

# 基于命题逻辑的完全标准矛盾体及最小标准矛盾体



唐雷明<sup>1</sup> 白沐尘<sup>2</sup> 何星星<sup>1</sup> 黎兴玉<sup>1</sup>

1 西南交通大学数学学院 成都 611756

2 上海奈胜自动化有限公司 上海 200949

(287350507@qq.com)

**摘要** 归结是自动推理中简洁、可靠且完备的推理规则。标准矛盾体分离规则是归结原理的一个重要延拓。基于命题逻辑的标准矛盾体分离演绎推理,对标准矛盾体的性质进行进一步研究,提出了两类特殊标准矛盾体——完全标准矛盾体和最小标准矛盾体,得到了相应的性质和定理。这些性质定理主要描述了:1)各类标准矛盾体的本质特征;2)完全标准矛盾体中添加子句后另添加文字的策略及子句非扩充性的变化规律;3)完全标准矛盾体添加子句及相关文字后,其最小标准矛盾体呈现出的规律;4)最小标准矛盾体可扩充为完全标准矛盾体。这些结论使完全标准矛盾体与最小标准矛盾体能通过添加新子句或相关文字完成互相转换。这一性质为标准矛盾体演绎理论进一步应用于计算机求解提供了一定的理论支撑。

**关键词:** 标准矛盾体;命题逻辑;完全标准矛盾体;最小标准矛盾体

**中图法分类号** TP181

## Complete Contradiction and Smallest Contradiction Based on Propositional Logic

TANG Lei-ming<sup>1</sup>, BAI Mu-chen<sup>2</sup>, HE Xing-xing<sup>1</sup> and LI Xing-yu<sup>1</sup>

1 School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China

2 Shanghai Naisheng Automation Co., LTD, Shanghai 200949, China

**Abstract** Resolution is a simple, reliable and complete reasoning rule in automatic reasoning. Contradiction is an important extension of the principle of resolution. Based on the deductive reasoning of the contradiction of the propositional logic, this paper studies the nature of the contradiction, puts forward the concept of the complete contradiction and the smallest contradiction and gains related properties and theorems. The main contents of these properties and theorems are as follows: 1) Characteristics of each special contradiction; 2) Strategies for adding literals and non-extended changes of clauses when adding a clause to the complete contradiction; 3) The law of the smallest contradiction in the complete contradiction when adding clause and related literals; 4) Smallest contradiction can be extended to complete contradiction. These conclusions enable complete contradiction and Smallest contradiction to be converted to each other by adding new clauses or related literals. This property provides a certain theoretical support for the further application of deductive reasoning of contradiction to computer solving.

**Keywords** Contradiction, Propositional logic, Complete contradiction, Smallest contradiction

## 1 引言

归结是著名的推理规则,适用于自动化<sup>[1]</sup>,在自动化演绎五十多年的发展中发挥了重要作用<sup>[2-4]</sup>。经验及分析研究是提高基于归结的自动化演绎效率的两个主要方向,这两方向的研究产生了许多归结的变体及对归结的改进策略<sup>[2-9]</sup>。需要注意的是,这些变体及策略是基于二元归结的推理规则,且有效改进了基于归结的 ATP 系统的效率和功能。

二元归结的过程可看作用两个父本子句产生新子句,该新子句是两父本子句删除互补对后将剩余子句析取的结果。

二元归结有以下特征:1)基于两子句互补对的删减规则;2)整个归结演绎过程,每一次演绎仅涉及两个子句。二元归结推理方法虽然简单高效,但仍存在很多未能解决或无法有效解决的实际问题,如 TPTP<sup>[10]</sup>(定理证明的数千问题)所示问题。自动演绎的效率和多功能性取决于推理规则和技术,而这些规则和技术可能会超越纯粹的归结演算,尤其会超越二元归结演算<sup>[3,11-12]</sup>。

基于上述情况,文献[13]建立了基于标准矛盾体分离的动态多子句协同自动演绎理论(以下简称标准矛盾体分离演绎理论),为上述问题提供一种有效的解决方案<sup>[14-15]</sup>。在标准

本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。

基金项目:国家自然科学基金项目(61603307,61673320,61473239);教育部人文社科项目(19YJCZH048,20XJCZH016);中央高校基本科研业务费专项资金(JBK2003006);四川省科技计划项目(2020YFG0045,2020YFG0238)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (61603307,61673320,61473239), Ministry of Education, Humanities and Social Science Projects(19YJCZH048,20XJCZH016), Fundamental Research Funds for the Central Universities of Ministry of Education of China (JBK2003006) and Science and Technology Project of Sichuan Province, China (2020YFG0045,2020YFG0238).

