

三维无线自组织网络中最小虚拟骨干的近似算法



易 梦 梁家荣 覃 斌

广西大学计算机与电子信息学院 南宁 530004

广西多媒体通信与网络技术重点实验室 南宁 530004

(1713303010@st.gxu.edu.cn)

摘 要 在均质无线自组织网络中,虚拟骨干(Virtual Backbone,VB)的大小是衡量无线自组织网络质量的一个重要因素,虚拟骨干越小,网络路由开销越少。最小虚拟骨干的求取问题能够抽象为最小连通控制集问题。针对二维无线自组织网络上的单位圆盘图(Unit Disk Graph,UDG)中最小连通控制集问题,目前已有很多研究成果,但是在现实中的某些情况下,单位圆盘图并不能准确地抽象网络。因此,文中提出了在单位球图(Unit Ball Graph,UBG)中构建高质量的连通控制集(Connected Dominating Set,CDS)的算法 ST-CDS,给出了单位球图中独立节点个数的一个优化上界,并进一步利用该优化上界得到连通控制集的性能比。所提算法主要运用构造最小斯坦纳节点的斯坦纳树(Steiner Tree with Minimum Number of Steiner Nodes)方法来优化节点之间的连通部分。理论分析表明,ST-CDS 算法的性能比为 $11.8080 + \ln 11$,是目前已知该方向研究中最好的结果。仿真结果也验证了 ST-CDS 算法的可行性。

关键词: 三维无线自组织网络;虚拟骨干;连通控制集;斯坦纳树;菱形十二面体

中图分类号 TP393

Approximate Algorithm for Minimum Virtual Backbone in 3D Wireless Ad Hoc Networks

YI Meng, LIANG Jia-rong and QIN Bin

School of Computer and Electronics Information, Guangxi University, Nanning 530004, China

Guangxi Key Laboratory of Multimedia Communications and Network Technology, Nanning 530004, China

Abstract In homogeneous wireless ad hoc networks, the size of VB (Virtual Backbone) is an important factor to measure the quality of ad hoc networks, the smaller the virtual backbone, the less the network routing overhead. The problem of minimum virtual backbone can be abstracted into the problem of minimum connected dominating set. There have been a lot of research achievements on the problem of minimum connected dominating set in UDG (Unit Disk Graphs, UDG) on two-dimensional wireless sensor networks, but in some practical cases, unit disk graphs cannot accurately abstract the network. So how to construct high quality CDS (Connected Dominating Set, CDS) in UBG (Unit Ball Graph, UBG) is proposed. In this paper, an optimal upper bound of the number of independent nodes in UBG is given, and the performance ratio of CDS is obtained by using the upper bound. In the proposed algorithm ST-CDS, the method of constructing minimum steiner tree with minimum number of steiner nodes is mainly used to optimize the connecting parts between nodes. Theoretical analysis shows that the performance ratio of ST-CDS algorithm is $11.8080 + \ln 11$, which is the best result among all known researches in this direction. Simulation results also verify the feasibility of the proposed algorithm ST-CDS.

Keywords 3D Wireless ad hoc Network, Virtual backbone, Connected dominating set, Steiner tree, Rhombic dodecahedron

1 引言

在无线网络中,无线传感器网络在特定领域具有传统技术无法比拟的优势,而无线自组织网络通过临时组网支持恶劣环境下移动节点间的无线传输,具有广泛的应用前景。目前,无线自组织网络已被广泛应用于环境监测、健康应用、灾

难救援、战场监控、音乐会、交通控制、移动计算、军事行动等难以在网络中安装基站的应用领域^[1-4]。由于嵌入式传感器、超大规模集成电路和无线电技术的飞速发展,无线传输的成本也相对较低。然而,由于没有固定的基础建设设施,为了有效地解决网络拓扑的变异性,减少冗余路由所带来的不必要的能源消耗以避免信息冲突和广播风暴, Ephremides 等^[5]注

到稿日期:2019-07-06 返修日期:2019-10-15 本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。

基金项目:国家自然科学基金(61862003,61761006);广西壮族自治区自然科学基金(2018GXNSFDA281052,2017GXNSFAA198276)

This work was supported by the Natural Science Foundation of China (61862003,61761006) and Natural Science Foundation of the Guangxi Zhuang Autonomous Region of China (2018GXNSFDA281052,2017GXNSFAA198276).

通信作者:梁家荣(13977106752@163.com)

意到以往的无线网络路由算法都没有尝试使用与分组蜂窝网络的物理主干基础设施类似的结构,于是在1987年他们引入了虚拟骨干网的概念。虚拟骨干网是无线网络节点的一个子集,网络中任意节点之间的每个操作请求都可以转化为虚拟骨干网上的同源操作。在虚拟骨干网中,每个普通节点只需要将消息发送到其所在虚拟骨干网中的周围节点即可,这些周围节点将帮助它将这些消息转发到其目的节点。因此,虚拟骨干网可以大大减少转发进程,一旦网络中使用了虚拟骨干网,路由路径搜索空间将被限制在骨干网中,而不是整个网络,从而可以得到更短的路由路径搜索时间、更小的路由表以及更简单的路由维护。在无线自组织网络中,构建虚拟骨干网的方法有很多,其中基于连通控制集的虚拟骨干网的构建是现有无线传感器网络虚拟骨干网构建方法中的一种具有竞争力的方法。

