计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.191100102

基于模糊等价的毕达哥拉斯模糊集相似度构造方法

胡 平 秦克云
西南交通大学数学学院 成都 611756
(1125476515@qq.com)

摘 要 毕达哥拉斯模糊集是 Zadeh 模糊集的一种推广形式,其相似度刻画方法是毕达哥拉斯模糊集理论的重要研究内容。现有的毕达哥拉斯模糊集相似度大多针对具体问题而提出。为推广毕达哥拉斯模糊集理论的应用范围,文中基于模糊等价研究毕达哥拉斯模糊集相似度的一般构造方法。将模糊等价概念推广至毕达哥拉斯模糊数,提出了 PFN(Pythagorean Fuzzy Number)模糊等价的概念,并给出了 PFN 模糊等价的构造方法。进一步,通过聚合算子给出了基于 PFN 模糊等价的毕达哥拉斯模糊集相似度的一般构造方法。通过实例说明了现有的一些相似度是文中构造的相似度的特例。

关键词:毕达哥拉斯模糊数;毕达哥拉斯模糊集;模糊等价;相似度
中图法分类号 TP182

Similarity Construction Method for Pythagorean Fuzzy Set Based on Fuzzy Equivalence

HU Ping and QIN Ke-yun
College of Mathematics,Southwest Jiaotong University,Chengdu 611756,China

Abstract The notion of Pythagorean fuzzy set is a generalization of Zadeh's fuzzy sets. The study of similarity measures between Pythagorean fuzzy sets is an important topic of Pythagorean fuzzy set theory. Most of the existing similarity measures are presented based on specific practical problems. This paper focuses on general constructing methods of similarity measures between Pythagorean fuzzy sets by using fuzzy equivalences. The notion of fuzzy equivalence is extended to Pythagorean fuzzy numbers and the notion of PFN fuzzy equivalence is proposed. The constructing methods of PFN fuzzy equivalences are presented. Furthermore, by using aggregation operators, some general methods for constructing similarity measures between Pythagorean fuzzy sets are proposed. It is shown that some of the existing similarity measures are special cases of the similarity measures proposed in this study.

Keywords Pythagorean fuzzy number, Pythagorean fuzzy set, Fuzzy equivalence, Similarity measure

1 引言

随着 Zadeh 模糊集[1]理论的发展,人们提出了许多扩展模糊集模型,Atanassov[2]提出了直觉模糊集。直觉模糊集通过隶属函数和非隶属函数刻画不确定性信息,取得了丰硕的研究成果。2013 年,Yager 对直觉模糊集进行了进一步推广,提出了毕达哥拉斯模糊集(Pythagorean Fuzzy Set,PFS)[3-4]。毕达哥拉斯模糊集为处理不确定性信息提供了新的方法。毕达哥拉斯模糊集与直觉模糊集都是描述多属性决策问题(Multiple Attribute Decision Making,MADM)的不确定性的有效工具。目前,基于毕达哥拉斯模糊集的研究在决策[5]、医疗诊断[6]和模式识别[7]等领域已经受到了广泛的关注。

相似度是一个重要的测量不确定信息的工具,模糊相似度是描述模糊集之间相似性程度的度量,具有广泛的应用背景,相关研究被推广至毕达哥拉斯模糊集。Paul[8]提出了毕达哥拉斯模糊集的相似度的公理化定义;Peng[9]提出了毕达哥拉斯模糊集的一些距离测度和相似度;Zeng 等[10]提出了毕达哥拉斯模糊集的一些距离测度,通过 TOPSIS 的思想提出了一种毕达哥拉斯模糊数之间的相似性度量方法,并在毕达哥拉斯模糊环境下提出了一种群决策方法;Firozja 等[11]借助三角模(S-模)给出了毕达哥拉斯模糊数相似度的计算公式,并进一步给出了毕达哥拉斯模糊集的相似度公式;Wei 等[12]提出一些处理决策问题的由余弦函数构造的毕达哥拉斯模糊集的相似度;Zhang[13]提出了处理多属性决策问题的毕达哥拉斯模糊集相似度;Yager 等[14]提出了用强度、强度方向的新方法来表示毕达哥拉斯模糊数,从而构造毕达哥拉斯模糊集的相似度;Li 等[15]用隶属度、非隶属度、自信度和自信度方向 4 个特征函数来刻画毕达哥拉斯模糊数,并用这 4 个参数来构造毕达哥拉斯模糊数及毕达哥拉斯模糊集之间的距离测度;Sun 等[16]将毕达哥拉斯模糊集拓展到区间毕达哥拉

