定义如下:顶点集为 Z_p;边集为 $\{(g,g+s)\mid g\in Z_p,s\in S\}$。$m$ 个 Z_p 的笛卡尔积 $Z_p\times Z_p\times\cdots\times Z_p$ 是一个阶数为 p^m 的有限加法群,记为 $(Z_p^m,+)$,其中,$Z_p^m=\{x_mx_{m-1}\cdots x_2x_1\mid x_i\in Z_p,i=1,2,\cdots,m\}$;对任意的 $x_mx_{m-1}\cdots x_2x_1$,$y_my_{m-1}\cdots y_2y_1\in Z_p^m$ 有 $x_mx_{m-1}\cdots x_2x_1+y_my_{m-1}\cdots y_2y_1=(x_m+y_m)(x_{m-1}+x_{m-1}+y_{m-1})\cdots(x_2+y_2)(x_1+y_1)$。

例 1 $S_p(1)=\{100\cdots0,010\cdots0,\cdots,000\cdots01,(-1)00\cdots0,0(-1)0\cdots0,000\cdots(-1)\}$ 是 Z_p^m 的生成集且如果 $s\in S_p(1)$ 则 $-s\in S_p(1)$。那么加法 Cayley 图 $Cay(Z_p^m,S_p(1))$ 就是 p 元 m 维立方体 $Q_m(p)$。

我们引入如下记号:

$S_p(1,1)=\{s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1\mid$ 恰有一对 (i,j) 使得 $s_i,s_j\in\{1,-1\}$ 且 $s_k=0,k\neq i,j,k=1,2,\cdots,m,i,j=1,2,\cdots,m\}$

设 G 是一个顶点集为 $\{1,2,\cdots,m\}$ 和边集为 $E(G)$ 的简单图。定义 $S_p(G)$ 如下:

当 $p>2$ 时,$S_p(G)=\{s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1\mid s_i,s_j\in\{1,-1\}$ 且 $s_k=0,k\neq i,j,k=1,2,\cdots,m$,当且仅当 $(i,j)\in E(G)\}\cup\{100\cdots0,(-1)00\cdots0\}$,此时称 (G,p) 为双{1,−1}图;

当 $p=2$ 时,$S_p(G)=\{s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1\mid s_i,s_j\in\{1\}$ 且 $s_k=0$,$k\neq i,j,k=1,2,\cdots,m$,当且仅当 $(i,j)\in E(G)\}\cup\{100\cdots0\}$,此时称 (G,p) 为双 1 图,记为 $(G,2)$。

这样我们就有下述定理。

定理 1 如果 G 是顶点集为 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的连通图,则 $S_p(G)$ 是加法群 Z_p^m 的生成集且如果 $s\in S_p(G)$ 则 $-s\in S_p(G)$。

证明:由 $S_p(G)$ 定义易知,如果 $s\in S_p(G)$,则 $-s\in S_p(G)$。

下面证明 $S_p(G)$ 是 Z_p^m 的生成集:

(1)$p>2$。易知,$S_p(1)=\{100\cdots0,010\cdots0,\cdots,000\cdots01,(-1)00\cdots0,0(-1)0\cdots0,\cdots,000\cdots0(-1)\}$ 是 Z_p^m 的生成集。

用 $0\cdots01(i)0\cdots0$ 表示 $s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1$ 中仅有第 i 个分量 $s_i=1$,其余的 $s_k=0,k\neq i,k=1,2,\cdots,m$。

用 $0\cdots01(i)0\cdots0$ 表示 $s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1$ 中恰有两个分量 $s_i=1=s_j$,其余的 $s_k=0,k\neq i,j,k=1,2,\cdots,m$。

用 $0\cdots0(-1)(i)0\cdots0(-1)(j)0\cdots0$ 表示 $s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1$ 中恰有两个分量 $s_i=-1,s_j=-1$,其余的 $s_k=0,k\neq i,j,k=1,2,\cdots,m$。

用 $0\cdots0(-1)(i)0\cdots01(j)0\cdots0$ 表示 $s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1$ 中 $s_i=-1,s_j=1$,其余的 $s_k=0,k\neq i,j,k=1,2,\cdots,m$。

用 $0\cdots01(i)0\cdots0(-1)(j)0\cdots0$ 表示 $s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1$ 中 $s_i=1$, $s_j=-1$, 其余的 $s_k=0$, $k\neq i,j,k=1,2,\cdots,m$。

因为双{1,−1}图 (G,p) 中的 G 是连通图,所以,对任意 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$,G 中有一条 1 到 i 的路,记为 $1-j_1-j_2-\cdots-j_k-i$,不防设 $1<j_1<j_2<\cdots<j_k<i$,则:

$$\begin{aligned}0\cdots01(i)0\cdots0=&1(1)0\cdots0+(-1)(1)0\cdots01(j_1)0\cdots0+\\&0\cdots0(-1)(j_1)0\cdots01(j_2)0\cdots0+\cdots+0\cdots\\&0(-1)(j_k)0\cdots1(i)0\cdots0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0\cdots0(-1)(i)0\cdots0=&(-1)(1)0\cdots0+1(1)0\cdots0(-1)(j_1)\\&0\cdots0+0\cdots01(j_1)0\cdots0(-1)(j_2)0\cdots\\&0+\cdots+0\cdots01(j_k)0\cdots(-1)(i)0\cdots0\end{aligned}$$