在均质无线网络中,现有的许多研究^[6-8]都是利用单位圆盘图来抽象二维欧几里德平面上的网络,用单位圆盘图上的节点来代替路由器,节点的传输半径则代表路由器的传输半径。然而,在研究山区^[9]、海洋环境监测、海洋采样网络^[10]等三维空间领域时,UDG模型并不适用。因此本文使用单位球图来对三维无线网络进行建模。事实上,UDG可以看作UBG的一个特例,即所有节点都被约束在同一个平面上,但是UBG的几何性质比UDG更复杂,因此对UBG的最小连通控制集(Minimum Connected Dominating Set, MCDS)进行近似分析要困难得多。注意到,在UDG和UBG中,节点的传输半径都相同,因此可以通过在图中构造一个最小连通控制集来解决在网络中寻找最小虚拟骨干(Minimum Virtual Backbone, MVB)的问题。最小连通控制集问题已经被证明是NP-难问题,因此很多文献提出通过寻找一个MCDS的近似算法来解决该问题。这些近似算法一般分为两个阶段:第一阶段构造一个极大独立集(Maximal Independent Set, MIS),这个极大独立集同时也是一个控制集(Dominating Set, DS);第二阶段通过添加一些其他的点作为连接点,将控制集里的点连通起来,构成一个连通控制集。为了分析连通控制集近似比的性能,需要分解算法,并将每部分分别与最优解进行比较。因此极大独立集与最优解的比值在求解最小连通控制集问题中有着至关重要的作用。本文令 M 表示一个极大独立集, $|M|$ 表示极大独立集 M 的大小。在单位圆盘图中,文献^[11]证明其 $|M| \leq 3.8opt + 1.2$,经过一系列算法以及几何方法的改进,目前已有文献中最好的结果是 $|M| \leq 3opt + 3$ ^[12]。在单位球图中, Kim等^[13]证明其 $|M| \leq 10.917opt + 1.083$ 以及算法近似比为14.937,这是目前已知最优的极大独立集的上界和最优的CDS的算法近似比。CDS算法的近似比即算法生成的连通控制集与最小连通控制集的比值,该值越小,说明算法产生的CDS越小,算法性能更好,因此也称其为算法性能比。Gao等^[14]指出文献^[13]的分析过程有一个错误,并对其进行了修正。优化算法近似比的另一个方向是减少连接点的个数,在UDG中通常采用最小斯坦纳树的方法。受此启发,本文在三维无线自组织网络抽象出的UBG模型下,运用类似的思想给出了一个关于连

通控制集的近似算法,并且引进了一个新的数学几何模型——菱形十二面体,运用空间填充的方法进一步优化了极大独立集 M 的上界 $|M| \leq 9.8080opt + 10.5625$,最终得到算法近似比为 $11.8080 + \ln 11$ 。

本文第2节给出一些基本的定义和概念;第3节计算在UBG上极大独立集的改进上界;第4节提出一个基于最小斯坦纳树方法的CDS构造算法并分析该算法的性质,求得CDS的近似比;第5节给出不同参数设置下的仿真结果;最后总结全文并对展望未来。

2 定义及符号

给定一个单位球图 $G=(V,E)$, E 表示图 G 中的边集, V 表示图 G 中的点集。对于 V 中的任意两点 u 和 v ,当且仅当 u 和 v 之间的欧氏距离 $d(u,v) \leq 1$ 时,存在边 $(u,v) \in E$,此时称 v 是 u 的邻点。因为本文考虑的网络模型是基于均质无线网络,网络中的节点都具有相同的传输距离,所以 G 中的每一条边都是双向边,这意味着如果 v 是 u 的邻点,那么 u 同时也是 v 的邻点。节点 u 的邻点集表示为 $N(u) = \{v | (u,v) \in E, v \in V\}$, $N[u] = N(u) \cup u$ 。对任意节点 $u \in V$,令 r_u 表示节点 u 的传输半径,在单位球图中,本文将每个节点的传输半径都设置为1。 $ID(u)$ 表示 u 的唯一识别符。

定义1(控制集) 对于给定的单位球图 $G=(V,E)$ 的一个子集 S ,其被称为 G 的一个控制集,则对于任意节点 $u \in V$,要么 $u \in S$,要么 u 在 S 中至少存在一个邻点。

定义2(独立集(Independent Set, IS)) 对于给定的单位球图 $G=(V,E)$ 的一个子集 L ,其被称为 G 的一个独立集的充分必要条件是对于任意两个节点 $u, v \in L, (u,v) \notin E$ 。

定义3(极大独立集) L 是图 G 的一个极大独立集,当且仅当 L 是 G 的一个独立子集并且满足 V 中的任意一点加入到 L 中都不可能形成一个新的独立集。

定义4(连通控制集) 给定一个单位球图 $G=(V,E)$,子集 S 被称为 G 的一个连通控制集,则 S 必须满足以下两个条件:

(1) S 是 G 的一个控制集;

(2) 由 S 导出的子图 $G[S]$ 是连通的,即 $G[S]$ 中的任意两点之间都至少存在一条路径,使得两点之间可以相互传输信息。

定义5(最小斯坦纳树问题 ST-MSN) 给定一个单位球图 $G=(V,E)$ 和一个 V 的节点子集 L ,计算 L 的一个有着最小斯坦纳节点数目的斯坦纳树。

在本文算法中,图中给定节点子集中的点通常称之终端。斯坦纳树是一棵树,它将所有终端节点连接起来,使每一片叶子都是一个终端,但终端节点并不一定都是叶子节点。除了终端之外,斯坦纳树中的每个节点都称为斯坦纳节点。最小斯坦纳树问题在欧几里德空间和平面上的几何形式已经有了广泛的研究,但是在单位球图和单位圆盘图中却很少有相应的参考文献,这是因为并不是所有在欧几里德平面上的结论都可以延伸到单位圆盘图,并且二维斯坦纳树的一些结论并不适用于三维斯坦纳树。三维斯坦纳树问题求解的复杂性和