到稿日期:2019-11-13 返修日期:2020-01-07 本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。
基金项目:国家自然科学基金项目(61976130,61473239)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61976130,61473239).
通信作者:秦克云(keyunqin@263.net)

斯模糊集，提出了区间毕达哥拉斯模糊集信息度量的规范化海明距离和规范化欧几里得距离等。

目前，现有的毕达哥拉斯模糊集相似度大多针对具体问题而提出，缺乏一般性的构造方法。本文将从模糊集中的模糊等价入手，借助模糊等价提出毕达哥拉斯模糊数相似度的构造方法，进一步通过聚合算子给出基于模糊等价的毕达哥拉斯模糊集相似度的一般构造方法。

2　模糊等价和毕达哥拉斯模糊集

2.1　模糊等价

定义 1[17]　$E:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$为一个模糊等价，如果：

(E1)对于任意 $x,y\in[0,1]$，有 $E(x,y)=E(y,x)$；

(E2)对于任意 $x\in[0,1]$，有 $E(x,x)=1$；

(E3)$E(1,0)=E(0,1)=0$；

(E4)对于任意 $x,y,u,v\in[0,1]$，如果 $x\leqslant u\leqslant v\leqslant y$，则 $E(x,y)\leqslant E(u,v)$。

容易证明(E4) 等价于：对于任意 $x,y,z\in[0,1]$，若 $x\leqslant y\leqslant z$，则 $E(x,z)\leqslant \min\{E(x,y),E(y,z)\}$。

定义 2[18]　若函数 $n:[0,1]\to[0,1]$满足以下条件，则称 n 为模糊否定(模糊非)：

(1)(边界条件)$n(0)=1,n(1)=0$；

(2)(逆序性)若 $x\leqslant y$，则 $n(x)\geqslant n(y)$。

若模糊否定 n 满足对合性：$n(n(x))=x$，则称 n 为强否定。

定义 3[19]　称 $T:[0,1]^2\to[0,1]$为 t-模，如果对于任意 $x,y,z\in[0,1]$，有：

(1)(交换性)$T(x,y)=T(y,x)$；

(2)(结合性)$T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$；

(3)(单调性)如果 $x\leqslant y$，则 $T(x,z)\leqslant T(y,z)$；

(4)(边界条件)$T(x,1)=x$。

如果 T 连续且严格单调，则称 T 为严格 t-模。

若函数 $S:[0,1]^2\to[0,1]$满足交换性、结合性、单调性，且对于任意 $x\in[0,1]$，有：

(5)(边界条件)$S(x,0)=x$。

则称 S 为 t-余模。如果 S 连续且严格单调，则称 S 为严格 t-余模。

Li 等[20]构造了如下的模糊等价：

(1)设 n 是一个模糊非，E 是一个模糊等价。对于任意 $x,y\in[0,1]$，由 $E_n(x,y)=E(n(x),n(y))$定义的函数 E_n：$[0,1]^2\to[0,1]$是一个模糊等价。

(2)设 E_p 和 E_q 是两个模糊等价，T 是 t-模，则 ET：$[0,1]^2\to[0,1]$是一个模糊等价，其中对于任意 $x,y\in[0,1]$，有 $ET(x,y)=T(E_p(x,y),E_q(x,y))$。

(3)设 E_p 和 E_q 是两个模糊等价，S 是 t-余模，则 ES：$[0,1]^2\to[0,1]$是一个模糊等价，其中对于任意 $x,y\in[0,1]$，有 $ES(x,y)=S(E_p(x,y),E_q(x,y))$。

(4)定义的E_α是一个模糊等价，其中 $a\geqslant0,b\geqslant0$，且对于任意 $x,y\in[0,1]$，有 $E_\alpha(x,y)=\dfrac{a-a|x-y|+b\min(x,y)}{a-(a-1)|x-y|+b\min(x,y)}$。