所以,$S_p(1)$ 中任意元素均可由 $S_p(G)$ 中的元素表示,故 $S_p(G)$ 是 Z_p^m 的生成集。

(2)$p=2$,$0\cdots0(-1)(i)0\cdots0=0\cdots01(i)0\cdots0$,用 $0\cdots01(i)0\cdots01(j)0\cdots0$ 表示 $s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1$ 中恰有两个分量 $s_i=1=s_j$,其余的 $s_k=0,k\neq i,j,k=1,2,\cdots,m$。

因为双 1 图 $(G,2)$ 中的 G 是连通图,所以,对任意 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$,G 中有一条 1 到 i 的路,记为 $1-j_1-j_2-\cdots-j_k-i$,不防设 $1<j_1<j_2<\cdots<j_k<i$,则:

$$\begin{aligned}0\cdots01(i)0\cdots0=&1(1)0\cdots0+1(1)0\cdots01(j_1)0\cdots0+0\cdots01\\&(j_1)0\cdots01(j_2)0\cdots0+\cdots+0\cdots01(j_{k-1})\\&0\cdots01(j_k)0\cdots0+0\cdots01(j_k)0\cdots01(i)0\cdots0\end{aligned}$$

所以,$S_p(1)$ 中任意元素均可由 $S_p(G)$ 中元素表示,故 $S_p(G)$ 是 Z_p^m 的生成集。

证毕。

定义 1 设 G 是顶点集为 $\{1,2,\cdots,m\}$ 和边集为 $E(G)$ 的连通简单图,$p\geqslant2$ 是自然数,进而有:

(1)当 $p>2$ 时,称 Cayley 图 $Cay(Z_p^m,S_p(G))$ 为由双{1,−1}图 (G,p) 生成的模 p 剩余类加群的笛卡尔积图,记为 $Cay(Z_p^m,S_p(G))$;

(2)当 $p=2$ 时,称 Cayley 图 $Cay(Z_p^m,S_p(G))$ 为由双 1 图 (G,p) 生成的模 2 剩余类加群的笛卡尔积图,记为 $Cay(Z_2^m,S_2(G))$。

3 多{1,−1}超图生成的模 p 剩余类加群的笛卡尔积图

设 $HG=(\{1,2,\cdots,m\};E_1,E_2,\cdots,E_n)$ 是一个超图,即

$E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是$\{1,2,\cdots,m\}$上的一个子集簇且满足：

(1)$E_i\neq\emptyset,i=1,2,\cdots,n$；

(2)$\bigcup_{i=1}^{n}E_i=\{1,2,\cdots,m\}$。

如果还满足：

(3)$E_i\subset E_j\Rightarrow i=j$

则称 HG 为简单超图。

在超图 HG 中,$\{1,2,\cdots,m\}$中元素 $1,2,\cdots,m$ 称为顶点,集合 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 称为边。简单图是一个每条边均含 2 个顶点的简单超图。

令 $S_p(HG)=\{s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1\mid s_{i_1},s_{i_2},\cdots,s_{i_l}\in\{1,-1\}$ 且 $s_k=0,k=1,2,\cdots,m$ 且 $k\notin\{i_1,i_2,\cdots,i_l\}$当且仅当存在 HG 的边 $E_q=\{i_1,i_2,\cdots,i_l\}\}\cup\{10\cdots0,(-1)0\cdots0\}$。

当 $S_p(HG)$ 是 Z_p^m 的生成集时,取 T 为顶点集为$\{1,2,\cdots,m\}$的空图,则 HG 与 T 的并超图 $HG\cup T$(它的顶点集为 HG 的顶点集与 T 的顶点集的并集$\{1,2,\cdots,m\}$,它的边集为 HG 的边集与 T 的边集的并集$\{E_1,E_2,\cdots,E_m\}$)为 HG,而且 $S_p(HG\cup T)=S_p(HG)$;当 $S_p(HG)$不是 Z_p^m 的生成集时,取 T 为顶点集为$\{1,2,\cdots,m\}$和边集为 $E(T)$的一棵树,则构造 HG 与 T 的并超图 $HG\cup T$:它的顶点集为 HG 的顶点集与 T 的顶点集的并集$\{1,2,\cdots,m\}$,它的边集为 HG 的边集与 T 的边集的并集$\{E_1,E_2,\cdots,E_m\}\cup E(T)$,而且令 $S_p(HG\cup T)=\{s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1\mid s_{i_1},s_{i_2},\cdots,s_{i_l}\in\{1,-1\}$ 且 $s_k=0,k=1,2,\cdots,m$ 且 $k\notin\{i_1,i_2,\cdots,i_l\}$当且仅当存在 $HG\cup T$ 的边 $E_q=\{i_1,i_2,\cdots,i_l\}\}\cup\{10\cdots0,(-1)0\cdots0\}$。

当 $p>2$ 时,称$(HG\cup T,p)$为多$\{1,-1\}$超图;当 $p=2$ 时,$-1=1$,称$(HG\cup T,p)=(HG\cup T,2)$为多 1 超图。