通信作者:何星星(x.he@home.swjtu.edu.cn)

矛盾体分离演绎理论中,其在命题逻辑及一阶逻辑中的可靠性及完备性已经得到证明。但标准矛盾体的性质没有被充分挖掘;在不影响标准矛盾体矛盾性的前提下,删除或添加文字的策略没有被充分研究。

基于此,研究之初以具体的命题逻辑中标准矛盾体的实例为对象(故本文提到的标准矛盾体是指命题逻辑中的标准矛盾体),探究其可能具有的结构特征。得到一些特征后,在探究这些特征具有的性质及添加文字策略时,发现可进一步抽象,于是得到了完全标准矛盾体的定义。在探究了大量标准矛盾体例子后,发现标准矛盾体的矛盾性仅由标准矛盾体中部分子句决定,于是我们提出最小标准矛盾体并探究相关性质。

因完全标准矛盾体与最小标准矛盾体的部分性质是相关的,故把它们放在一起介绍。

## 2 完全标准矛盾体和最小标准矛盾体

**定义 1**<sup>[13]</sup>(标准矛盾体) 设有子句集  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ , 若对任意文字  $p_i \in B_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 文字集  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  存在互补对, 称该子句集是标准矛盾体。

**定义 2** 设有标准矛盾体  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ , 任取文字  $p$ , 若  $\{B_1 \cup \{p\}, B_2, B_3, \dots, B_n\}$  不是标准矛盾体, 则称  $B_1$  是该标准矛盾体的非扩充子句。

标准矛盾体中一般不考虑下列情况: 1) 子句中含有同一变量的相同或互补文字; 2) 标准矛盾体中存在两子句  $B$  和  $B'$ , 且有  $B=B'$ 。

**引理 1** 设  $B_1$  是标准矛盾体  $\Sigma = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  的非扩充子句, 则存在  $\{B_2, B_3, \dots, B_n\}$  的文字集  $\{q_2, q_3, \dots, q_n\}$  满足: 任取  $q \in B_1, \sim q \in \{q_2, \dots, q_n\}$ 。

**证明:** 取  $p \notin B_1$ , 则  $\{B_1 \cup \{p\}, B_2, B_3, \dots, B_n\}$  不是标准矛盾体, 故存在文字集  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\} (q_i \in B_i, i=2, 3, \dots, n)$  不存在互补对, 因  $\Sigma$  是标准矛盾体, 故  $q_1 = p$ , 即  $\{p, q_2, \dots, q_n\}$  不存在互补对。任取文字  $q \in B_1$ , 因  $\Sigma$  是标准矛盾体, 故  $\{q, q_2, \dots, q_n\}$  存在互补对。由  $\{p, q_2, \dots, q_n\}$  不存在互补对知  $\{q_2, \dots, q_n\}$  不存在互补对。由  $q$  的任意性可得上述引理成立。

**定义 3** 设有标准矛盾体  $\Sigma$ , 若  $\Sigma$  的任意子句是其非扩充子句, 则称  $\Sigma$  是完全标准矛盾体。

**引理 2** 设有完全标准矛盾体  $\Sigma = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ , 任取  $\Sigma$  的子句  $B_i$  和  $B_j, i \neq j$ , 则存在文字  $q \in B_i$  使得  $\sim q \in B_j$ 。