(5)定义的E_β是一个模糊等价，其中 $a\geqslant0,b\geqslant0$，且对于任意 $x,y\in[0,1]$，有：

$$E_\beta(x,y)=\frac{a-a|x-y|+b\min(1-x,1-y)}{a-(a-1)|x-y|+b\min(1-x,1-y)}$$

模糊等价可以用来刻画[0,1]中两个数的接近程度，借助模糊等价可以刻画毕达哥拉斯模糊集之间的相似度。

2.2　毕达哥拉斯模糊集(PFS)

定义 4[4]　设 X 为论域，X 上的一个毕达哥拉斯模糊集为 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in X\}$，其中 $\mu_A,v_A:X\to[0,1]$，$\mu_A(x)$与 $v_A(x)$分别表示元素 x 关于 A 的隶属度与非隶属度。称 $\pi_A(x)$为 x 关于 A 的犹豫度，其中 $\pi_A(x)=\sqrt{1-\mu_A^2(x)-v_A^2(x)}$。

下面用 $PFS(X)$表示论域 X 上所有毕达哥拉斯模糊集构成的集合。若 $x=(\mu_x,v_x)$满足 $0\leqslant\mu_x^2+v_x^2\leqslant1$，则称 x 为毕达哥拉斯模糊数(PFN)。所有毕达哥拉斯模糊数构成的集合记为 PFN_s。

定义 5[11,13]　(1)设 $x=(\mu_x,v_x)$，$y=(\mu_y,v_y)$是毕达哥拉斯模糊数，则 $x\leqslant y$ 当且仅当 $\mu_x\leqslant\mu_y,v_x\geqslant v_y$。

(2)设 $A,B\in PFS(X)$。如果对于任意 $x\in X$，有$(\mu_A(x),v_A(x))\leqslant(\mu_B(x),v_B(x))$，则称 A 包含于 B，记为 $A\subseteq B$。

定义 6[21]　称 $S:PFS(X)\times PFS(X)\to[0,1]$为一个相似度，若对任意 $A,B\in PFS(X)$，有：

(S1)$0\leqslant S(A,B)\leqslant1$；

(S2)$S(A,B)=S(B,A)$；

(S3)$S(A,A)=1$；

(S4)若 $A\subseteq B\subseteq C$，则 $S(A,C)\leqslant S(A,B)$，$S(A,C)\leqslant S(B,C)$。

3　毕达哥拉斯模糊数的模糊等价

本节将模糊等价的概念推广至毕达哥拉斯模糊数，并给出它的构造方法。

定义 7[17]　称 $E:PFN_s\times PFN_s\to[0,1]$为一个 PFN 模糊等价，如果：

(E1)对于任意 $x,y\in PFN_s$，有 $E(x,y)=E(y,x)$；

(E2)对于任意 $x\in PFN_s$，有 $E(x,x)=1$；

(E3)$E((1,0),(0,1))=0$；

(E4)对于任意 $x,y,u,v\in PFN_s$，如果 $x\leqslant u\leqslant v\leqslant y$，则 $E(x,y)\leqslant E(u,v)$。

定理 1　对于任意 $x,y\in[0,1]$，函数 $E(x,y)=\dfrac{a-a|x-y|}{a-(a-1)|x-y|}$($a>0$)是一个模糊等价。

证明：(E1)，(E2)与(E3)显然成立。

(E4)假设 $x,y,z\in[0,1]$，且 $x\leqslant y\leqslant z$，则：

$$E(x,y)=\frac{a-a|x-y|}{a-(a-1)|x-y|}$$

$$E(x,z)=\frac{a-a|x-z|}{a-(a-1)|x-z|}$$

$$E(y,z)=\frac{a-a|y-z|}{a-(a-1)|y-z|}$$

考虑函数：

$$f(m)=\frac{a-a|m-x|}{a-(a-1)|m-x|}$$

$$g(n)=\frac{a-a|z-n|}{a-(a-1)|z-n|}$$

其中，$m,n\in[0,1]$，$m\geqslant x$，$n\leqslant z$。则容易验证：

$$f'(m)=\frac{-a}{[a-(a-1)|m-x|]^2}\leqslant 0$$

$$g'(n)=\frac{a}{[a-(a-1)|z-n|]^2}\geqslant 0$$

因此，函数 f 关于 m 递减，函数 g 关于 n 递增，故 $E(y,x)\geqslant E(z,x)$，$E(x,z)\leqslant E(y,z)$。