综上所述,有如下定理。

定理 2　$S_p(HG\cup T)$是 Z_p^m 的生成集且若 $s\in S_p(HG\cup T)$则$-s\in S_p(HG\cup T)$。

证明:当 $S_p(HG)$是 Z_p^m 的生成集时,取 T 为顶点集为$\{1,2,\cdots,m\}$的空图,$S_p(HG\cup T)=S_p(HG)$是 Z_p^m 的生成集。

当 $S_p(HG)$不是 Z_p^m 的生成集时,取 T 为顶点集为$\{1,2,\cdots,m\}$的一棵树,此时,T 是连通图,而 $E(T)$是 $E(HG\cup T)$的子集,因此,$S_p(T)$是 $S_p(HG\cup T)$的子集,由定理 1 知,$S_p(T)$是 Z_p^m 的生成集,因此,$S_p(HG\cup T)$是 Z_p^m 的生成集,而且由 $S_p(HG\cup T)$的定义易知,若 $s\in S_p(HG\cup T)$则$-s\in S_p(HG\cup T)$。

由定理 2 可构造 Cayley 图 $Cay(Z_p^m,S_p(HG\cup T))$。

当 $p>2$ 时,称 $Cay(Z_p^m,S_p(HG\cup T))$为多$\{1,-1\}$超图(HG,p)生成的模 p 剩余类加群的笛卡尔积图,记为 $Cay(Z_p^m,S_p(HG\cup T))$;当 $p=2$ 时,称 $Cay(Z_2^m,S_2(HG\cup T))$为多 1 超图$(HG,2)$生成的模 2 剩余类加群的笛卡尔积图,记为 $Cay(Z_2^m,S_2(HG\cup T))$。

下面我们举几个例子。

例 2　超图 $HG=(\{1,2,\cdots,m\};\{1\},\{2\},\cdots,\{m\})$,

(1)当 $p>2$ 时,$S_p(HG)=\{10\cdots0,010\cdots0,\cdots,0\cdots01,(-1)0\cdots0,0(-1)0\cdots0,\cdots,0\cdots0(-1)\}$是 Z_p^m 的生成集,取 T 为顶点集为$\{1,2,\cdots,m\}$的空图,$HG\cup T=HG$,$S_p(HG\cup T)=S_p(HG)$,$(HG\cup T,p)$为多$\{1,-1\}$超图,Cayley 图 $Cay(Z_p^m,S_p(HG\cup T))$为 p 元 m 维立方体;

(2)当 $p=2$ 时,$S_2(HG)=\{10\cdots0,010\cdots0,\cdots,0\cdots01\}$是 Z_2^m 的生成集,取 T 为顶点集为$\{1,2,\cdots,m\}$的空图,$HG\cup T=HG$,$S_2(HG\cup T)=S_2(HG)$,$(HG\cup T,2)$为多 1 超图,Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(HG\cup T))$为 m 维超立方体 Q_m。

例 3　超图 $HG=(\{1,2,\cdots,m\};\{1\},\{2\},\cdots,\{m\},\{1,2,\cdots,m\})$,$S_2(HG)=\{10\cdots0,010\cdots0,\cdots,0\cdots01,11\cdots1\}$是 Z_2^m 的生成集,取 T 为顶点集为$\{1,2,\cdots,m\}$的空图,$HG\cup T=HG$,$S_2(HG\cup T)=S_2(HG)$,$(HG\cup T,2)$为多 1 超图,Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(HG\cup T))$为 m 维折叠超立方体 FQ_m。

例 4　超图 $HG=(\{1,2,\cdots,m\};\{1\},\{1,2\},\cdots,\{1,2,\cdots,m\})$,称为煎饼超图,记为 P_m,取 T 为顶点集为$\{1,2,\cdots,m\}$的空图,记 $S_p(HG\cup T)$为 $S_p(P_m)$。

(1)当 $p>2$ 时,$S_p(P_m)=\{s_m0\cdots0,s_ms_{m-1}0\cdots0,\cdots,s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1\mid s_i\in\{1,-1\},i=1,2,\cdots,m\}$,是 Z_p^m 的生成集,(P_m,p)为多$\{1,-1\}$煎饼超图,Cayley 图 $Cay(Z_p^m,S_p(P_m))$称为 m 维煎饼模 p 剩余类加群的笛卡尔积网络,记为 $Cay(Z_p^m,S_p(P_m))$;

(2)当 $p=2$ 时,$S_2(P_m)=\{10\cdots0,110\cdots0,\cdots,1\cdots11\}$是 Z_2^m 的生成集,$(P_m,2)$为多 1 煎饼超图,Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(P_m))$称为 m 维煎饼模 2 剩余类加群的笛卡尔积网络,简称为加煎饼网络,记为 AP_m。

定理 3　(1)$p>2$ 时,$S_p(P_m)$有 $2^1+2^2+\cdots+2^m=2^{m+1}-2$ 个元素;

(2)$p=2$ 时,$S_p(P_m)$有 $1^1+1^2+\cdots+1^m=m$ 个元素;

(3)$p>2$ 时,m 维煎饼模 p 剩余类加群的笛卡尔积网络 $Cay(Z_p{}^m,S_p(P_m))$是 $2^{m+1}-2$ 的正则图,有 p^m 个顶点;

(4)$p=2$ 时,m 维煎饼模 2 剩余类加群的笛卡尔积网络 $Cay(Z_2^m,S_2(P_m))$,即加煎饼网络 AP_m 是 m 正则图,有 2^m 个顶点。