难度远远超过了二维斯坦纳树问题,国内外也只有少量的研究成果。Min 等^[15]提出了一个关于 ST-MSN 问题的 3-逼近求解方法,证明了该方法可以从欧几里德平面推广到单位圆盘图。受此启发,本文进一步将 ST-MSN 问题推广到单位球图。

3 单位球图上极大独立集的一个优化上界

一般来说,在单位球图 $G=(V,E)$ 中,构造一个图 G 的近似最小连通控制集通常采用两步法:1)找到图 G 的一个极大独立集 S ,注意 S 也是图 G 的一个控制集;2)在 S 中添加一些额外的节点作为连接点,从而获得图 G 的一个连通控制集。因此极大独立集的上界对于求解 CDS 的近似比是非常重要的。

本节主要考虑单位球图 $G=(V,E)$ 中 MIS 的优化上界。令 $\alpha(S)$ 表示图 G 中极大独立集 S 的大小, opt 表示图 G 的 MCDS 的大小。关于一个单位球图有多少个独立节点,文献^[16]有以下结论。

引理 1 假设 $G=(V,E)$ 是一个单位球图,那么对于任意节点 $v \in V$,以 v 为中心的单位球图最多有 12 个独立邻点^[16]。

在文献^[16]的基础上,Butenko 等^[17]证明了在任意连通的单位球图上有 $\alpha(G) \leq 11opt + 1$ 。随后, Kim 等^[13]采用数学归纳法优化了文献^[18]中的结论,得到一个新的关于 MIS 的算法近似比,为 10.917,这是目前已知最优的结论。本节提出了用菱形十二面体进行单位球图上的空间填充的方法(如图 1),得出了一个关于 MIS 的更好的算法近似比,为 9.9968。

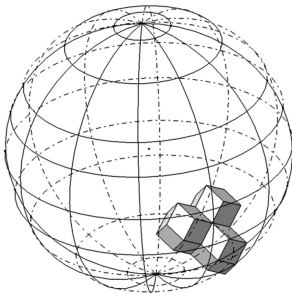


图 1 在单位球图中的菱形十二面体

Fig.1 Rhomboid dodecahedrons in unit ball graph

引理 2 假设 $G=(V,E)$ 是一个单位球图,那么 $\alpha(G) \leq 10.917opt + 1.083$ ^[13]。

为了进一步优化单位球图中极大独立集的上界,从而减小 CDS 的算法近似比,本文引进菱形十二面体^[19]的数学模型来求解这个问题。如图 2 所示,令 D_i 和 D_j 分别表示中心为 e_i 和 e_j 的单位球(半径为 1)。如图 3 所示, \bar{D}_i 和 \bar{D}_j 表示中心为 e_i 和 e_j 、半径为 1.5 的球, $d(e_i, e_j) = 1, B_1 = D_i \cup D_j, B_2 = \bar{D}_i \cup \bar{D}_j$ 。显然有以下结论。

引理 3 假设 $G=(V,E)$ 是一个连通的单位球图, $\bar{G}=(\bar{V},\bar{E})$ 是另一个连通的球图,其有着与 G 相同的中心,但是每个球的半径为 1.5。令 $I = \{e_1, e_2, \dots, e_{opt}\}$ 是图 G 的一个 MCDS, A 表示图 \bar{G} 中被以中心为 e_i 的球所覆盖的区域,则有 $A \leq 14.1372 + 6.8068(opt - 1)$, opt 表示图 G 的最优 CDS 的大小。

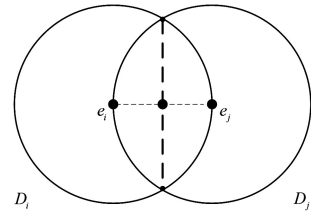


图 2 半径为 1 的单位球

Fig.2 Unit ball of radius 1

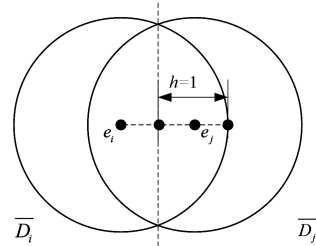


图 3 半径为 1.5 的单位球图

Fig.3 Unit ball of radius 1.5

证明:假设 \bar{D}_i 和 \bar{D}_j 表示两个互相连通且中心为 e_i 和 e_j 、半径为 1.5 的球,则有 $d(e_i, e_j) \leq 1$ 。本文首先考虑 $d(e_i, e_j) = 1$ 的情况,令 V_i 表示 \bar{D}_i 的体积, V_{ji} 表示 $\bar{D}_j - \bar{D}_i$ 的体积,则 $V_i = \frac{4}{3}\pi 1.5^3 \leq 14.1372$ 。由图 2 可得:

$$\begin{aligned} V_{ji} &= V_i - 2 \times \frac{1}{3}\pi h^2(3 \times 1.5 - h) \\ &= \frac{4}{3}\pi 1.5^3 - 2 \times \frac{1}{3}\pi 1^2(3 \times 1.5 - 1) \\ &\leq 6.8068 \end{aligned}$$

显然,当 $d(e_i, e_j) < 1$ 时, $V_{ji} \leq 6.8068$ 仍然成立。综上所述,被单位球所覆盖的区域 A 的值最大为 $14.1372 + 6.8068(opt - 1)$ 。