综上，$E(x,y)$是一个模糊等价。

推论 1 对于如下形式的模糊等价：

$$E(x,y)=\frac{a-a|x-y|}{a-(a-1)|x-y|},a>0$$

参数 a 取不同值时，可得如下常用的模糊等价：

(1)当 $a=1$ 时，$E(x,y)=1-|x-y|$；

(2)当 $a=\frac{1}{2}$时，$E(x,y)=\frac{1-|x-y|}{1+|x-y|}$。

由 Fodor 等构造的 T-模与 S-模之间的关系，可以得到定理 2。

定理 2 设 T 是一个 t-模，对于任意 $x,y\in PFNs$，$x=(\mu_x,v_x)$，$y=(\mu_y,v_y)$，令：

$$s(x,y)_T=\sqrt{T(1-(\mu_x-\mu_y)^2,1-(v_x-v_y)^2)}$$

则 $S(x,y)_T$ 是一个 PFN 模糊等价。

证明：(E1)，(E2)与(E3)显然成立。

(E4)假设 $x,y,z\in PFN_s$，且 $x\leqslant y\leqslant z$，则 $\mu_x\leqslant\mu_y\leqslant\mu_z$，$v_x\geqslant v_y\geqslant v_z$，从而有 $(\mu_x-\mu_y)^2\leqslant(\mu_x-\mu_z)^2$，$(\mu_y-\mu_z)^2\leqslant(\mu_x-\mu_z)^2$，$(v_x-v_y)^2\leqslant(v_x-v_z)^2$，$(v_y-v_z)^2\leqslant(v_x-v_z)^2$。

由 T-模的单调性可得：

$$T(1-(\mu_x-\mu_y)^2,1-(v_x-v_y)^2)\geqslant T(1-(\mu_x-\mu_z)^2,1-(v_x-v_z)^2)$$

故有 $S(x,y)_T\geqslant S(x,z)_T$。类似可证 $S(y,z)_T\geqslant S(x,z)_T$，从而有：

$$S(x,z)_T\leqslant\min\{S(x,y)_T,S(y,z)_T\}$$

基于三角模的不同形式，可以构造出多种形式的 PFN 模糊等价。

推论 2 (1)设 T 是一个 t-模，对于任意 $x,y\in PFN_s$，$x=(\mu_x,v_x)$，$y=(\mu_y,v_y)$，令：

$$S(x,y)_T=\sqrt{T(1-|\mu_x-\mu_y|,1-|v_x-v_y|)}$$

则 $S(x,y)_T$ 是一个 PFN 模糊等价。

(2)设 S 是一个 t-余模，对于任意 $x,y\in PFN_s$，$x=(\mu_x,v_x)$，$y=(\mu_y,v_y)$，令：

$$S(x,y)_S=\sqrt{1-S(|\mu_x-\mu_y|,|v_x-v_y|)}$$

则 $S(x,y)_S$ 是一个 PFN 模糊等价。

此推论的证明类似于定理 2。

利用 PFN_s 之间隶属度与非隶属度的模糊等价，由它们之间的线性组合可以构造 PFN_s 的 PFN 模糊等价。

定理 3 若 E_1,E_2 是模糊等价，对于任意 $x,y\in PFNs$，$x=(\mu_x,v_x)$，$y=(\mu_y,v_y)$，令：

$$S(x,y)=\alpha E_1(\mu_x,\mu_y)+\beta E_2(v_x,v_y)$$

则 $S(x,y)$是一个 PFN 模糊等价，其中 $\alpha,\beta\in[0,1]$，且 $\alpha+\beta=1$。

根据定理 3，基于模糊等价可以构造如下的 PFN 模糊等价。

例 1 通过 Li 等给出的模糊等价，可以构造一些 PFN 模糊等价，这里取 $\alpha=\beta=0.5$，$E_1=E_2$。

(1)$E_{T_L}(x,y)=1-|x-y|$ 是一个模糊等价，令 $E_1=E_2=E_{T_L}$ 可得如下的 PFN 模糊等价：

$$S(x,y)=0.5(2-|\mu_x-\mu_y|-|v_x-v_y|)$$

(2)$E_{T_p}(x,y)=\frac{\min(x,y)}{\max(x,y)}$是一个模糊等价，令 $E_1=E_2=E_{T_p}$ 可得如下的 PFN 模糊等价：

$$S(x,y)=0.5\cdot(\frac{\min(\mu_x,\mu_y)}{\max(\mu_x,\mu_y)}+\frac{\min(v_x,v_y)}{\max(v_x,v_y)})$$