4　双 1 图生成的模 p 剩余类加群的笛卡尔积网络

由定义 1 中的(2)有双 1 图$(G,2)$生成的模 2 剩余类加群的笛卡尔积图,当 G 取不同的连通简单图时,即 G 的顶点集为 Z_2^m,边集取如下各种不同的集合,就得到各种互连网络。

(1)G 的边集 $E(G)=\{(1,i)\mid i=2,3,\cdots,m\}$,即 G 是星 ST_m,$S_2(ST_m)=\{110\cdots0,1010\cdots0,10\cdots01\}\cup\{10\cdots0\}$,称 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(ST_m))$为加星网络,记为 AS_m。

(2)G 的边集 $E(G)=\{(i,i+1)\mid i=1,2,\cdots,m-1\}$,即 G 是 1 到 m 的路 B_m,$S_2(B_m)=\{110\cdots0,0110\cdots0,\cdots,0\cdots011\}\cup\{10\cdots0\}$,称 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(B_m))$为加冒泡排序网络,记为 AB_m。

(3)G 的边集 $E(G)=\{(i,i+1)\mid i=1,2,\cdots,m-1\}\cup\{(1,m)\}$,即 G 是圈 MB_m,$S_2(MB_m)=\{110\cdots0,0110\cdots0,\cdots,0\cdots011,10\cdots01\}\cup\{10\cdots0\}$,称 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(MB_m))$为加修正冒泡排序网络,记为 AMB_m。

(4)G 的边集 $E(G)=\{(i,i+1)\mid i=2,3,\cdots,m-1\}\cup\{(1,i)\mid i=2,3,\cdots,m\}$,即 G 是冒泡排序星 BS_m,$S_2(BS_m)=\{0110\cdots0,00110\cdots0,\cdots,0\cdots011\}\cup\{110\cdots0,1010\cdots0,\cdots,10\cdots1\}\cup\{10\cdots0\}$,称 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(BS_m))$为加冒泡排序星网络,记为 ABS_m。

(5)G 的边集 $E(G)=\{(i,i+1)\mid i=2,3,\cdots,m-1\}\cup\{(2,m)\}\cup\{(1,i)\mid i=2,3,\cdots,m\}$,即 G 是轮 W_m,$S_2(W_m)=\{0110\cdots0,00110\cdots0,\cdots,0\cdots011,010\cdots01\}\cup\{110\cdots0,1010\cdots

$0,\cdots,10\cdots1\}\cup\{10\cdots0\}$,称 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(W_m))$ 为加轮网络,记为 AW_m。

(6)G 的顶点集 $V(G)=\{1,2,\cdots,p,p+1,\cdots,m\}$,边集 $E(G)=\{(1,i)\mid i=2,3,\cdots,p\}\cup\{(2,j)\mid j=p+1,p+2,\cdots,m\}$,记为 $DS_{(}p,m)$,$S_2(DS_{(}p,m))=\{110\cdots0,1010\cdots0,\cdots,10\cdots01(p-1)0,10\cdots01(p)0\cdots0\}\cup\{010\cdots01(p+1)0\cdots0,010\cdots01(p+2)0\cdots0,\cdots,010\cdots01(m)\}\cup\{10\cdots0\}$,称 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(DS_{(}p,m)))$ 为加双星网络,记为 $ADS_{(}p,m)$。

(7)G 为 m 阶完全图 CT_m,即 CT_m 的边集 $E(CT_m)=\{(i,j)\mid 1\leqslant i<j\leqslant m\}$,$S_2(CT_m)=\{0\cdots01(i)0\cdots01(j)0\cdots0\mid 1\leqslant i<j\leqslant m\}\cup\{10\cdots0\}$,称 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(CT_m))$ 为加完全网络,记为 ACT_m。

(8)G 的边集 $E(G)=\{(1,2),(1,i),(2,i)\mid i=3,4,\cdots,m\}$,记为 TT_m,称为三角塔,$S_2(TT_m)=\{1010\cdots0,10010\cdots0,\cdots,10\cdots01,0110\cdots0,01010\cdots0,\cdots,010\cdots01\}\cup\{110\cdots0\}\cup\{10\cdots0\}$,称 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(TT_m))$ 为加三角塔网络,记为 ATT_m。

(9)若 G 为顶点集 $V(G)=\{1,2,\cdots,m\}$ 的一棵树 T_m,则称 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(T_m))$ 为加树网络,记为 AT_m。

进而,当双 1 图 G 取不同的连通图时,还可以设计出更多的互连网络。

下文介绍图的 Hamilton 可分解的概念。

定义 3 设 G 是 r 正则连通图,若 G 满足下列条件之一:

(1)当 r 为偶数时,G 可分解为边不交的 $r/2$ 个 Hamilton 圈的并;

(2)当 r 为奇数时,G 可分解为边不交的 $(r-1)/2$ 个 Hamilton 圈和一个完美匹配的并;

则称 G 是 Hamilton 可分解的。

我们提出如下猜想:

猜想 1 如果双 1 图 G 为连通图,则双 1 图 G 生成的模 2 剩余类加群的笛卡尔积图是 Hamilton 可分解的。

针对以上 9 类网络,作为上述猜想 4.1 的特例,我们有:

猜想 1.1 上述 9 类网络 $AS_m,AB_m,AMB_m,ABS_m,AW_m,ADS_m,ACT_m,ATT_m,AT_m$ 中的每一个都是 Hamilton 可分解的。

5 加星网络

下文讨论加星网络 AS_m 的性质。

加星网络 AS_m 的顶点集为 Z_p^m,生成加星网络 AS_m 的双 1 图 ST_m 的顶点集 $V(ST_m)=\{1,2,\cdots,m\}$,边集 $E(ST_m)=\{(1,i)\mid i=2,3,\cdots,m\}$;加星网络 AS_m 的生成集 $S_2(ST_m)=\{10\cdots0,110\cdots0,1010\cdots0,\cdots,10\cdots01\}$。

例 5 加星网络 AS_2 的顶点集 $V(AS_2)=\{00,01,10,11\}$。双 1 图 ST_2 的顶点集 $V(ST_2)=\{1,2\}$,边集 $E(ST_2)=\{(1,2)\}$;加星网络 AS_2 的生成集 $S_2(ST_2)=\{10,11\}$。加星网络 AS_2 的边集 $E(AS_2)=\{(00,10),(00,11),(10,01),(01,11)\}$。

例 6 加星网络 AS_3 的顶点集 $V(AS_3)=\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$。双 1 图 ST_3 的顶点集 $V(ST_3)=\{1,2,3\}$,边集 $E(ST_3)=\{(1,2),(1,3)\}$;加星网络 AS_3 的生成集 $S_2(ST_3)=\{100,110,101\}$。加星网络 AS_3 的边集 $E(AS_3)=\{(000,100),(000,110),(000,101),(001,101),(001,111),(001,100),(010,110),(010,100),(010,111),(011,111),(011,101),(011,110)\}$。

引理 2[10-11] 如果 S 是有限群的极小生成集且不含单位元,则 Cayley 图 $Cay(\Gamma,S)$ 的连通度 $\kappa(Cay(\Gamma,S))=|S|$,其中 $|S|$ 表示 S 中含元素的个数。

引理 3 (1)$S_2(1)=\{10\cdots0,010\cdots0,\cdots,0\cdots01\}$ 是有限加群 Z_2^m 的极小生成集;

(2)$S_2(ST_m)=\{10\cdots0,110\cdots0,1010\cdots0,\cdots,10\cdots01\}$ 与 $S_2(1)$ 等价,即 $S_2(ST_m)$ 与 $S_2(1)$ 中元素可相互表示;

(3)$S_2(ST_m)$ 是 Z_2^m 的极小生成集且不含单位元。

由加星网络 AS_m 的定义、引理 2 及引理 3 可知,加星网络 AS_m 有如下性质:

定理 4 (1)AS_m 有 2^m 个顶点,边数为 $m2^{m-1}$,是 m 正则图;

(2)AS_m 是 Cayley 图,是点可迁图;

(3)AS_m 的连通度为 m;

(4)AS_m 的直径为 m;

(5)AS_m 是二部图 (X,Y),其中,$X=\{1s_{m-1}s_{m-2}\cdots s_2s_1\mid s_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,m-1\}$,$Y=\{0s_{m-1}s_{m-2}\cdots s_2s_1\mid s_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,m-1\}$。

证明:(1)由 AS_m 的定义立即可得。

(2)由 AS_m 的定义立即可得。

(3)由引理 2、引理 3 以及定理 3 中的(2)立即可得。

(4)由 2)知,AS_m 是点可迁图,只要证明顶点 $00\cdots0$ 到某顶点的距离为 m 即可。而当 m 为奇数时,$11\cdots1=00\cdots0+10\cdots0+110\cdots0+1010\cdots0+\cdots+10\cdots01$,因此顶点 $00\cdots0$ 到 $11\cdots1$ 的距离为 m;当 m 为偶数时,$011\cdots1=00\cdots0+10\cdots0+110\cdots0+1010\cdots0+\cdots+10\cdots01$,故顶点 $00\cdots0$ 到 $01\cdots1$ 的距离为 m。总之,无论 m 是奇数还是偶数,顶点 $00\cdots0$ 到某顶点的距离为 m,因此 AS_m 的直径为 m。

(5)显然。

6 加煎饼网络

由第 3 节例 3 中的(2)知,加煎饼网络 AP_m 即为 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(P_m))$,因此 AP_m 是点可迁图。

性质 1 加煎饼网络 AP_m 有 2^m 个顶点,是 m 正则图,边数为 $m2^{m-1}$。

性质 2 在加煎饼网络 AP_m 中,当 m 为偶数时,顶点 $00\cdots0$ 到顶点 $0101\cdots01$ 的距离为 m;当 m 为奇数时,顶点 $00\cdots0$ 到顶点 $0101\cdots011$ 的距离为 $m-1$。

证明:当 m 为偶数时,$0101\cdots01=00\cdots0+01(2)0\cdots0+0001(4)0\cdots0+\cdots+0000\cdots01(m)$,另有 $00\cdots01(2i)00\cdots00=1\cdots1(2i-1)0\cdots0+1\cdots1(2i)0\cdots0$,其中,$i=1,2,\cdots,m/2$,因此,$00\cdots0$ 到 $0101\cdots01$ 的距离为 $m/2\times2=m$。