引理 4 以半径为 0.5 的内切球的菱形十二面体的体积为 0.7071。

证明:令 a 表示菱形十二面体的边长, r 表示它的内切球半径,则菱形十二面体的体积 $V_{12} = \frac{16}{9}\sqrt{3}a^3$, 半径 r 和边长 a 之间的关系为 $r = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ 。将 $r = 0.5$ 代入,则 $V_{12} = \frac{16}{9}\sqrt{3}a^3 = 4\sqrt{2}r^3 \approx 0.7071$ 。

定理 1 令 S 是一个连通的单位球图 $G=(V,E)$ 的一个极大独立集, $\alpha(S)$ 表示集合 S 中的节点数目,则有 $\alpha(S) \leq 9.8080opt + 10.5625$, opt 表示图 G 的最优 CDS(MCDS)的节点数目。

证明:根据引理 3,需要计算在球图 G 中所能包含的半径为 0.5 的球的最大数目,即 MIS 的上界,计算如下:

$$\alpha(S) \leq \frac{14.1372 + 6.8068(opt - 1)}{\frac{4}{3}\pi \times 0.5^3} \leq 13opt + 14$$

但是因为球与球之间有间隙,所以球并不能完全覆盖整个球图区域,而对于每一个半径为 0.5 的球,有且只有一个菱形十二面体(如图 4)作为球的外接多面体单体。由文献^[19]知,菱形十二面体是一种优良的空间无缝填充单体,13 个菱形十二面体可以在空间里紧密相连,所以本文采用菱形十二

面体模型来替代球形进行求解。如果所有用来填充 \bar{G} 的菱形十二面体都被 \bar{G} 覆盖,那么在 G 中就有了这样一个更精确的 MIS 上界:

$$\alpha(S) \leq \frac{14.1372 + 6.8068(opt - 1)}{0.7071} \leq 9.6264opt + 10.3668$$

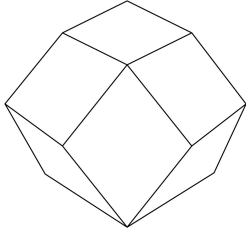


图4 菱形十二面体

Fig 4 Rhombohedral dodecahedron

注意到,当 G 的独立集中的一个节点 u 位于某个单位球的表面时,该节点对应在 \bar{G} 中就是以 u 为中心、半径 0.5 的球。在这种情况下,以 u 为中心、半径为 0.5 的球为内切球的菱形十二面体并不能完全被 \bar{G} 所覆盖,在区域外面的体积不超过 $\frac{1}{14}(4\sqrt{2} \times 0.5^3 - \frac{4}{3}\pi \times 0.5^3)$,所以菱形十二面体在球图中的有效填充体积不低于 $4\sqrt{2} \times 0.5^3 - \frac{1}{14}(4\sqrt{2} \times 0.5^3 - \frac{4}{3}\pi \times 0.5^3)$ 。

因此,可以得到一个关于 MIS 的更精确的新上界 $\alpha(S)$:

$$\begin{aligned} \alpha(S) &\leq \frac{14.1372 + 6.8068(opt - 1)}{4\sqrt{2} \times 0.5^3 - \frac{1}{14}(4\sqrt{2} \times 0.5^3 - \frac{4}{3}\pi \times 0.5^3)} \\ &\leq \frac{14.1372 + 6.8068(opt - 1)}{0.6940} \\ &\leq 9.8080opt + 10.5625 \end{aligned}$$

4 用斯坦纳树方法构造一个 CDS

本文将在单位球图上构建一个新的贪婪算法 ST-CDS,该算法分为两个阶段。第一阶段,基于每个节点的权值,采用贪婪策略构造图 G 的极大独立子集 L ,同时保证 L 中任意两个互补子集之间最多距离两跳,单位球图上的极大独立集的上界已经在本文的第 3 节求证完毕。第二阶段,采用最小斯坦纳树的方法,用尽可能少的斯坦纳节点来连通 L 中的终端节点,从而得到图 G 的一个连通控制集。并且本文还证明了该连通控制集与最优解的近似比为 $11.9968 + \ln 11$ 。连通控制集算法的性能比指算法生成的连通控制集与最小连通控制集的比。本文在 4.2 节详细分析算法的性质,并证明算法的性能比为 $11.8080 + \ln 11$,这是目前已知在单位球图上构建 CDS 的算法中产生的最优结果。

4.1 ST-CDS 算法

在 ST-CDS 算法中,首先输入一个连通的原始球图 G ,如果 G 不是连通图,则很有可能找不到作为连通点的斯坦纳节点,导致最终找不到一个连通控制集,那么对于这个问题的研究也就没有意义。在连通控制集的构造过程中,为了便于分析,本文采取染色的方法来区别不同子集的节点,将图 G 的极大独立子集 L 中的节点都染为黑色, L 的邻点集都染为灰色,斯坦纳节点集 B 都染为蓝色。蓝色节点作为斯坦纳节点

可以连通极大独立集中的节点。

本文定义一个蓝黑分量为由蓝色和黑色节点组成且忽略蓝色节点之间的连通性所导出的一个连通分量。 $W(\delta_c(x), \delta_o(x), ID_x)$ 表示评估网络中节点 x 重要性的一个权函数, $\delta_c(x)$ 表示 x 的有效度, $\delta_o(x)$ 代表 x 的初始度, ID_x 表示 x 的 ID 。节点的初始度表示在原始图 G 中节点的邻点数目;有效度表示节点除已选为黑色邻点集中以外的邻点个数,即表示节点在当前步骤中的重要程度。注意到,节点的有效度随着算法的进行不断变化。