(3)$E_1(x,y)=1-|\frac{2x}{1+x}-\frac{2y}{1+y}|$是一个模糊等价，类似可得如下的 PFN 模糊等价：

$$S(x,y)=0.5(2-|\frac{2\mu_x}{1+\mu_x}-\frac{2\mu_y}{1+\mu_y}|-|\frac{2v_x}{1+v_x}-\frac{2v_y}{1+v_y}|)$$

(4)$E_2(x,y)=1-|x^2-y^2|$是一个模糊等价，由定理 3 可得如下的 PFN 模糊等价：

$$S(x,y)=0.5(2-|\mu_x^2-\mu_y^2|-|v_x^2-v_y^2|)$$

(5)$E_3(x,y)=\frac{2\min(x,y)}{x+y}$是一个模糊等价，类似可得如下的 PFN 模糊等价：

$$S(x,y)=\frac{\min(\mu_x,\mu_y)}{\mu_x+\mu_y}+\frac{\min(v_x,v_y)}{v_x+v_y}$$

(6)$E_4(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$是一个模糊等价，由定理 3 可得如下的 PFN 模糊等价：

$$S(x,y)=\frac{\mu_x\mu_y}{\mu_x^2+\mu_y^2}+\frac{v_xv_y}{v_x^2+v_y^2}$$

(7)$E_5(x,y)=\frac{2\min(x^2,y^2)}{x^2+y^2}$是一个模糊等价，由定理 3 可得如下的 PFN 模糊等价：

$$S(x,y)=\frac{\min(\mu_x^2,\mu_y^2)}{\mu_x^2+\mu_y^2}+\frac{\min(v_x^2,v_y^2)}{v_x^2+v_y^2}$$

(8)$E_6(x,y)=\frac{1-|x-y|}{1+|x-y|}$是一个模糊等价，类似可得如下的 PFN 模糊等价：

$$S(x,y)=0.5(\frac{1-|\mu_x-\mu_y|}{1+|\mu_x-\mu_y|}+\frac{1-|v_x-v_y|}{1+|v_x-v_y|})$$

(9)$E_7(x,y)=\frac{\min(1-x,1-y)}{\max(1-x,1-y)}$是一个模糊等价，由定理 3 可得如下的 PFN 模糊等价：

$$S(x,y)=0.5\cdot\left(\frac{\min(1-\mu_x,1-\mu_y)}{\max(1-\mu_x,1-\mu_y)}+\frac{\min(1-v_x,1-v_y)}{\max(1-v_x,1-v_y)}\right)$$

(10)$E_8(x,y)=\frac{2\min(1-x,1-y)}{2-x-y}$是一个模糊等价，由定理 3 可得如下的 PFN 模糊等价：

$$S(x,y)=\frac{\min(1-\mu_x,1-\mu_y)}{2-\mu_x-\mu_y}+\frac{\min(1-v_x,1-v_y)}{2-v_x-v_y}$$

定理 4 $S(x,y)=1-\sqrt{0.5((\mu_x-\mu_y)^2+(v_x-v_y)^2)}$是一个 PFN 模糊等价。

证明：由 PFN 模糊等价的定义可知，定义 7 中的(E1)，(E2)与(E3)显然成立，以下证明(E4)。

(E4)假设 $x,y,z\in PFN_s$，且 $x\leqslant y\leqslant z$，则 $\mu_x\leqslant\mu_y\leqslant\mu_z$，$v_x\geqslant v_y\geqslant v_z$，有：

$$S(x,y)=1-\sqrt{0.5((\mu_x-\mu_y)^2+(v_x-v_y)^2)}$$
$$S(y,z)=1-\sqrt{(\mu_y-\mu_z)^2+(v_y-v_z)^2}$$
$$S(x,z)=1-\sqrt{0.5((\mu_x-\mu_z)^2+(v_x-v_z)^2)}$$

