计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.191200175

集对优势关系下多粒度决策粗糙集的可变三支决策模型

薛占熬　张　敏　赵丽平　李永祥
河南师范大学计算机与信息工程学院　河南 新乡 453007
“智慧商务与物联网技术”河南省工程实验室　河南 新乡 453007

摘　要　多粒度决策粗糙集是从多角度来处理不确定数据和风险决策问题的重要模型。针对不完备信息系统下的决策分析问题,在多粒度决策粗糙集中引入集对优势关系,对优势度进行了改进,使结果更加合理。然后对多粒度近似空间进行了拓展,提出了集对优势关系下的乐观、悲观、均值、乐观-悲观和悲观-乐观5种多粒度决策粗糙集模型,并讨论了其相关性质以及模型之间的相互关系。结合三支决策理论,在不完备信息系统中用区间值表示损失函数,获得不同的阈值,建立了5个相应的可变三支决策模型,推导出决策规则。最后,通过公司员工评估的案例证明,所提模型在实际应用中灵活性更高,不会过于宽松或过于严格,使最终决策更为合理,从而为不完备信息系统下不确定性问题的决策分析提供了新方法。
关键词:多粒度决策粗糙集;多粒度;集对优势关系;不完备信息系统;三支决策
中图法分类号　TP181

Variable Three-way Decision Model of Multi-granulation Decision Rough Sets Under Set-pair Dominance Relation

XUE Zhan-ao,ZHANG Min,ZHAO Li-ping and LI Yong-xiang
College of Computer and Information Engineering,Henan Normal University,Xinxiang,Henan 453007,China
Engineering Lab of Henan Province for Intelligence Business & Internet of Things,Xinxiang,Henan 453007,China

Abstract　Multi-granulation decision rough sets are important model to deal with decision-making under uncertain data and risk from multiple perspectives. In view of the decision-making analysis problem in incomplete information system,this paper firstly introduces the set-pair dominance relation to the multi-granulation decision rough sets,improves the set-pair dominance degree in the set-pair dominance relation,and makes the result more reasonable. Then,the multi-granulation approximation space is expanded,and five kinds of multi-granulation decision rough sets models are proposed,which are optimistic,pessimistic,mean,optimistic-pessimistic and pessimistic-optimistic under the set-pair dominance relation. Meanwhile,the related properties and the relation among these models are discussed. Furthermore,combined with the theory ofthree-way decisions,the loss function is represented by interval value in incomplete information system,and different thresholds are obtained. Then five corresponding variable three way decision models are established,and the decision rules are derived. Finally,the case of employee evaluation shows that the proposed model is more flexible in practical application,not too loose or too strict,and the final decision is more reasonable. It provides a novel method for decision-making of uncertainty problems in incomplete information system.
Keywords　Multi-granulation decision rough sets,Multi-granulation,Set-pair dominance relation,Incomplete information system,Three-way decisions

1　引言

Pawlak粗糙集[1]理论是处理不精确和不确定性问题的一种有效工具,它是通过等价关系来对论域进行划分的,引起了学者们的广泛关注。目前,研究者们已提出了一系列的扩展模型[2-6],并将其成功应用于许多领域[7-12]。在Pawlak粗糙集中,只有完全包含于目标概念的等价类才被划分到下近似,在处理实际问题时显得过于严格,缺乏对错误分类的容错能力。Yao等[3]通过引入Bayes风险决策理论提出了决策理论粗糙集模型,通过计算各分类决策的风险损失值推导出最小期望风险的决策规则。该模型具有一定的容错能力,能够克服经典粗糙集模型的局限性。随后,Yao[13]在决策粗糙集的基础上提出了三支决策的概念,对粗糙集中的正域、负域和边界域做出了合理的语义解释,并给出了三支决策规则,分别为接受决策规则、拒绝决策规则和延迟决策规则。条件概率和阈值(α,β)是三支决策模型研究的两个关键因素:条件概率

到稿日期:2019-12-30　返修日期:2020-06-10　本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。
基金项目:国家自然科学基金(61772176,61402153);河南省科技攻关项目(182102210078,182102210362)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61772176,61402153) and Scientific and Technological Project of Henan Province of China(182102210078,182102210362).
通信作者:薛占熬(xuezhanao@163.com)