当 m 为奇数时,$0101\cdots011=00\cdots0+01(2)0\cdots0+0001(4)0\cdots0+\cdots+00\cdots01(m-3)0\cdots0+00\cdots01(m-2)00+00\cdots001(m-1)1(m)$,又有 $00\cdots01(2i)00\cdots0=11\cdots1(2m-1)0\cdots0+11\cdots1(2i)0\cdots0$,其中,$i=1,2,\cdots,(m-3)/2$,而 $00\cdots01(m-1)1(m)=11\cdots1(m-2)00+11\cdots11(m)$,因此 $00\cdots0$ 到 $0101\cdots011$ 的距离 $\frac{为\ m-3}{2}\times2+2=m-1$。

我们提出如下猜想。

猜想 2　加煎饼网络 AP_m 是 Hamilton 可分解的。

7　加立方煎饼网络

显然 $S_1(1)\cup S_2(P_m)$ 是群 Z_2^m 的生成集,因此有 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_1(1)\cup S_2(P_m))$,称 $Cay(Z_2^m,S_1(1)\cup S_2(P_m))$ 为加立方煎饼网络,记为 AQP_m。

AQP_m 有以下性质。

定理 5　加立方煎饼网络 AQP_m 有以下性质:

(1)AQP_m 有 2^m 个顶点和 $(2m-1)2^{m-1}$ 条边;

(2)AQP_m 是 $2m-1$ 正则图;

(3)AQP_m 是 Cayley 图,是点可迁图;

(4)AQP_m 的连通度为 $2m-1$;

(5)AQP_m 的直径为 $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$。

证明:性质(1)—性质(3)由 AQP_m 的定义立即可得。

性质(4):$S_1(1)\cup S_2(P_m)$ 是 AQP_m 的生成集,而 $S_1(1)$ 和 $S_2(P_m)$ 都是 Z_2^m 的极小生成集,而且 $S_1(1)\cap S_2(P_m)=\{10\cdots0\}$,因此 AQP_m 是超立方体 Q_m 和加煎饼网络 AP_m 的并图且仅有 $10\cdots0$ 产生的一条边重叠,又有超立方体 Q_m 和加煎饼网络 AP_m 的连通度都是 m,故 AQP_m 的连通度为 $2m-1$。

性质(5)当 m 为偶数时,

$0101\cdots01=00\cdots00+0100\cdots00+000100\cdots00+\cdots+0000\cdots01$

因此,$00\cdots00$ 到 $0101\cdots01$ 的距离为 $\frac{m}{2}$。

$11\cdots1=00\cdots0+11\cdots1$,因此,$00\cdots0$ 到 $11\cdots1$ 的距离为 1。另有 $00\cdots0$ 到 $11\cdots1(i)0\cdots0$ 的距离为 $1,i=1,2,\cdots,m$。故 $00\cdots0$ 到 $s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1$ 的距离为:

1)$d(00\cdots0,s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1)\leqslant\frac{m}{2}$,当 $s_ms_{m-1}\cdots s_2\ s_1$ 中 1 的个数小于等于 $m/2$ 时;

2)$d(00\cdots0,s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1)=d(11\cdots1,s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1)+1\leqslant\frac{m}{2}$,当 $s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1$ 中 1 的个数大于 $\frac{m}{2}$ 时。

因此,当 m 是偶数时,AQP_m 的直径为 $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$。

当 m 为奇数时,$0101\cdots010=00\cdots0+0100\cdots00+\cdots+0000\cdots010$,所以 $00\cdots0$ 到 $0101\cdots010$ 的距离为 $\frac{m-1}{2}$;

$0101\cdots011=00\cdots0+0100\cdots000+000100\cdots000+\cdots+0000\cdots01(m-3)000+0000\cdots011$

$0000\cdots011=11\cdots1(m-2)00+11\cdots111$

因此,$0000\cdots0$ 到 $0101\cdots011$ 的距离为 $\frac{m-3}{2}+2=\frac{m+1}{2}=\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$;

与 m 是偶数时类似,对 AQP_m 的其他顶点 $s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1$ 都有 $d(00\cdots0,s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1)\leqslant\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$,所以,当 m 是奇数时,AQP_m 的直径为 $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$。

总之,AQP_m 的直径为 $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$。

8　双 1 图煎饼网络

设双 1 图 $(G,2)$ 中 G 是连通图,$S_2(G)=\{s_ms_{m-1}\cdots s_2s_1\mid s_i,s_j\in\{1\}$ 且 $s_k=0,k\neq i,j,k=1,2,\cdots,m$,当且仅当 $(i,j)\in E(G)\}\cup\{100\cdots0\}$;多 1 煎饼超图 $(P_m,2)$ 中 $P_m=(\{1,2,\cdots,m\};\{1\},\{1,2\},\cdots,\{1,2,\cdots,m\})$,$S_2(P_m)=\{10\cdots0,110\cdots0,\cdots,1\cdots11\}$。因为 $S_2(P_m)$ 是 Z_2^m 的生成集,所以 $S_2(G)\cup S_2(P_m)$ 是 Z_2^m 的生成集,这样就有 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(G)\cup S_2(P_m))$,称该 Cayley 图为加双 1 图煎饼网络,记为 AGP_m。