**证明:** (反证) 因完全标准矛盾体的性质与子句的顺序及有限数  $n$  无关, 故只需证  $i=1, j=2$  成立。假设任给  $B_1$  的文字  $q, \sim q$  不在  $B_2$  中。考虑  $B_1$  的非扩充性, 设  $\Omega_1 = \{\Delta_1^1, \Delta_2^1, \dots, \Delta_n^1\}$  是子句集  $\{B_2, B_3, \dots, B_n\}$  中所有不存在互补对的文字集的集合。令  $\xi_1 = \{q | \forall \Delta \in \Omega_1, q \in \Delta\}$ , 显然  $\xi_1 \neq \emptyset$ , 否则与  $B_1$  不可扩充矛盾。进一步,  $B_1 = \{q | \sim q \in \xi_1\}$ 。另一方面, 设  $\Omega_2 = \{\Delta_1^2, \Delta_2^2, \dots, \Delta_n^2\}$  是子句集  $\{B_3, \dots, B_n\}$  中所有不存在互补对的文字集。令  $\xi_2 = \{q | \forall \Delta \in \Omega_2, q \in \Delta\}$ 。下证  $\xi_1 = \xi_2$ , 由  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  的定义知  $\xi_1 \supseteq \xi_2$ 。若  $\xi_1 \not\subseteq \xi_2$ , 则由  $\xi_1$  和  $\xi_2$  的定义知: 或  $\xi_1$  多出一个文字是  $B_2$  中某个文字, 由  $B_1 = \{q | \sim q \in \xi_1\}$  知这与  $B_2$  和  $B_1$  假设矛盾; 或  $\xi_1$  多出的一个文字  $q$  与  $B_2$  无关, 即  $q \notin B_2$ 。不难得知  $q \in \xi_2$ , 这与  $\xi_2$  的定义及  $q$  的定义矛盾, 即  $\xi_1 = \xi_2$  成立。同理, 在上述假设下考查  $B_2$  的非扩充性, 按照上述推理可得

$B_2 = \{q | \sim q \in \xi_2\}$ 。综上可得  $B_1 = B_2$ , 这将与  $B_1$  和  $B_2$  是非扩充子句矛盾。故假设反面成立, 即存在  $B_1$  的文字  $q$ , 使得  $\sim q$  在  $B_2$  中。

**定理 1** 设有完全标准矛盾体  $\Sigma = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}, B_i$  是  $\Sigma$  中任意子句, 则存在  $\{B_1, B_2, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, \dots, B_n\}$  的文字集  $\{q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n\}$  满足: 任取该文字集中文字  $q_j$  有  $\sim q_j \in B_i$ 。

**证明:** 由引理 2 不难得知上述定理成立。文字集  $\{q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n\}$  称为  $B_i$  的特征文字集。

**定义 4**(最小标准矛盾体) 设有标准矛盾体  $\Sigma_1$ , 若  $\Sigma_1$  中的子子句集  $\Sigma_2$  是标准矛盾体, 且子句数少于  $\Sigma_1$  的子子句集不构成标准矛盾体, 则称  $\Sigma_2$  是  $\Sigma_1$  的最小标准矛盾体。

**定理 2** 最小标准矛盾体的每个子句可扩充为非扩充子句。

**证明:** 设有标准矛盾体  $\Sigma$  的最小标准矛盾体  $\Sigma_1 = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ , 对  $B_n$  而言, 存在  $\Sigma_1$  的文字集  $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$  使得  $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1}\}$  不存在互补对; 否则任给  $\Sigma_1$  的文字集  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ , 若  $\{q_1, q_2, \dots, q_{n-1}\}$  存在互补对, 则  $\Sigma_1$  不是  $\Sigma$  的最小标准矛盾体, 与假设矛盾。因此,  $B_n$  至多可添加文字  $\sim q_1, \sim q_2, \sim q_3, \dots, \sim q_{n-1}$ 。同理,  $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$  可通过上述方法得证。

**推论 1** 每个最小标准矛盾体可扩充为完全标准矛盾体。

**定理 3** 完全标准矛盾体是其自身的最小标准矛盾体。

**证明:** (反证) 设有完全标准矛盾体  $\Sigma = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ , 若存在  $\Sigma$  中  $n-1$  个子句集  $\Sigma_1$  是标准矛盾体, 不妨设  $\Sigma_1$  中不含  $B_1$ , 由定理 1 知, 存在  $B_1$  的特征文字集  $\{q_2, q_3, \dots, q_n\}$ , 由文字间所属关系知该文字集是  $\Sigma_1$  的文字集, 但该文字集不存在互补对, 故矛盾。综上, 定理得证。