是对象的等价类与目标集合重叠的个数与等价类个数的比值，而阈值取决于与决策者相关的损失函数。三支决策已成为目前研究的热点，学者们相继对其进行了一系列的研究[14-17]。

从粒计算的角度看，Pawlak 粗糙集理论是从单粒度的角度描述目标概念。为了从多个角度来处理和分析问题，Qian 等[18]提出了多粒度粗糙集模型，该模型引起了学者们的广泛关注。Qian 等[19]在多粒度粗糙集中引入 Bayes 风险决策理论，提出多粒度决策理论粗糙集模型。随后，Zhang 等[20]研究了多粒度空间中的概率粗糙集。Sang 等[21]对多粒度决策粗糙集中的约简算法进行了研究。考虑到属性的粒度与属性值的粒度不同，Xu[22]提出了一种基于属性粒度和属性值粒度的多粒度粗糙集模型，该模型使粗糙集的信息处理过程具有结构化和层次化的特点。Cheng 等[23]重新定义了乐观和悲观邻域多粒度粗糙集，提出了一种新的粒度约简算法。这些模型是基于完备的信息系统，极大地推动了多粒度粗糙集的理论研究与应用。

由于数据的复杂性和多样性，实际应用中的信息系统往往是不完备的。针对不完备信息系统，大部分学者用优势关系代替等价关系来处理缺失值。Qian 等[24]将容差关系引入基于多粒度的不完备粗糙集模型中，通过多个容差关系来定义近似集。Luo 等[25]将可能度容差关系引入到多粒度决策粗糙集中，解决了不完备信息系统的缺失值问题。Huang[26]引入集对分析的思想，提出了基于集对优势度的粗糙集模型来处理不完备信息。由于在实际应用中会经常遇到含有缺失值的决策任务，Xue 等[27]从相对量化和绝对量化两个角度来分析不完备信息系统中的多属性决策问题，提出了不完备信息系统下的双量化广义多粒度粗糙集模型，结果表明双量化后的结果近似精度更高。Luo 等[28]将三支决策理论应用于不完备多尺度信息系统中，利用属性值分类法研究了动态三支决策问题，为不完备信息系统中增量三支决策方法的实现提供了理论依据。Chen 等[29]通过将不完备信息表转化为集值表，研究了不同相似关系和不同相似类之间的关系，讨论了三支决策规则。Luo 等[30]将计算和概念公式应用到不完备信息系统的三支决策中，提出了新的度量对象相似度的方法，该新方法在实际应用中更具实用性。

多粒度粗糙集能够从多个粒度结构来处理不确定性问题，而三支决策理论同时考虑了决策过程中的不确定性和成本损失，这符合人类决策的认知过程和选择习惯。因此，它们的结合可以更有效、更准确地对不确定性信息进行决策。经典的三支决策模型可用来处理完备信息系统；不完备信息系统由于存在缺失值，单一数值形式的损失函数不再适用，因此本文以区间值的形式来表示损失函数，并根据需要选取不同参数值来计算相应的阈值。从多粒度的视角，本文提出了乐观和悲观两种模型；由于这两种模型过于宽松或苛刻，又将近似空间拓展，讨论了均值、下近似乐观上近似悲观以及下近似悲观上近似乐观的情况，从而建立了 5 种基于集对优势关系多粒度决策粗糙集的可变三支决策模型，并推导出相应的决策规则，设计其算法；最后通过对公司员工评估案例进行分析，验证了所提模型的有效性。

2 基础知识

本节介绍了一些基本概念和相关定义。设论域 U 是一个非空的有限集合，$R\subseteq U\times U$ 是论域上的一个等价关系，$P(U)$ 是由 U 的所有子集组成的幂集，$\sim X$ 表示集合 X 的补集，符号 $|\cdot|$ 表示集的基数。