当 G 取不同的连通图时,我们就设计出如下各种新的互连网络:

(1)ST_m 是星,ST_m 的边集合 $E(ST_m)=\{(1,i)\mid i=2,3,\cdots,m\}$,$S_2(ST_m)=\{110\cdots0,10100\cdots0,\cdots,100\cdots01\}\cup\{100\cdots0\}$,这样就有 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(ST_m)\cup S_2(P_m))$,称为加星煎饼网络,记为 ASP_m。

(2)B_m 是路,B_m 的边集合 $E(B_m)=\{(i,i+1)\mid i=1,2,\cdots,m-1\}$,$S_2(B_m)=\{110\cdots0,01100\cdots0,\cdots,000\cdots011\}\cup\{100\cdots0\}$,这样就有 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(B_m)\cup S_2(P_m))$,称为加冒泡排序煎饼网络,记为 ABP_m。

(3)MB_m 是圈,MB_m 的边集合 $E(MB_m)=\{(i,i+1)\mid i=1,2,\cdots,m-1\}\cup\{(1,m)\}$,$S_2(MB_m)=\{110\cdots0,01100\cdots0,\cdots,000\cdots011\}\cup\{100\cdots01\}\cup\{100\cdots0\}$,这样就有 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(MB_m)\cup S_2(P_m))$,称为加修正冒泡排序煎饼网络,记为 $AMBP_m$。

(4)BS_m 是冒泡排序星,BS_m 的边集合 $E(BS_m)=\{(1,i)\mid i=2,3,\cdots,m\}\cup\{(i,i+1)\mid i=2,3,\cdots,m-1\}$,$S_2(BS_m)=\{110\cdots0,10100\cdots0,\cdots,100\cdots01\}\cup\{0110\cdots0,001100\cdots0,\cdots,000\cdots011\}\cup\{100\cdots0\}$,这样就有 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(BS_m)\cup S_2(P_m))$,称为加冒泡排序星煎饼网络,记为 $ABSP_m$。

(5)W_m 是轮,W_m 的边集合 $E(W_m)=\{(1,i)\mid i=2,3,\cdots,m\}\cup\{(i,i+1)\mid i=2,3,\cdots,m-1\}\cup\{(2,m)\}$,$S_2(W_m)=\{110\cdots0,10100\cdots0,\cdots,100\cdots01\}\cup\{0110\cdots0,001100\cdots0,\cdots,000\cdots011\}\cup\{010\cdots1\}\cup\{100\cdots0\}$,这样就有 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(W_m)\cup S_2(P_m))$,称为加轮煎饼网络,记为 AWP_m。

(6)DS_m 是双星,DS_m 的顶点集 $V(DS_m)=\{1,2,\cdots,p,p+1,\cdots,m\}$,$DS_m$ 的边集合 $E(DS_m)=\{(1,i)\mid i=2,3,\cdots,p\}\cup\{(2,i)\mid i=p,p+1,\cdots,m\}$,$S_2(DS_m)=\{110\cdots0,10100\cdots0,\cdots,100\cdots01(p)0\cdots0\}\cup\{010\cdots01(p+1)0\cdots0,010\cdots01(p+2)0\cdots0,\cdots,010\cdots01\}\cup\{100\cdots0\}$,这样就有 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(DS_m)\cup S_2(P_m))$,称为加双星煎饼网络,记为 $ADSP_m$。

(7)CT_m 是 m 阶完全图,CT_m 的边集合 $E(CT_m)=\{(i,j)\mid 1\leqslant i<j\leqslant m\}$,$S_2(CT_m)=\{0\cdots01(i)0\cdots01(j)0\cdots0\mid(i,j)\in E(CT_m)\}\cup\{100\cdots0\}$,这样就有 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(CT_m)\cup S_2(P_m))$,称为加完全煎饼网络,记为 $ACTP_m$。

(8)TT_m 是三角塔,TT_m 的边集合 $E(TT_m)=\{(1,i),(2,i)\mid i=3,4,\cdots,m\}\cup\{(1,2)\}$,$S_2(TT_m)=\{10\cdots01(i)0\cdots0,010\cdots01(i)00\cdots0\mid i=3,4,\cdots m\}\cup\{110\cdots0\}\cup\{100\cdots0\}$,这样就有 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(TT_m)\cup S_2(P_m))$,称为加三角塔煎饼网络,记为 $ATTP_m$。

(9)TR_m 是树,TR_m 的边集合为 $E(TR_m)$,$S_2(TR_m)=\{0\cdots01(i)0\cdots01(j)0\cdots0\mid(i,j)\in E(TR_m)\}\cup\{100\cdots0\}$,这样就有 Cayley 图 $Cay(Z_2^m,S_2(TR_m)\cup S_2(P_m))$,称为加树煎饼网络,记为 $ATRP_m$。