**定理 4** 设完全标准矛盾体  $\Sigma = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ , 子句  $B_{n+1}$  仅含文字  $p_1$ , 将  $B_{n+1}$  添至  $\Sigma$  构成标准矛盾体  $\Sigma_1 = \{B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}\}$ 。若满足  $B_1, B_2, \dots, B_n$  中每个子句都不含有文字  $p_1$ , 则  $\Sigma_2 = \{B_1 \cup \{\sim p_1\}, B_2 \cup \{\sim p_1\}, \dots, B_n \cup \{\sim p_1\}, B_{n+1}\}$  是完全标准矛盾体。

**证明:** 先证  $\Sigma_2$  是标准矛盾体。(反证) 若  $\Sigma_2$  不是标准矛盾体, 则存在其文字集  $\{q_1, q_2, \dots, q_n, p_1\}$  不存在互补对, 则  $q_i \neq \sim p_1, i=1, 2, \dots, n$ , 否则与假设矛盾。故  $q_i \in B_i, i=1, 2, \dots, n$ 。因  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  是标准矛盾体, 故  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  存在互补对, 故  $\{q_1, q_2, \dots, q_n, p_1\}$  存在互补对, 与假设矛盾, 即假设的反面成立。

再证  $\Sigma_2$  的每个子句是非扩充子句。(反证) 任给子句  $B_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 若存在文字  $q \notin B_i \cup \{\sim p_1\}$ , 使得  $\Sigma_2$  中子句  $B_i \cup \{\sim p_1\}$  添加文字  $q$  后的子句集  $\Sigma_3$  是标准矛盾体。因  $\Sigma$  是完全标准矛盾体, 由定理 1 知, 存在  $B_i$  的特征文字集  $\{q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n\}$ 。由  $q$  的定义知,  $\{q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q, q_{i+1}, \dots, q_n, p_1\}$  是  $\Sigma_3$  的文字集, 但不存在互补对, 故矛盾。若存在文字  $q \notin B_{n+1}$  使得  $\Sigma_2$  中子句  $B_{n+1}$  添加文字  $q$  后的子句集  $\Sigma_4$  是标准矛盾体, 由  $q$  的定义知  $\Sigma_4$  的文字集  $\{\sim p_1, \sim p_1, \dots, \sim p_1, q\}$  不存在互补对, 与假设矛盾。综上, 定理得证。

**定理 5** 设有完全标准矛盾体  $\Sigma = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ , 子句  $B_{n+1}$  仅含文字  $p_1$ , 将  $B_{n+1}$  添加至  $\Sigma$  构成标准矛盾体  $\Sigma_1 = \{B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}\}$ 。

若满足条件:

- 1)  $B_1, B_2, \dots, B_{m_1}$  中每个子句含有文字  $p_1$ ;
- 2)  $B_{m_1+1}, B_{m_1+2}, \dots, B_{m_2}$  中每个子句含有文字  $\sim p_1$ ;
- 3)  $B_{m_2+1}, B_{m_2+2}, \dots, B_n$  是除条件(1)和条件(2)外的其他子句。

则下列结论成立:

- 1)  $\Sigma_2 = \{B_1 \cup A_1, B_2 \cup A_2, \dots, B_{m_1} \cup A_{m_1}, B_{m_1+1}, B_{m_1+2}, \dots, B_{m_2}, B_{m_2+1} \cup \{\sim p_1\}, B_{m_2+2} \cup \{\sim p_1\}, \dots, B_n \cup \{\sim p_1\}, B_{n+1}\}$  是标准矛盾体,其中  $A_1, A_2, \dots, A_{m_1}$  是任意子句;
- 2)  $B_{m_1+1}, B_{m_1+2}, \dots, B_{m_2}, B_{m_2+1} \cup \{\sim p_1\}, B_{m_2+2} \cup \{\sim p_1\}, \dots, B_n \cup \{\sim p_1\}$  是  $\Sigma_2$  的非扩充子句;
- 3)  $\Sigma_5 = \{B_{m_1+1}, B_{m_1+2}, \dots, B_{m_2}, B_{m_2+1} \cup \{\sim p_1\}, B_{m_2+2} \cup \{\sim p_1\}, \dots, B_n \cup \{\sim p_1\}, B_{n+1}\}$  是  $\Sigma_2$  的最小标准矛盾体。