2.1 粗糙集

定义 1(粗糙集)[1] 设 (U,R) 为近似空间，等价关系 R 对论域 U 形成的划分记为 U/R。$\forall X\subseteq U$，则定义 X 的下近似和上近似分别为：

$$\underline{R}(X)=\{x\in U\mid[x]_R\subseteq X\}$$

$$\overline{R}(X)=\{x\in U\mid[x]_R\cap X\neq\emptyset\}$$

其中，$[x]_R$ 是 x 在等价关系 R 下的等价类。当 $\underline{R}(X)=\overline{R}(X)$ 时，称 X 是在等价关系 R 下的精确集；当 $\underline{R}(X)\neq\overline{R}(X)$ 时，称 X 是在等价关系 R 下的粗糙集。根据粗糙集的近似集，可将论域 U 划分为 3 个互不相交的区域：

$$POS(X)=\underline{R}(X)$$

$$NEG(X)=U\text{-}\overline{R}(X)$$

$$BND(X)=\overline{R}(X)\text{-}\underline{R}(X)$$

2.2 多粒度粗糙集

定义 2(乐观多粒度粗糙集)[19] 设信息系统 $IS=(U,AT,V,f)$，A_i 是 AT 中的任一属性子集，其中 $i=1,2,\cdots,m$ $(m\leqslant 2^{|AT|})$。$\forall X\subseteq U$，则定义 X 关于 A_i 的乐观多粒度粗糙集模型的下近似和上近似分别为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X)=\{x\in U\mid[x]_{A_1}\subseteq X\vee[x]_{A_2}\subseteq X\vee[x]_{A_3}\subseteq X\cdots\vee[x]_{A_m}\subseteq X\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X)=\sim(\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(\sim X))$$

其中，$[x]_{A_i}$ 是 x 在粒度集 A_i 下的等价类。称 $(\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X),\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X))$ 为关于 X 的乐观多粒度粗糙集。

定义 3(悲观多粒度粗糙集)[19] 设信息系统 $IS=(U,AT,V,f)$，A_i 是 AT 中的任一属性子集，其中 $i=1,2,\cdots,m$ $(m\leqslant 2^{|AT|})$。$\forall X\subseteq U$，则定义 X 关于 A_i 的悲观多粒度粗糙集模型的下近似和上近似分别为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{I}(X)=\{x\in U\mid[x]_{A_1}\subseteq X\wedge[x]_{A_2}\subseteq X\wedge[x]_{A_3}\subseteq X\wedge\cdots\wedge[x]_{A_m}\subseteq X\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{I}(X)=\sim(\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{I}(\sim X))$$

则称 $(\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{I}(X),\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{I}(X))$ 为关于 X 的悲观多粒度粗糙集。

2.3 决策粗糙集

设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为对象集；$\tau=\{X,\sim X\}$ 为状态集，分别表示对象 x 属于目标概念 X 和不属于目标概念 X。$\xi=\{a_P,a_N,a_B\}$ 为决策集，表示将对象 x 划分到正域 $POS(X)$、边界域 $BND(X)$ 和负域 $NEG(X)$ 的决策动作。λ_{PP}，λ_{BP} 和 λ_{NP} 表示对象 $x\in U$ 时，分别作出 a_P，a_B 和 a_N 3 种决策所对应的代价损失；λ_{PN}，λ_{BN} 和 λ_{NN} 表示对象 $x\notin U$ 时，分别作出 a_P，a_B 和 a_N 3 种决策所对应的代价损失。3 种决策的损失

函数矩阵如表 1 所列。

表 1 3 种决策的损失函数矩阵

Table 1 Loss function matrix of three kinds of decision

Decision Actions	Decision Functions	
	X	$\sim X$
a_P	λ_{PP}	λ_{PN}
a_B	λ_{BP}	λ_{BN}
a_N	λ_{NP}	λ_{NN}

根据表 1 和 Bayes 风险决策理论，可以计算出对象 x 分别采取 3 种决策动作的期望损失，表示如下：

$$R(a_P|[x])=\lambda_{PP}\cdot P(X|[x])+\lambda_{PN}\cdot(1-P(X|[x]))$$

$$R(a_B|[x])=\lambda_{BP}\cdot P(X|[x])+\lambda_{BN}\cdot(1-P(X|[x]))$$

$$R(a_N|[x])=\lambda_{NP}\cdot P(X|[x])+\lambda_{NN}\cdot(1-P(X|[x]))$$

根据 Bayes 风险决策理论，可以进一步得到如下形式的决策规则。

(P)若 $P(X|[x])\geqslant\alpha$，则 $x\in POS(X)$；

(B)若 $\beta<P(X|[x])<\alpha$，则 $x\in BND(X)$；

(N)若 $P(X|[x])\leqslant\beta$，则 $x\in NEG(X)$。

其中，α，β 和 γ 可通过下列 3 个公式计算：

$$\alpha=\frac{\lambda_{PN}-\lambda_{BN}}{(\lambda_{PN}-\lambda_{BN})+(\lambda_{BP}-\lambda_{PP})}$$