给定两个三维数组变量 $(\delta_c(u), \delta_o(u), ID_u)$ 和 $(\delta_c(v), \delta_o(v), ID_v)$, 权函数 $W: (\delta_c, \delta_o, ID) \mapsto R$ 满足 $W(\delta_c(u), \delta_o(u), ID_u) > W(\delta_c(v), \delta_o(v), ID_v)$, 当且仅当满足下列任意一个条件时成立:

- (1) $\delta_c(u) > \delta_c(v)$;
- (2) $\delta_c(u) = \delta_c(v)$ 且 $\delta_o(u) < \delta_o(v)$;
- (3) $\delta_c(u) = \delta_c(v), \delta_o(u) = \delta_o(v)$ 且 $ID_u > ID_v$ 。

ST-CDS 算法的流程如图 5 所示。

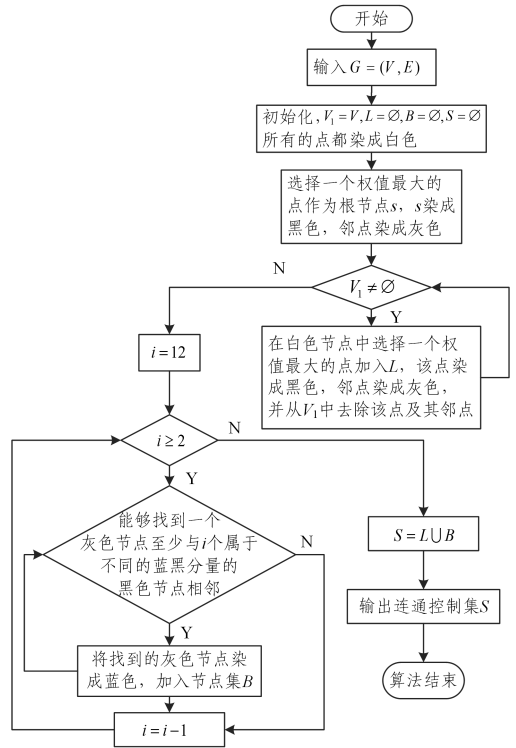


图5 ST-CDS 算法流程图

Fig. 5 Flow chart of ST-CDS algorithm

算法 1 ST-CDS

输入: 一个连通的球图 $G = (V, E)$

输出: 图 G 的一个连通控制集 S

1. 设置 $L = \emptyset, H = \emptyset, B = \emptyset, S = \emptyset, V_1 = V$, 并将 V 中所有节点都染成白色;
2. 选择一个权值 $W(\delta_c(s), \delta_o(s), ID_s)$ 最大的节点 $s \in V$ 作为根节点;
3. 将节点 s 染成黑色, s 的邻点 $N(s)$ 染成灰色;
4. 令 $L = \{s\}, H = N(s), V_1 = V - N[s]$
5. While $V_1 \neq \emptyset$ do
6. 选择一个权值 $W(\delta_c(y), \delta_o(y), ID_y)$ 最大的节点 $y \in N(H) \cap V_1$;
7. 将节点 y 染成黑色, y 的邻点 $N(y)$ 染成灰色;

8. 令 $L=LU\{y\}, H=HUN(y), V_1=V_1-N[y]$
9. End while // L 表示 MIS, 即 DS
10. For $i=12$ to 2 do
11. While 能够找到一个节点 $u \in H$ 使得至少邻近 i 个黑色节点, 并且这些黑色节点属于不同的蓝黑分量 do
12. 将 u 染成蓝色
13. $H=H-\{u\}, B=BU\{u\}$
14. End while
15. End for // B 表示斯坦纳节点, 即连接点
16. $S=L \cup B$ // S 表示 CDS
17. 输出 S

4.2 算法 ST-CDS 的性能分析

引理 5 假设 L 是由 ST-CDS 算法生成的极大独立集, 那么 L 的任意一对互补子集 L_1, L_2 之间恰好相隔两跳。

证明: 因为 L_1, L_2 是 L 的任意一对互补子集, 所以满足 $L_1 \cup L_2 = L$ 且 $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ 。为了不失一般性, 假设 $L = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}, 1 \leq j \leq k, v_0 = s, v_j$ 是 ST-CDS 算法中第 j 次迭代添加到 L 中的点(算法 1 第 5-9 步)。根据 ST-CDS 算法的构造过程, v_j 一定有一个邻点在集合 H 中, 而集合 H 是黑色节点 $\{v_0, v_1, \dots, v_{j-1}\}$ 的邻点集, 所以一定存在某一个黑色节点 $v_i \in \{v_0, v_1, \dots, v_{j-1}\}, 0 \leq i \leq j-1$, 与 v_j 恰好相距两跳。总而言之, 存在一个整数 $1 \leq j \leq k$, 使得 $v_j \in L_1, \{v_0, v_1, \dots, v_{j-1}\} \in L_2$ 或者 $v_j \in L_2, \{v_0, v_1, \dots, v_{j-1}\} \in L_1$, 即 L 的任意一对互补子集 L_1, L_2 之间恰好相隔两跳。