证明:1)任取  $\Sigma_2$  的文字集  $\Delta = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}, q_{m_1+1}, q_{m_1+2}, \dots, q_{m_2}, q_{m_2+1}, q_{m_2+2}, \dots, q_n, q_{n+1}\}$ 。若存在  $q_i = \sim p_1$ ,  $i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, n$ , 因  $q_{n+1} = p_1$ , 则已存在互补对; 否则  $q_i \in B_i, i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, n$ 。此时文字集  $\Delta_1 = \{p_1, p_1, \dots, p_1, q_{m_1+1}, q_{m_1+2}, \dots, q_{m_2}, q_{m_2+1}, q_{m_2+2}, \dots, q_n\}$  是  $\Sigma$  的文字集, 故存在互补对。因  $q_{n+1} = p_1$  及由  $\Delta_1$  与  $\Delta$  文字间的关系知  $\Delta$  存在互补对, 故命题成立。综上, 定理得证。

2)(反证)若存在  $i \in \{m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, n\}$ , 存在文字  $q \notin B_i \cup \{\sim p_1\}$  使得  $\Sigma_2$  中子句  $B_i \cup \{\sim p_1\}$  添文字  $q$  后的子句集  $\Sigma_3$  是标准矛盾体。因  $\Sigma$  是完全标准矛盾体, 由定理 1 知: 存在  $B_i$  的特征文字  $\{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}, q_{m_1+1}, q_{m_1+2}, \dots, q_{m_2}, q_{m_2+1}, q_{m_2+2}, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n\}$ 。由  $q$  的定义知  $\Sigma_3$  的文字集  $\{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}, q_{m_1+1}, q_{m_1+2}, \dots, q_{m_2}, q_{m_2+1}, q_{m_2+2}, \dots, q_{i-1}, q, q_{i+1}, \dots, q_n, q_{n+1}\}$  不存在互补对, 故矛盾。若存在  $i \in \{m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2\}$ , 存在文字  $q \notin B_i$  使得  $\Sigma_2$  中子句  $B_i$  添文字  $q$  后的子句集  $\Sigma_4$  是标准矛盾体, 因  $\Sigma$  是完全标准矛盾体, 由定理 1 知, 存在  $B_i$  的特征文字集  $\{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}, q_{m_1+1}, q_{m_1+2}, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_{m_2}, q_{m_2+1}, q_{m_2+2}, \dots, q_n\}$ 。故文字集  $\Delta_3 = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}, q_{m_1+1}, q_{m_1+2}, \dots, q_{i-1}, q, q_{i+1}, \dots, q_{m_2}, q_{m_2+1}, q_{m_2+2}, \dots, q_n, q_{n+1}\}$  是  $\Sigma_4$  的文字集, 由其文字间关系知  $\Delta_3$  不存在互补对, 故矛盾。综上, 定理得证。