因为

$$(\mu_x-\mu_y)^2\leqslant(\mu_x-\mu_z)^2,(\mu_y-\mu_z)^2\leqslant(\mu_x-\mu_z)^2$$
$$(v_x-v_y)^2\leqslant(v_x-v_z)^2,(v_y-v_z)^2\leqslant(v_x-v_z)^2$$

即

$$(\mu_x-\mu_y)^2+(v_x-v_y)^2\leqslant(\mu_x-\mu_z)^2+(v_x-v_z)^2$$
$$(\mu_y-\mu_z)^2+(v_y-v_z)^2\leqslant(\mu_x-\mu_z)^2+(v_x-v_z)^2$$

则有

$$1-\sqrt{0.5((\mu_x-\mu_y)^2+(v_x-v_y)^2)}\geqslant1-\sqrt{0.5((\mu_x-\mu_z)^2+(v_x-v_z)^2)}$$
$$1-\sqrt{0.5((\mu_y-\mu_z)^2+(v_y-v_z)^2)}\geqslant1-\sqrt{0.5((\mu_x-\mu_z)^2+(v_x-v_z)^2)}$$

则 $S(x,z)\leqslant S(x,y)$，$S(x,z)\leqslant S(y,z)$。

故 $S(x,y)=1-\sqrt{0.5((\mu_x-\mu_y)^2+(v_x-v_y)^2)}$ 是一个 PFN 模糊等价。

4　毕达哥拉斯模糊集的相似度

设 A,B 是论域 X 上的两个毕达哥拉斯模糊集，其中 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$A=\{\langle x_i,\mu_A(x_i),v_A(x_i)\rangle\mid x_i\in X\}$，$B=\{\langle x_i,\mu_B(x_i),v_B(x_i)\rangle\mid x_i\in X\}$。

接下来将通过聚合算子构造 PFS_s 之间的相似度。

定义 8[22]　称函数 $M:[0,1]^n\to[0,1]$ 是一个聚合算子，如果满足以下性质：

(M1) $M(x,\cdots,x)=x$。对于任意 $x\in[0,1]$ 都成立。

(M2) M 关于每个变量单调递增。

已有研究大多采用如下形式的聚合算子[18]。

(1)算术平均数：$M(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$。

(2)凸线性组合：$M(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\alpha\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(1-\alpha)\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

定理 5　设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，M 是一个聚合算子，E 是一个 PFN 模糊等价，对于任意 $A,B\in PFS(X)$，令：

$$S(A,B)=M_{i=1}^{n}E(A(x_i),B(x_i))$$

则 $S(A,B)$ 是毕达哥拉斯模糊集 A,B 之间的相似度。

证明：由相似度的定义可知，定义 6 中的(S1)，(S2)显然成立，以下证明(S3)和(S4)。

(S3)对于任意 $A\in PFS(X)$，由于 E 是一个 PFN 模糊等价，因此有 $E(A(x_i),A(x_i))=1$。注意到 M 是一个聚合算子，从而有：

$$S(A,A)=M_{i=1}^{n}E(A(x_i),A(x_i))=1$$

(S4)假设 $A,B,C\in PFS(X)$ 且 $A\subseteq B\subseteq C$，则有：

$$E(A(x_i),C(x_i))\leqslant E(A(x_i),B(x_i))$$
$$E(A(x_i),C(x_i))\leqslant E(B(x_i),C(x_i))$$

则有

$$M_{i=1}^{n}E(A(x_i),C(x_i))\leqslant M_{i=1}^{n}E(A(x_i),B(x_i))$$
$$M_{i=1}^{n}E(A(x_i),C(x_i))\leqslant M_{i=1}^{n}E(B(x_i),C(x_i))$$

即 $S(A,C)\leqslant S(A,B)$，$S(A,C)\leqslant S(B,C)$。

因此，$S(A,B)=M_{i=1}^{n}E(A(x_i),B(x_i))$ 是一个相似度。

将毕达哥拉斯模糊数的相似度用聚合算子聚合成毕达哥拉斯模糊集的相似度是一般化的方法，可根据具体需要相应地变换相似度的形式。

推论 3　设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，E 是一个 PFN 模糊等价，则对于所有 $A,B\in PFS(X)$，有：

$$S(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(A(x_i),B(x_i))$$

则 $S(A,B)$ 是毕达哥拉斯模糊集 A,B 之间的相似度。

定理 6　设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，E 是一个 PFN 模糊等价，对于任意 $A,B\in PFS(X)$，令：

$$S(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\omega_iE(A(x_i),B(x_i))$$