$$\beta=\frac{\lambda_{BN}-\lambda_{NN}}{(\lambda_{BN}-\lambda_{NN})+(\lambda_{NP}-\lambda_{BP})}$$

$$\gamma=\frac{\lambda_{PN}-\lambda_{NN}}{(\lambda_{PN}-\lambda_{NN})+(\lambda_{NP}-\lambda_{PP})}$$

定义 4(决策粗糙集)[3] 设决策信息系统 $DIS=(U,AT=C\cup D,VT,f)$，其中 C 为条件属性集，D 为决策属性集，AT 为全体属性集。$\forall X\subseteq U$，则定义关于 X 的决策粗糙集模型的下近似和上近似分别为：

$$\underline{R}_{\alpha,\beta}(X)=\{x|P(X|[x])\geqslant\alpha\}$$

$$\overline{R}_{\alpha,\beta}(X)=\{x|P(X|[x])>\beta\}$$

根据决策粗糙集模型的下近似和上近似，其相应的正域、边界域和负域可表示为：

$$POS_{\alpha,\beta}(X)=\underline{R}_{\alpha,\beta}(X)$$

$$BND_{\alpha,\beta}(X)=\overline{R}_{\alpha,\beta}(X)-\underline{R}_{\alpha,\beta}(X)$$

$$NEG_{\alpha,\beta}(X)=U-\overline{R}_{\alpha,\beta}(X)$$

2.4 集对优势关系

定义 5(集对优势度) 设 $IOIS=(U,AT,VT,f)$是一个不完备序信息系统，对于 $\forall A\subseteq AT$，$X\subseteq U$，x 和 y 在属性集 A 下的集对优势度为：

$$S_A(x,y)=S_1+S_2p+S_3q$$

其中，$S_1=|M(x,y)|/n$ 是 x 和 y 在属性集 A 下的强优势度，$S_2=|N(x,y)|/n$ 是 x 和 y 在属性集 A 下的弱势度，$S_3=|K(x,y)|/n$ 是 x 和 y 在属性集 A 下的劣势度，$n=|A|$。

$$M(x,y)=\{a\in A|(f_a(x)\leqslant f_a(y))\vee(f_a(x)=*\wedge f_a(y)=\max v_a)\vee(f_a(y)=*\wedge f_a(x)=\min v_a)\}$$

$$N(x,y)=\{a\in A|(f_a(x)=*\wedge f_a(y)=*)\vee(f_a(x)=*\wedge f_a(y)\neq*\wedge f_a(y)\neq\max v_a\wedge f_a(y)\neq\min v_a)\vee(f_a(y)=*\wedge f_a(x)\neq*\wedge f_a(x)\neq\min v_a)\}$$

$$K(x,y)=\{a\in A|(f_a(x)>f_a(y))\vee(f_a(x)=*\wedge f_a(y)=\min v_a)\}$$

根据上述公式，易得 $0\leqslant S_1,S_2,S_3\leqslant1$，$S_1+S_2+S_3=1$。特别地，针对文献[26]中弱势度与劣势度有重复计算的可能性，本文对弱势度的计算做了改进，避免了重复计算的可能性。为了计算弱势度中的对象可能含有的优势度，提出了联合优势率的概念。

定义 6(联合优势率) 设 $IOIS=(U,AT,VT,f)$是一个不完备序信息系统，对于 $\forall A\subseteq AT$，$X\subseteq U$，x 和 y 的属性值联合优势率 $FP(x,y)$定义为：

$$FP(x,y)=\begin{cases}1, & x=y\\ \dfrac{|P_A^{\leqslant}(x)|+|P_A^{\geqslant}(y)|}{2|A|}, & x\neq y\end{cases}$$