定理 2 ST-CDS 算法中生成的 L 是一个极大独立集, 同时也是图 G 的一个控制集, S 是图 G 的一个连通控制集。

证明: (1) 首先, 证明 L 是一个极大独立集。根据定义 3 可知极大独立集的定义, 选定一个权值最大的点作为根节点, 放进 L 中并将它染成黑色, 将它的邻点染成灰色, 随后依次在 L 的白色邻点中选择权值最大的点, 重复以上过程直到没有白色节点。在这个过程中可知, 所有的黑色节点一定不相连。本文采用反证法, 假设有两个黑色节点 $x_1, x_2 \in L$ 且存在 $x_1, x_2 \in E$, 为了便于分析, 假设 x_1 先于 x_2 被选为黑色节点, x_1, x_2 初始时都为白色, 则当 x_1 被染为黑色时, 由算法第 7 步知 $N(x_1)$ 中的所有节点都被染成灰色, 所以 $x_2 \in N(x_2)$ 也会被染成灰色, 而灰色节点在算法中不可能再变成黑色, 与假设矛盾, 因此 L 是一个独立集。而当算法的第一阶段运行完毕之后, 集合中所有的点不是黑色就是灰色, 因为灰色节点一定是某个黑色节点的邻点, 所以不能再添加黑色节点到 L 中, 否则 L 就不是独立的, 因此 L 是一个极大独立集。

(2) L 同时也是图 G 的一个控制集。根据定义 1 和定义 3 可知控制集和极大独立集的定义。在 ST-CDS 算法第一阶段完成之后, 每一个灰色节点都必定在 L 中至少存在一个邻点, 即灰色节点被 L 中的点所控制, 所以 L 是一个控制集。

(3) S 是图 G 的一个连通控制集。因为 S 是在 L 的基础上添加了一些斯坦纳节点, 而 L 已经被证明是一个控制集, 所以 S 也是一个控制集, 只需要证明 S 的连通性即可。由引理 1 知, 一个单位球最多有 12 个独立邻点, 所以在 ST-CDS 算法的第二阶段, for 循环从 $i=12$ 到 2, 而每一个蓝黑分量都是一个由斯坦纳节点连通的连通分量。初始时, 每一个独立的黑色节点实际上就是一个蓝黑分量, 当一个灰色节点至少邻近 i 个蓝黑分量时, 该灰色节点将被染为蓝色, 归并到斯坦

纳点集合 B 中, 这意味着每一个斯坦纳节点至少可以连通 i 个连通分量。当循环结束时, 整个集合 $S=L \cup B$ 已经成为一个大连通分量, 即连通控制集。

定理 3 假设 T^* 代表基于给定的 MIS 上 ST-MSN 问题的一个最优斯坦纳树, 集合 B 是由 ST-CDS 算法生成的斯坦纳节点集, 则 $|B| \leq (2 + \ln 11)C(T^*), C(T^*)$ 表示 T^* 中斯坦纳节点的数目。

证明: 根据 ST-CDS 算法, 生成的极大独立集表示为 L , 如果 L 只包含一个节点, 则 $C(T^*)=0$, 对于定理 3 的研究没有意义, 本文不考虑这种情况。因此, 假设 L 至少包含两个节点, 即 $C(T^*) \geq 1$, 令 $|L|=l$, 即 l 为黑色节点的数目, 而蓝色节点(斯坦纳节点)是在 ST-CDS 算法第二阶段由满足条件的灰色节点转化而来, 令 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 是按算法中出现的顺序排列的蓝色节点, a_i 表示节点 $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ 从灰色变成蓝色之后蓝黑分量的数目。根据引理 6 知, 一定存在一个节点可以连通图 G 的两个互补子集。而每个蓝黑分量都包含一个邻近 T^* 中斯坦纳节点的黑色节点。所以, 一定存在一个斯坦纳节点 x_i 邻近至少 $\frac{a_i}{C(T^*)}$ 个蓝黑分量。故有:

$$a_{i+1} \leq a_i - \frac{a_i}{C(T^*)} + 1 \quad (1)$$

推导得:

$$\begin{aligned} a_i &\leq a_{i-1} - \frac{a_{i-1}}{C(T^*)} + 1 \\ &\leq a_{i-1} \left(1 - \frac{1}{C(T^*)}\right) + 1 \\ &\leq a_{i-2} \left(1 - \frac{1}{C(T^*)}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{C(T^*)}\right) + 1 \\ &\leq \dots \\ &\leq a_0 \left(1 - \frac{1}{C(T^*)}\right)^i + \sum_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{1}{C(T^*)}\right)^j \end{aligned} \quad (2)$$

从式(2)可以看出 $\sum_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{1}{C(T^*)}\right)^j$ 是一个收敛到 $C(T^*)$ 的几何级数, 在 $h = C(T^*) \ln \frac{a_0}{C(T^*)} (1 \leq h \leq k)$ 次迭代后, 蓝黑分量的数目为:

$$\begin{aligned} a_h &\leq a_0 \left(1 - \frac{1}{C(T^*)}\right)^h + C(T^*) \\ &\leq a_0 e^{-\frac{C(T^*) \ln \frac{a_0}{C(T^*)}}{C(T^*)}} + C(T^*) \\ &\leq 2C(T^*) \end{aligned} \quad (3)$$

结合式(1)、式(2)和式(3)可得, 对于任意 i 都有:

$$a_{i+1} - a_i \leq 1 - \frac{a_i}{C(T^*)} \leq 1 - 2 \leq -1 \quad (4)$$

$$a_k \leq a_{k-1} - 1 \leq \dots \leq a_{k-1} - (k-h-1) \quad (5)$$

进一步可以推导出:

$$a_{h+1} \leq 2C(T^*) \quad (6)$$

因此:

$$k-h \leq 2C(T^*) \quad (7)$$

注意, a_0 是初始的所有连接分量, 由引理 1 得, 单位球图上任意一点最多有 12 个独立邻点, 所以每加入一个蓝色节点最多可以连通 12 个连通分量, 也就是最多减少 11 个连通分量, 因为它本身构成了一个新的更大的连通分量。因此:

$$\frac{a_0}{C(T^*)} \leq 11 \quad (8)$$

$$h = C(T^*) \ln \frac{a_0}{C(T^*)} \leq C(T^*) \ln 11 \quad (9)$$

综上:

$$k \leq h + 2C(T^*) \leq (2 + \ln 11)C(T^*) \quad (10)$$

本文中,ST-CDS算法生成的斯坦纳节点集 $|B| \leq (2 + \ln 11)C(T^*)$, $C(T^*)$ 表示 T^* 中斯坦纳节点的数目。

定理 4 ST-CDS算法生成的图 $G=(V,E)$ 的连通控制集(CDS) S 的大小不超过 $(11.8080 + \ln 11)opt + 10.5625$, opt 表示 G 的最优CDS的大小。