其中，$\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的权重，且 $0\leqslant\omega_i\leqslant1$，$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$，则 $S(A,B)$ 是毕达哥拉斯模糊集 A,B 之间的相似度。

定理 6 的证明类似于定理 5，这里不再叙述。

定理 7　在论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上，对于任意的 $A,B\in PFS(X)$，由 T－模构造的 PFN 模糊等价为：

$$S_{T_1}(A(x_i),B(x_i))=\sqrt{T(1-(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2,1-(v_A(x_i)-v_B(x_i))^2)}$$
$$S_{T_2}(A(x_i),B(x_i))=\sqrt{T(1-|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|,1-|v_A(x_i)-v_B(x_i)|)}$$

则 $S(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\omega_iS_{T_j}(A(x_i),B(x_i))(j=1,2)$ 是毕达哥拉斯模糊集 A,B 之间的相似度。

例 2[10,23]　考虑在论域 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ 上的毕达哥拉斯模糊集 $A_i(i=1,2,3)$：

$$A_1=\{(x_1,1,0),(x_2,0.8,0),(x_3,0.7,0.1)\}$$
$$A_2=\{(x_1,0.8,0.1),(x_2,1,0),(x_3,0.9,0.1)\}$$
$$A_3=\{(x_1,0.6,0.2),(x_2,0.8,0),(x_3,0.6,0.2)\}$$

对 $A\in PFS(X)$，且 $A=\{(x_1,0.5,0.3),(x_2,0.6,0.2),(x_3,0.8,0.1)\}$，这里用 $S(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(A(x_i),B(x_i))$ 作为相似度，分别以 E_{T_L}，E_{T_p}，E_1-E_8 作为 PFN 模糊等价来计算 PFS_s 的相似度，结果如表 1 所示。

表 1　相似度

Table 1　Similarity measure

Similarity measure	(A_1,A)	(A_2,A)	(A_3,A)
(1) $S_{T_L}(A_i,A)$	0.78333	0.8	0.85
(2) $S_{T_p}(A_i,A)$	0.52083	0.57454	0.58333
(3) $S_1(A_i,A)$	0.82422	0.80937	0.83764
(4) $S_2(A_i,A)$	0.78167	0.78	0.86833
(5) $S_3(A_i,A)$	0.57619	0.66007	0.68167
(6) $S_4(A_i,A)$	0.62519	0.72906	0.77111
(7) $S_5(A_i,A)$	0.49788	0.529	0.54584
(8) $S_6(A_i,A)$	0.67055	0.68643	0.74242
(9) $S_7(A_i,A)$	0.61111	0.57963	0.72732
(10) $S_8(A_i,A)$	0.69651	0.667	0.83094

从表 1 中看出，A 与 A_3 的相似度最大。

毕达哥拉斯模糊集的相似度是毕达哥拉斯模糊集应用研究的重要内容。在不考虑犹豫度的情况下，Paul[8] 构造的毕达哥拉斯模糊集 A 与 B 的相似度为：

$$S(A,B)=1-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\{|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|+|v_A(x_i)-v_B(x_i)|\}$$

可由 PFN 模糊等价 $S(x,y)=0.5(2-|\mu_x-\mu_y|-|v_x-v_y|)$ 构造得到。并且相似度：

$$S(A,B)=1-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\{|\mu_A^2(x_i)-\mu_B^2(x_i)|+|v_A^2(x_i)-v_B^2(x_i)|\}$$

可由 PFN 模糊等价 $S(x,y)=0.5(2-|\mu_x^2-\mu_y^2|-|v_x^2-v_y^2|)$ 构造得到。Hong 等[24]构造的相似度：

$$S_{HK}(M,N)=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(|\mu_M(x_i)-\mu_N(x_i)|+|v_M(x_i)-v_N(x_i)|)}{2n}$$

也可由 PFN 模糊等价 $S(x,y)=0.5(2-|\mu_x-\mu_y|-|v_x-v_y|)$ 构造得到。这些相似度都可以通过 PFN 模糊等价来构造得到。因此，本文讨论的由模糊等价构造毕达哥拉斯模糊集的相似度是更一般的方法。

结束语 由于毕达哥拉斯模糊集能够更充分、更精确地描述现实生活中的不确定性问题，因此为人们处理不确定信息提供了一种非常有效的工具。本文基于模糊等价提出了毕达哥拉斯模糊数之间的 PFN 模糊等价构造方法，进而借助聚合函数给出了毕达哥拉斯模糊集相似度的一般构造方法。在后续研究工作中，我们将进一步讨论毕达哥拉斯模糊集的相似度在冲突分析、多属性决策等领域中的应用。

参 考 文 献

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338-353.