则有 $P_A^{\leqslant}(x)=\{a\in A|f_a(x)\neq*\wedge(f_a(x)<avg(v_a))\}$，$P_A^{\geqslant}(y)=\{a\in A|f_a(y)\neq*\wedge(f_a(y)\geqslant avg(v_a))\}$，易知 $0\leqslant FP(x,y)\leqslant1$。对象的属性值联合优势率是用平均值而不是未知值 * 来进行优劣比较的，主观性不会过强。

定义 7(集对优势关系) 设 $IOIS=(U,AT,VT,f)$是一个不完备序信息系统，$\forall A\subseteq AT$，$X\subseteq U$，集对优势关系定义为：

$$R_A^{\lambda\leqslant}=\{(x,y)|S_A(x,y)=S_1+S_2p+S_3q\wedge(S_1+FP(x,y))\geqslant\lambda\wedge S_3=0\}\cup I$$

其中，$0.5\leqslant\lambda\leqslant1$，$I=\{(x,x)|x\in U\}$。阈值 λ 的大小与获得的知识粒度的粗细有关，λ 越大，所得到的知识粒度越细，其分类能力也就越强，可以根据具体需要来设置。容易看出：$R_A^{\lambda\leqslant}$ 满足自反性，不一定满足传递性和对称性。由集对优势关系 $R_A^{\lambda\leqslant}$ 可得到集对优势类$[x]_A^{\lambda\leqslant}=\{y\in U|(x,y)\in R_A^{\lambda\leqslant}\}$。

3 集对优势关系下的 5 种多粒度决策粗糙集模型

针对不完备序信息系统，本文提出了集对优势关系下的 5 种多粒度决策粗糙集模型。其中，前两种模型分别讨论了集对优势关系下的乐观和悲观多粒度决策粗糙集模型；第三种模型讨论了集对优势关系下的均值多粒度决策粗糙集模型；第四种模型讨论了集对优势关系下的乐观-悲观多粒度决策粗糙集模型；第五种模型讨论了集对优势关系下的悲观-乐观多粒度决策粗糙集模型。

3.1 集对优势关系下的乐观多粒度决策粗糙集模型

定义 8 设不完备序信息系统 $IOIS=(U,AT,VT,f)$，$X\subseteq U$，A_i 是 AT 中的任一属性子集，其中 $i=1,2,\cdots,m$ $(m\leqslant2^{|AT|})$，$\lambda\in[0.5,1]$，定义 X 在集对优势关系下的乐观多粒度决策粗糙集模型的下近似和上近似为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}{}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)=\{x\in U|\bigvee_{i=1}^{m}P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}{}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)=\{x\in U|\bigvee_{i=1}^{m}P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})>\hat{\beta}\}$$

其中，$[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}$ 是对象 x 在粒度集 A_i 下的集对优势类，$P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})=\dfrac{|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}\cap X|}{|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}|}$是优势类$[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}$关于 X 的条件概率，$\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 为一对阈值。根据定义 8 中的集对优势关系下的乐观多粒度决策粗糙集模型的下近似和上近似，可以得到相应的正域、边界域和负域分别为：

$$POS_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)=\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)$$

$$NEG_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)=U-\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)$$

$$BND_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)-\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)$$

性质 1 设不完备序信息系统 $IOIS=(U,AT,VT,f)$，则关于 X 的集对优势关系下的乐观多粒度决策粗糙集模型满足下列性质。

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)$

(2) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(\emptyset)=\underline{R}_{\alpha,\beta}(\emptyset)=\emptyset$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(\emptyset)=\overline{R}_{\alpha,\beta}(\emptyset)=\emptyset$

(3) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(U)=\underline{R}_{\alpha,\beta}(U)=U$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(U)=\overline{R}_{\alpha,\beta}(U)=U$

(4) 对 $\forall X_1\subseteq X_2\subseteq U$：

$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X_1)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X_2)$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X_1)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X_2)$