证明:由于本文算法采用两阶段的方式,因此生成的CDS由两部分构成:极大独立集 L 和斯坦纳节点集 B 。在算法的第一阶段,根据定理 1,极大独立集 $|L| \leq 9.8080opt + 10.5625$, opt 表示 G 的最优CDS的大小。

在第二阶段,本文采用贪婪近似的方法来解决在单位球图上的最小斯坦纳节点的斯坦纳树问题,通过构造一个斯坦纳树来连接极大独立集中的节点。由定理 3 可知,ST-CDS算法中生成的斯坦纳节点集 $|B| \leq (2 + \ln 11)C(T^*)$, $C(T^*)$ 表示 T^* 中斯坦纳节点的数目, T^* 代表基于给定的MIS上ST-MSN问题的一个最优斯坦纳树。因为MCDS也可以连接MIS,所以ST-MSN问题的最优解的大小不可能超过MCDS的大小,即 $C(T^*) \leq opt$ 。因此在第二阶段,最多选取 $(2 + \ln 11)opt$ 个斯坦纳节点来连通MIS,即 $|B| \leq (2 + \ln 11)C(T^*) \leq (2 + \ln 11)opt$ 。

综上所述,由ST-CDS算法生成的关于图 G 的连通控制集的上界为:

$$\begin{aligned} |S| &\leq |L| + |B| \\ &\leq 9.8080opt + 10.5625 + (2 + \ln 11)C(T^*) \\ &\leq 9.8080opt + 10.5625 + (2 + \ln 11)opt \\ &\leq (11.8080 + \ln 11)opt + 10.5625 \end{aligned}$$

为了验证所提算法的结果和理论结果一致,本文通过一个示例进一步说明,给出一个简单的单位球图 $G=(V,E)$, $E=\{(v_1,v_3),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_5),(v_5,v_6),(v_5,v_7),(v_5,v_8),(v_7,v_9),(v_8,v_{10})\}$, $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$,如图 6 所示。根据本文算法可得到图 G 的CDS大小为7, $S=L \cup B=\{3,4,5,7,8,9,10\}$,而实际通过枚举法得到该图的MCDS为 $\{3,4,5,7,8\}$,大小为5。显然, $7 < (11.8080 + \ln 11) * 5 + 10.5625$,与定理 4 的理论结果一致。

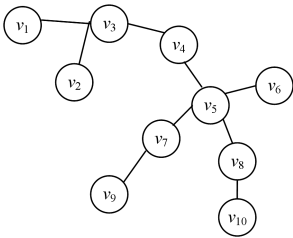


图 6 一个示例
Fig 6 A sample

5 仿真分析

本节使用MATLAB仿真来分析ST-CDS算法的性能。首先设定一个 $100 * 100 * 100$ 的三维虚拟空间,在这个空间

中随机生成 N 个无线节点,节点的位置是随机部署的,每个节点都具有相同的传输半径 R 。如果这些生成的节点能够形成一个连通图,则继续下一步,否则舍弃它们。在相同的参数变化下,随机生成1000个连通的单位球图,每一个图都按照算法ST-CDS计算出一个CDS,然后计算CDS的平均大小。图7是当 $N=30, R=35$ 时节点在空间里的一个随机分布图。

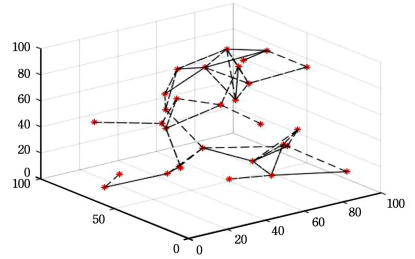


图 7 一个连通图
Fig. 7 A connected graph

由于网络节点的位置是随机部署的,当节点的传输半径 R 过小或者节点数目 N 太少时,很可能无法生成一个连通的单位球图,也就无法进行下一步的研究工作。因此,本文设置节点的最大传输半径 R 分别为30,35,40,45,并将三维虚拟空间的节点数目 N 控制为50~150,间隔为10。图8中每个参数的最后一个数字30,35,40,45分别表示用于生成该图的每个节点的最大传输范围。

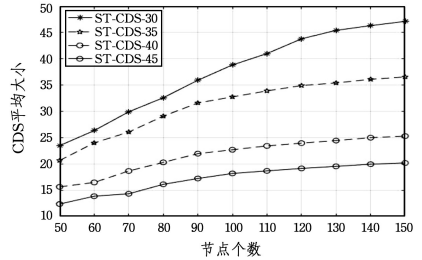


图 8 仿真结果
Fig. 8 Simulation results

图8表明随着网络密度即相同空间大小下网络节点个数的增多,ST-CDS算法产生的CDS随之增大。当网络中的节点个数 N 相同时,随着传输半径的增大,CDS的平均尺寸减小。这是因为在最大传输范围较大的情况下,一个CDS节点可以控制更多的其他节点,因此,构建一个CDS所需要的节点更少。此外,随着网络空间规模的增大,CDS的平均大小应该与图8类似,因为需要更大的CDS来控制其他节点。网络越稀疏,CDS所包含的节点数量就越多;网络越密集,CDS所包含的节点数量就越少。