3)由 1)的证明不难得知  $\Sigma_5$  是标准矛盾体。设  $\Sigma_5$  的子句数为  $m$ , 且  $m_1 < m$ , 下证任取  $\Sigma_2$  中  $m_1$  个子句构成子句集不构成标准矛盾体。由标准矛盾体的性质知仅需证当  $m_1 = m - 1$  成立即可。设  $\Sigma_2$  中  $m - 1$  个子句构成的子句集为  $\Sigma_6$ 。①若  $\Sigma_6$  不含子句  $B_{n+1}$ , 因  $\Sigma$  是完全标准矛盾体, 故子句集  $\{B_1 \cup A_1, B_2 \cup A_2, \dots, B_{m_1} \cup A_{m_1}, B_{m_1+1}, B_{m_1+2}, \dots, B_{m_1}, B_{m_1+1} \cup \{\sim p_1\}, B_{m_1+2} \cup \{\sim p_1\}, \dots, B_n \cup \{\sim p_1\}\}$  不是标准矛盾体, 由  $\Sigma_6$  与上述子句集的关系知,  $\Sigma_6$  不构成标准矛盾体。②  $\Sigma_6$  含有子句  $B_{n+1}$ , 则在  $B_{m_1+1}, B_{m_1+2}, \dots, B_{m_2}, B_{m_2+1} \cup \{\sim p_1\}, B_{m_2+2} \cup \{\sim p_1\}, \dots, B_n \cup \{\sim p_1\}$  中至少存在一个子句不在其中。若存在  $i \in \{m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2\}$  使得  $B_i$  不在  $\Sigma_6$  中, 由定理 1 知存在  $B_i$  的特征文字集  $\Delta_1 = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}, q_{m_1+1}, q_{m_1+2}, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_{m_2}, q_{m_2+1}, q_{m_2+2}, \dots, q_n\}$ 。取  $\Sigma_6$  的文字集  $\Delta_2$  满足:  $B_{n+1}$  中文字取  $p_1$ ; 其他子句的文字取为下标相同的文字集  $\Delta_1$  中的文字。不难得知  $\Delta_2$  不存在互补对, 故矛盾。若存在  $i \in \{m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, n\}$  使得  $B_i$  不在  $\Sigma_6$  中, 与上述证明过程类似, 可找到  $\Sigma_6$  的文字集  $\Delta_3$  不存在互补对, 故矛盾。

定理 6—定理 8 的考虑的情况是定理 4 和定理 5 中  $B_{n+1}$  文字数为多元及复合的情形, 故仅给出定理的结论, 其证明过

程可参考定理 4 和定理 5 的证明。需要注意的是, 因为标准矛盾体的任意文字集存在互补对, 故某子句中文字数越多, 则该子句对其他子句中文字的限制越强。

**定理 6** 设有完全标准矛盾体  $\Sigma = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ , 子句  $B_{n+1}$  含有多个文字, 将  $B_{n+1}$  添加至  $\Sigma$  构成标准矛盾体  $\Sigma_1 = \{B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}\}$  时, 若  $B_{n+1}$  中存在文字  $p_1, p_2$  满足  $p_j \notin B_i, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2$ , 则有下列结论:

- 1)  $B_1, B_2, \dots, B_n$  是  $\Sigma_1$  的非扩充子句;
- 2)  $\Sigma$  是  $\Sigma_1$  的最小标准矛盾体。

**定理 7** 设有完全标准矛盾体  $\Sigma = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ , 子句  $B_{n+1}$  仅含有文字  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , 将  $B_{n+1}$  添加至  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  构成标准矛盾体  $\Sigma_1 = \{B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}\}$ 。若满足条件:

- 1)  $B_1, B_2, \dots, B_{m_1}$  含有  $B_{n+1}$  中除  $p_1$  外的所有其他文字;  $B_{m_1+1}, B_{m_1+2}, \dots, B_{m_2}$  含有  $B_{n+1}$  中除  $p_2$  外的所有其他文字;  $\dots$ ;  $B_{m_{k-1}+1}, B_{m_{k-1}+2}, \dots, B_{m_k}$  含有  $B_{n+1}$  中除  $p_k$  外的所有其他文字。
- 2)  $B_{m_k+1}, B_{m_k+2}, \dots, B_{m_{k+1}}$  含有  $B_{n+1}$  中所有文字。
- 3)  $B_{m_{k+1}+1}, B_{m_{k+1}+2}, \dots, B_n$  是除条件 1) 和条件 2) 外的其他子句。

则有下列结论:

- 1)  $\Sigma_3 = \{B_1 \cup \{\sim p_1\}, B_2 \cup \{\sim p_1\}, \dots, B_{m_1} \cup \{\sim p_1\}, B_{m_1+1} \cup \{\sim p_2\}, B_{m_1+2} \cup \{\sim p_2\}, \dots, B_{m_2} \cup \{\sim p_2\}, \dots, B_{m_{k-1}+1} \cup \{\sim p_k\}, B_{m_{k-1}+2} \cup \{\sim p_k\}, \dots, B_{m_k} \cup \{\sim p_k\}, B_{m_k+1} \cup A_1, B_{m_k+2} \cup A_2, \dots, B_{m_{k+1}} \cup A_{m_{k+1}-m_k+1}, B_{m_{k+1}+1}, B_{m_{k+1}+2}, \dots, B_n, B_{n+1}\}$  是标准矛盾体, 其中  $A_1, A_2, \dots, A_{m_{k+1}-m_k+1}$  是任意子句;
- 2)  $B_1 \cup \{\sim p_1\}, B_2 \cup \{\sim p_1\}, \dots, B_{m_1} \cup \{\sim p_1\}, B_{m_1+1} \cup \{\sim p_2\}, B_{m_1+2} \cup \{\sim p_2\}, \dots, B_{m_2} \cup \{\sim p_2\}, \dots, B_{m_{k-1}+1} \cup \{\sim p_k\}, B_{m_{k-1}+2} \cup \{\sim p_k\}, \dots, B_{m_k} \cup \{\sim p_k\}, B_{m_{k+1}+1}, B_{m_{k+1}+2}, \dots, B_n$  是  $\Sigma_3$  的非扩充子句;
- 3) 若  $B_{m_{k+1}+1} \neq B_1$ , 则  $\{B_1 \cup \{\sim p_1\}, B_2 \cup \{\sim p_1\}, \dots, B_{m_1} \cup \{\sim p_1\}, B_{m_1+1} \cup \{\sim p_2\}, B_{m_1+2} \cup \{\sim p_2\}, \dots, B_{m_2} \cup \{\sim p_2\}, \dots, B_{m_{k-1}+1} \cup \{\sim p_k\}, B_{m_{k-1}+2} \cup \{\sim p_k\}, \dots, B_{m_k} \cup \{\sim p_k\}, B_{m_{k+1}+1}, B_{m_{k+1}+2}, \dots, B_n, B_{n+1}\}$  是  $\Sigma_3$  的最小标准矛盾体, 否则  $\Sigma_1$  是  $\Sigma_3$  的最小标准矛盾体。

**定理 8** 设有完全标准矛盾体  $\Sigma = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ , 子句  $B_{n+1}$  仅含有文字  $p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}$ , 将  $B_{n+1}$  添加至  $\Sigma$  构成标准矛盾体  $\Sigma_1 = \{B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}\}$  时, 若满足条件:

- 1)  $B_1, B_2, \dots, B_n$  中每个子句都不含文字  $p_{k+1}$ ;
- 2)  $B_1, B_2, \dots, B_{m_1}$  中每个子句都含有文字  $p_1, p_2, \dots, p_k$ ;  $B_{m_1+1}, B_{m_1+2}, \dots, B_n$  是其他可能情况的子句。

则有下列结论:

- 1)  $\Sigma_4 = \{B_1 \cup \{\sim p_{k+1}\}, B_2 \cup \{\sim p_{k+1}\}, \dots, B_{m_1} \cup \{\sim p_{k+1}\}, B_{m_1+1}, B_{m_1+2}, \dots, B_n, B_{n+1}\}$  是标准矛盾体;
- 2)  $B_1 \cup \{\sim p_{k+1}\}, B_2 \cup \{\sim p_{k+1}\}, \dots, B_{m_1} \cup \{\sim p_{k+1}\}, B_{m_1+1}, B_{m_1+2}, \dots, B_n$  是  $\Sigma_4$  非扩充子句;
- 3) 若  $B_{m_1+1} \neq B_1$ , 则  $\Sigma_4$  是其自身的最小标准矛盾体, 否则  $\Sigma$  是  $\Sigma_4$  的最小标准矛盾体。

**结束语** 本文基于命题逻辑, 提出了完全标准矛盾体和最小标准矛盾体的概念, 证明了相关定理及性质。内容可概括如下: 1) 完全标准矛盾体和最小标准矛盾体的特征及相互之间的关系; 2) 完全标准矛盾体添加新子句及向其相关子句添加相关文字后, 其非扩充子句(完全性)的变化规律; 3) 完全