证明：根据定义 8 易得。

3.2 集对优势关系下的悲观多粒度决策粗糙集模型

定义 9 设不完备序信息系统 $IOIS=(U,AT,VT,f)$，$X\subseteq U$，A_i 是 AT 中的任一属性子集，其中 $i=1,2,\cdots,m(m\leqslant 2^{|AT|})$，$\lambda\in[0.5,1]$，定义 X 在集对优势关系下的悲观多粒度决策粗糙集模型的下近似和上近似为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)=\{x\in U\mid \bigwedge_{i=1}^{m}P(X\mid[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)=\{x\in U\mid \bigwedge_{i=1}^{m}P(X\mid[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})>\hat{\beta}\}$$

类似地，根据定义 9 中的集对优势关系下的悲观多粒度决策粗糙集模型的下近似和上近似，可以得到相应的正域、负域和边界域分别为：

$$POS_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)=\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)$$

$$NEG_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)=U-\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)$$

$$BND_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)-\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)$$

性质 2 设不完备序信息系统 $IOIS=(U,AT,VT,f)$，则关于 X 的集对优势关系下的悲观多粒度决策粗糙集模型满足下列性质。

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)$

(2) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(\emptyset)=\underline{R}_{\alpha,\beta}(\emptyset)=\emptyset$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(\emptyset)=\overline{R}_{\alpha,\beta}(\emptyset)=\emptyset$

(3) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(U)=\underline{R}_{\alpha,\beta}(U)=U$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(U)=\overline{R}_{\alpha,\beta}(U)=U$

(4) 对 $\forall X_1\subseteq X_2\subseteq U$：

$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X_1)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X_2)$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X_1)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X_2)$

证明：根据定义 9 易得。

3.3 集对优势关系下的均值多粒度决策粗糙集模型

定义 8 给出了集对优势关系下的乐观多粒度决策粗糙集模型，其要求下近似中的对象只要在一个粒度下满足条件概率大于阈值 $\hat{\alpha}$ 即可；定义 9 给出的集对优势关系下的悲观多粒度决策粗糙集模型，要求下近似中的对象在所有粒度下都满足条件概率大于阈值 $\hat{\beta}$。这两种模型的条件过于宽松或过于严格，具有一定的局限性。本节提出了集对优势关系下的均值多粒度决策粗糙集模型。

定义 10 设不完备序信息系统 $IOIS=(U,AT,VT,f)$，$X\subseteq U$，A_i 是 AT 中的任一属性子集，其中 $i=1,2,\cdots,m(m\leqslant 2^{|AT|})$，$\lambda\in[0.5,1]$，定义 X 在集对优势关系下的均值多粒度决策粗糙集模型的下近似和上近似为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X)=\{x\in U\mid \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}P(X\mid[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X)=\{x\in U\mid \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}P(X\mid[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})>\hat{\beta}\}$$

根据定义 10 中的集对优势关系下的均值多粒度决策粗糙集模型的下近似和上近似，可以得到相应的正域、负域和边界域分别为：

$$POS_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X)=\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X)$$

$$NEG_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X)=U-\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X)$$

$$BND_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X)-\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X)$$

性质 3 设不完备序信息系统 $IOIS=(U,AT,VT,f)$，则关于 X 的集对优势关系下的均值多粒度决策粗糙集模型满足下列性质。

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X)$

(2) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(\emptyset)=\underline{R}_{\alpha,\beta}(\emptyset)=\emptyset$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(\emptyset)=\overline{R}_{\alpha,\beta}(\emptyset)=\emptyset$

(3) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(U)=\underline{R}_{\alpha,\beta}(U)=U$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(U)=\overline{R}_{\alpha,\beta}(U)=U$

(4) 对 $\forall X_1\subseteq X_2\subseteq U$：

$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X_1)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X_2)$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X_1)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X_2)$

(5) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)$

(6) $\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(M)}(X)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)$

3.4 集对优势关系下的两种新型多粒度决策粗糙集模型

将乐观多粒度决策粗糙集的上下近似算子和悲观多粒度决策粗糙集的上下近似算子相互融合，可以得到两种新型模型，即集对优势关系下的乐观-悲观多粒度决策粗糙集模型和集对优势关系下的悲观-乐观多粒度决策粗糙集模型。