结束语 本文研究了在三维同质无线自组织网络中关于最小虚拟骨干的构造问题。这个问题可以抽象成单位球图上的最小连通控制集问题,本文优化了UBG上MIS的上界,将目前最好的近似比由10.917减小到9.8080,并且提出了一个近似算法ST-CDS,运用斯坦纳方法连通MIS构造出一个CDS,近似比为 $11.8080 + \ln 11$,并通过仿真验证了该算法是可行的。但是本文并没有考虑连通控制集的容错性以及在同质无线网络中的应用。在未来的研究工作中,我们计划研究如何在保证容错性的情况下进一步减小连通控制集的大小以及连通控制集在异质无线网络中的应用。

参 考 文 献

- [1] SUN E J, NIETO A, ZHANG X K. The Wireless Sensor Network (WSN) Based Coal Ash Impoundments Safety Monitoring System[J]. IOP Conference Series Earth and Environmental Science, 2017, 51(1): 012010.
- [2] AGARWAL Y, JAIN K, KARABASOGLU O. Smart Vehicle Monitoring and Assistance Using Cloud Computing in Vehicular Ad Hoc Networks[J]. International Journal of Transportation Science and Technology, 2017, 7(1): 60-73.
- [3] MICHELETTO M, PETRUCCI V, SANTOS R, et al. Flying Real-Time Network to Coordinate Disaster Relief Activities in Urban Areas[J]. Sensors, 2018, 18(5): 1662.
- [4] PIÓRO, MICHA, TOMASZEWSKI A, et al. Maximization of Multicast Periodic Traffic Throughput in Multi-hop Wireless Networks with Broadcast Transmissions[J]. Ad Hoc Networks, 2018, 77: 119-142.
- [5] EPHREMIDS A, WIESELTHIER J E, BAKERD J. A Design Concept for Reliable Mobile Radio Networks with Frequency Hopping Signaling[J]. Proceedings of the IEEE, 1987, 75(1): 56-73.
- [6] LLU B, WANG W, KIM D, et al. On Approximating Minimum 3-Connected m -Dominating Set Problem in Unit Disk Graph[J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 2016, 24(5): 2690-2701.
- [7] WANG W, LIU B, KIM D, et al. A New Constant Factor Approximation to Construct Highly Fault-Tolerant Connected Dominating Set in Unit Disk Graph[J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 2017, 25(1): 18-28.
- [8] HI Y, ZHANG Z, MO Y, et al. Approximation Algorithm for Minimum Weight Fault-Tolerant Virtual Backbone in Unit Disk Graphs[J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 2017, 25(2): 925-933.
- [9] GONZALEZ A, ÓSCAR L, VAZ S. Deploying and Experimenting Wireless Ad Hoc Networks in Mountainous Regions for Broadband Multimedia Service Access[C]// Proceedings of the 5th International ICST Mobile Multimedia Communications Conference. ICST, 2009.
- [10] TAN D D, KIM D S. Cooperative Transmission Scheme for Multi-hop Underwater Acoustic Sensor Networks[J]. IJCNDS, 2015, 14(1): 1-18.
- [11] WU W, DU H, JIA X, et al. Minimum Connected Dominating Sets and Maximal Independent Sets in Unit Disk Graphs[J]. Theoretical Computer Science, 2006, 352(1): 1-7.
- [12] VAHDATPOUR A, DABIRI F, MOAZENI M, et al. Theoretical Bound and Practical Analysis of Connected Dominating Set in Ad Hoc and Sensor Networks[C]// International Symposium on Distributed Computing. Springer, 2008.
- [13] KIM D, ZHANG Z, LI X, et al. A Better Approximation Algorithm for Computing Connected Dominating Sets in Unit Ball Graphs[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2010, 9(8): 1108-1118.
- [14] GAO X, LI J, CHEN G. A Better Approximation for Constructing Virtual Backbone in 3D Wireless Ad-hoc Networks[J]. Theoretical Computer Science, 2015, 607(P3): 363-380.
- [15] MIN M, DU H, JIA X, et al. Improving Construction for Connected Dominating Set with Steiner Tree in Wireless Sensor Networks[J]. Journal of Global Optimization, 2006, 35(1): 111-119.
- [16] HUANG H, RICHA A W, SEGAL M. Approximation Algorithms for the Mobile Piercing Set Problem with Applications to Clustering in Ad-Hoc Networks[J]. Mobile networks & applications, 2004, 9(2): 151-161.
- [17] BUTENKO S, KAHRUMAN-ANDEROGLU S, URSULENKO O. On Connected Domination in Unit Ball Graphs[J]. Optimization Letters, 2011, 5(2): 195-205.
- [18] BABEAA S, JAHROMI B H, AJDARI A, et al. Mechanical Properties of Open-cell Rhombic Dodecahedron Cellular Structures[J]. Acta Materialia, 2012, 60(6/7): 2873-2885.
- [19] WANG Z C. Analysis and Exploration of Spatial Filling of Regular Polyhedron[J]. Spatial Structures, 2016, 22(1): 16-24.



YI Meng, born in 1995, postgraduate, is a member of China Computer Federation. Her main research interests include wireless network and so on.



LIANG Jia-rong, born in 1966, Ph. D., professor, Ph.D supervisor, is a member of China Computer Federation. His main research interests include generalized control system, network fault diagnosis and mobile network computing.