进而，我们提出如下猜想。

猜想 3　双 1 图煎饼网络 AGP_m 是 Hamiton 可分解的。特别地，有：

猜想 3.1　加星煎饼网络 ASP_m 是 Hamilton 可分解的。

猜想 3.2　加冒泡排序煎饼网络 ABP_m 是 Hamilton 可分解的。

猜想 3.3　加修正冒泡排序煎饼网络 $AMBP_m$ 是 Hamilton 可分解的。

猜想 3.4　加冒泡排序星煎饼网络 $ABSP_m$ 是 Hamilton 可分解的。

猜想 3.5　加轮煎饼网络 AWP_m 是 Hamilton 可分解的。

猜想 3.6　加双星煎饼网络 $ADSP_m$ 是 Hamilton 可分解的。

猜想 3.7　加完全煎饼网络 $ACTP_m$ 是 Hamilton 可分解的。

猜想 3.8　加三角塔煎饼网络 $ATTP_m$ 是 Hamilton 可分解的。

猜想 3.9　加树煎饼网络 $ATRP_m$ 是 Hamilton 可分解的。

结束语　陈左宁院士指出，美国正在研制一台具有新型先进体系结构（很可能不是经典的体系结构）的 E 级计算机；中国也在积极研制自己的 E 级计算机。互连网络是超级计算机体系结构的重要组成部分，陈国良院士指出，互连网络对系统的性能价格比有决定性的影响。本文提出了互连网络的模 p 剩余类加群的笛卡尔积模型，利用此模型设计出了多种新的互连网络，进而揭示了这些新互连网络的一些基本性质和特点，当然据此模型还会设计出其他新的互连网络，另外，已设计出的这些互连网络的许多特性还有待进一步的研究。

参 考 文 献

[1] SI H W, FENG L S. Semour Cray: The Father of Supercomputer [J]. Journal of Dialectics of Nature, 2018, 40(7): 127-133.

[2] CHEN Z N. Supercomputers Entering a New Era[J]. Democracy & Science, 2017, 167(4): 24-25.

[3] WANG D X, CHEN G L. Analysis of Interconnection Network Structure[M]. Beijing: Science Press, 1990.

[4] XU J M. A First Course in Graph Theory[M]. Beijing: Science Press, 2015.

[5] AKERS S B, KRISHNAMURTHY B. A Group-Theoretic Model for Symmetric Interconnection Networks[J]. IEEE Transactions on Computers, 1989, 38(4): 555-565.

[6] LEIGHTON F T. Complexity Issues in VLSI: Optimal Layouts for Shuffle-exchange graphs and other networks [C] // Cambridge, MA: MIT Press. 1983: 76-93.

[7] PEASE M C. The Indirect Binary n-cube Microprocessor Array [J]. IEEE Transactions on Computers, 1977, C-26: 458-473.

[8] EI-AMAWY A, LATIFI S. Properties and Performance of Folded Hypercubes[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1991, 2(3): 31-42.

[9] LAKSHMIVARAHAN S, JWO J S, DHALL S K. Symmetry in Interconnection Networks Based on Cayley graphs of permutation groups: A Survey[J]. Parallel Computing, 1993, 19(4): 361-407.

[10] XU J M. Combinatorial Theory in Networks[M]. Beijing: Science Press, 2007.

[11] XU J M. Combinatorial Theory in Networks[M]. Beijing: Science Press, 2013.

[12] SHI H Z. Some New Cartesian Product interconnection Networks[J]. Computer Science, 2013, 40(6A): 265-270, 306.

[13] SHI H Z, LU J B. On Conjectures of Interconnection Networks [J]. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(31): 112-115.

[14] SHI H Z. Regular Graph Connected Cycle: A Unity Model of Many Interconnection Networks[C] // Proceedings of the Tenth National Conference of Operations Research Society of China. Beijing, 2010: 202-208.

[15] SHI H Z, SHI Y. A New Model for Interconnection Networks: k-hierarchical Ring and r-layer graph networks [EB/OL]. http://vdisk.weibo.com/s/dlizJyferZ-ZI.

[16] SHI H Z, SHI Y. A Hierarchical Ring Group-theoretic Model for Interconnection Networks [EB/OL]. http://vdisk.weibo.com/s/dlizJyfeBX-2J.

[17] SHI H Z, SHI Y. Cell-breading graph Model for Interconnection Networks[EB/OL]. http://vdisk.weibo.com/s/dlizJyfesb05y.

[18] SHI H Z. New Model for Interconnection Networks: Multipartite Group-theoretic Model[J]. Computer Science, 2013, 40(9): 21-24.

[19] SHI H Z. A Ring-theoretic Model—for Interconnection Network [D]. Beijing: Doctor Thesis, Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, 1998.

[20] SHI H Z, NIU P F, MA J Y, et al. A Vector Graph Model for Interconnection Networks [J]. Operations Research Transactions, 2011, 15(3): 115-123.

[21] SHI H Z, SHI Y. M-layers Binary Graph Model for Interconnection Networks[J]. Computer Science, 2017, 44(Z2): 308-311.

[22] LIU X, GUO H, SUN R J, et al. The Characteristic Analysis and Exascale Scalability Research of Large Scale Parallel Applications on Sunway TaihuLight Supercomputer[J]. Chinese Journal of Computers, 2018, 41(10): 2209-2220.

[23] DU D Z, HSU F, HWANG F K. Hamiltonian Property of d-consecutive Digraphs[J]. Mathematical and Computing Modeling, 1993, 17(11): 61-63.

SHI Teng, born in 2000. His main research interests include network science and language.

SHI Hai-zhong, born in 1962, Ph.D, professor. His main research interests include interconnection network, graph semigroup, (V, R)-semigroup, undirected graph language, digraph language, random graph language, (V, R)-language, network science and language.