[2] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20: 89-97.

[3] YAGER R R. Pythagorean fuzzy subsets [C] // Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting (IFSA/NAFIPS). Edmonton, Canada: IEEE, 2013: 57-61.

[4] YAGER R R. Pythagorean membership grades in multi-criteria decision making [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014, 22(5): 958-965.

[5] CHENG L N, ZHOU L G. An Approach to Multiple Attribute Group Decision Making Based on Interval-valued Pythagorean Fuzzy Cosine Similarity Measure [J]. Value Engineering, 2019 (19): 206-210.

[6] XIAO F Y, DING W P. Divergence measure of Pythagorean fuzzy sets and its applicationin medical diagnosis [J]. Applied Soft Computing, 2019, 79: 254-267.

[7] PENG X, YUAN H, YANG Y. Pythagorean Fuzzy Information Measures and Their Applications [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2017, 10: 991-1029.

[8] PAUL A E. Distance and similarity measures for Pythagorean fuzzy sets [J]. Granular Computing, 2020, 5: 225-238.

[9] PENG X D. New similarity measure and distance measures for Pythagorean fuzzy set [J]. Complex & Intelligent Systems, 2019, 5: 101-111.

[10] ZENG W Y, LI D Q, YIN Q. Distance and similarity measures of Pythagorean fuzzy sets and their applications to multiple criteria group decision making [J]. International Journal Intelligent Systems, 2018, 33: 2236-2254.

[11] FIROZJA A M, AGHELI B, JAMKHANEH B H. A new similarity measures for Pythagorean fuzzy sets [J]. Complex & Intelligent Systems, 2020(6): 67-74.

[12] WEI G, WEI Y. Similarity measures of Pythagorean fuzzy sets based on the cosine function and their applications [J]. International Journal Intelligent Systems, 2018, 33: 634-652.

[13] ZHANG X. A novel approach based on similarity measures for Pythagorean fuzzy multiple criteria group decision making [J]. International Journal Intelligent Systems, 2016, 31: 593-611.

[14] YAGER R R, ABBASOV A M. Pythagorean membership grades, complex numbers and decision making [J]. International Journal Intelligent Systems, 2013, 28: 436-452.

[15] LI D Q, ZENG W Y, YIN Q. Distance measures of Pythagorean fuzzy sets and their applications in multiattribute decision making [J]. Control and Decision, 2017, 32: 1817-1823.

[16] SUN Q Q, LI X N. Information measure of interval valued Pythagorean fuzzy set and its application[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2019(9): 1-18.

[17] FODOR J C, ROUBENS M. Fuzzy Preference Modelling and Multi-criteria Decision Support[M] // Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1994.

[18] ATANASSOV K. Intuitionistic fuzzy sets theory and application [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[19] WANG G J. Non-classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning(2nd Edition)[M]. Beijing: Science Press, 2008.

[20] LI Y F, QIN K Y, HE X X. Some new approaches to constructing similarity measures [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 234: 46-60.

[21] PENG X, YUAN H, YANG Y. Pythagorean fuzzy information measures and their applications[J]. International Journal Intelligent Systems, 2017, 32(10): 991-1029.

[22] KOLESAROVA A. Limit properties of quasi-arithmetic means [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124: 65-71.

[23] GARG H. A novel correlation coefficients between Pythagorean fuzzy sets and its applications to decision-making processes [J]. International Journal Intelligent Systems, 2016, 31(12): 1234-1253.

[24] HONG D H, KIM C. A note on similarity measures between vague sets and between elements[J]. Information Science, 1999, 115: 83-96.

HU Ping, born in 1994, M. S. candidate. Her main research interests include rough set theory and so on.

QIN Ke-yun, born in 1962, Ph.D, is a senior member of China Computer Federation. His main research interests include rough set theory, formal concept analysis and so on.