定义 11 设不完备序信息系统 $IOIS=(U,AT,VT,f)$，$X\subseteq U$，A_i 是 AT 中的任一属性子集，其中 $i=1,2,\cdots,m(m\leqslant 2^{|AT|})$，$\lambda\in[0.5,1]$，定义 X 在集对优势关系下的乐观-悲观多粒度决策粗糙集模型的下近似和上近似为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)=\{x\in U\mid\bigvee_{i=1}^{m}P(X\mid[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)=\{x\in U\mid\bigwedge_{i=1}^{m}P(X\mid[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})>\hat{\beta}\}$$

相较于传统的粗糙集模型，其下近似的约束条件更为宽松而上近似的约束条件更为严格。通常情况下，$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)$ 和 $\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)$ 不成立。因此，其边界域分为上边界域和下边界域。根据定义 11 中的下近似和上近似，可以得到相应的正域、负域、上边界域和下边界域分别为：

$$POS_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)=\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)\cap\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)$$

$$NEG_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)=\sim(\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)\cup\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X))$$

$$UBND_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)-\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)$$

$$LBND_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)=\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)-\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)$$

定义 12 设不完备序信息系统 $IOIS=(U,AT,VT,f)$，$X\subseteq U$，A_i 是 AT 中的任一属性子集，其中 $i=1,2,\cdots,m(m\leqslant 2^{|AT|})$，$\lambda\in[0.5,1]$，定义 X 在集对优势关系下的悲观-乐观多粒度决策粗糙集模型的下近似和上近似为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)=\{x\in U\mid\bigwedge_{i=1}^{m}P(X\mid[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)=\{x\in U\mid\bigvee_{i=1}^{m}P(X\mid[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})>\hat{\beta}\}$$

通过上述公式可以看出，相较于传统的粗糙集模型，其下近似的约束条件更为严格而上近的似约束条件更为宽松，更加符合传统粗糙集下近似包含于上近似的性质，即 $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)$ 成立。根据定义 12 中的下近似和上近似，可以得到相应的正域、负域和边界域分别为：

$$POS_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)=\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)$$

$$NEG_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)=U-\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)$$

$$BND_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)-\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)$$

性质 4 设不完备序信息系统 $IOIS=(U,AT,VT,f)$，则关于 X 的集对优势关系下的乐观-悲观多粒度决策粗糙集模型和悲观-乐观多粒度决策粗糙集模型满足下列性质。

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)\not\subset\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)\not\subset\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X)$

$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)$

(2) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(\varnothing)=\underline{R}_{\alpha,\beta}(\varnothing)=\varnothing$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(\varnothing)=\overline{R}_{\alpha,\beta}(\varnothing)=\varnothing$

$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(\varnothing)=\underline{R}_{\alpha,\beta}(\varnothing)=\varnothing$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(\varnothing)=\overline{R}_{\alpha,\beta}(\varnothing)=\varnothing$

(3) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(U)=\underline{R}_{\alpha,\beta}(U)=U$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(U)=\overline{R}_{\alpha,\beta}(U)=U$

$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(U)=\underline{R}_{\alpha,\beta}(U)=U$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(U)=\overline{R}_{\alpha,\beta}(U)=U$

(4) 对 $\forall X_1\subseteq X_2\subseteq U$：

$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X_1)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X_2)$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X_1)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(OI)}(X_2)$

$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X_1)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X_2)$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X_1)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X_2)$

(5) $\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)=\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(I)}(X)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(IO)}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}^{\lambda\leqslant(O)}(X)$

证明：根据定义 8、定义 12 以及性质 1，易得性质 4。

4 集对优势关系下多粒度决策粗糙集的可变三支决策模型

经典三支决策中的损失函数是一个精确的数值，针对不完备信息系统，本文以区间值的形式表示损失函数，从而计算相应的阈值。不完备信息系统下的损失函数矩阵如表 2 所列。

表 2 不完备信息系统下的损失函数矩阵

Table 2 Loss function matrix in incomplete information system

Decision Actions	Decision Functions	
	X	$\sim X$
$a_{\rm P}$	$\widehat{\lambda_{\rm PP}}=[\lambda_{\rm PP}^{-},\lambda_{\rm PP}^{+}]$	$\widehat{\lambda_{\rm PN}}=[\lambda_{\rm PN}^{-},\lambda_{\rm PN}^{+}]$
$a_{\rm B}$	$\widehat{\lambda_{\rm BP}}=[\lambda_{\rm BP}^{-},\lambda_{\rm BP}^{+}]$	$\widehat{\lambda_{\rm BN}}=[\lambda_{\rm BN}^{-},\lambda_{\rm BN}^{+}]$
$a_{\rm N}$	$\widehat{\lambda_{\rm NP}}=[\lambda_{\rm NP}^{-},\lambda_{\rm NP}^{+}]$	$\widehat{\lambda_{\rm NN}}=[\lambda_{\rm NN}^{-},\lambda_{\rm NN}^{+}]$

其中，$\lambda_{\cdot\cdot}^{-}$（$\cdot\cdot=P,B,N$）和 $\lambda_{\cdot\cdot}^{+}$ 分别代表损失函数 $\widehat{\lambda_{\cdot\cdot}}$ 的上界和下界，满足如下关系：$\lambda_{\rm PP}^{-}\leqslant\lambda_{\rm BP}^{-}\leqslant\lambda_{\rm NP}^{-}$，$\lambda_{\rm PP}^{+}\leqslant\lambda_{\rm BP}^{+}\leqslant\lambda_{\rm NP}^{+}$；

$\lambda_{PN}^{-}\leqslant\lambda_{BN}^{-}\leqslant\lambda_{NN}^{-}$，$\lambda_{PN}^{+}\leqslant\lambda_{BN}^{+}\leqslant\lambda_{NN}^{+}$。

在不完备序信息系统下，根据表 2 中的损失函数矩阵，可以得到 3 种决策的期望损失为：

$$\begin{aligned}&\hat{R}(a_P|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\\&=\widehat{\lambda_{PP}}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\widehat{\lambda_{PN}}\cdot(1-P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))\\&=[\lambda_{PP}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}),\lambda_{PP}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})]+[\lambda_{PN}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}),\lambda_{PN}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})]\\&=[\lambda_{PP}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\lambda_{PN}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\lambda_{PP}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\lambda_{PN}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\hat{R}(a_B|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\\&=\widehat{\lambda_{BP}}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\widehat{\lambda_{BN}}\cdot(1-P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))\\&=[\lambda_{BP}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}),\lambda_{BP}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})]+[\lambda_{BN}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}),\lambda_{BN}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})]\\&=[\lambda_{BP}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\lambda_{BN}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\lambda_{BP}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\lambda_{BN}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\hat{R}(a_N|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\\&=\widehat{\lambda_{NP}}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\widehat{\lambda_{NN}}\cdot(1\text{-}P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))\\&=[\lambda_{NP}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}),\lambda_{NP}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})]+[\lambda_{NN}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}),\lambda_{NN}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})]\\&=[\lambda_{NP}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\lambda_{NN}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\lambda_{NP}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\lambda_{NN}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})]\end{aligned}$$

在不完备序信息系统中，由于损失函数是一个区间值，因此得到的 3 种决策下的期望损失也是区间值。然而，在实际应用中需要得到具体的期望损失值。本文引用参数 ω 来使区间值转换为实值，具体的转换公式为定义 13 中的公式。

定义 13 设不完备序信息系统 $IOIS=(U,AT,VT,f)$，其损失函数$\widehat{\lambda_{..}}=[\lambda_{..}^{-},\lambda_{..}^{+}]$，$\omega\in[0,1]$，则：

$$f_\omega(\widehat{\lambda_{..}})=(1-\omega)\lambda_{..}^{-}+\omega\lambda_{..}^{+}$$

其中，$f_\omega(\widehat{\lambda_{..}})$是得到的结果，为一个实值。对于每一个损失函数值，有如下的关系：

$$f_\omega(\widehat{\lambda_{PP}})\leqslant f_\omega(\widehat{\lambda_{BP}})\leqslant f_\omega(\widehat{\lambda_{NP}})$$

$$f_\omega(\widehat{\lambda_{NN}})\leqslant f_\omega(\widehat{\lambda_{BN}})\leqslant f_\omega(\widehat{\lambda_{PN}})$$

可以看出，ω 反映的是决策者的风险态度，当 $\omega=1$ 时，$f_\omega(\widehat{\lambda_{..}})=\lambda_{..}^{+}$ 表明决策者追求高风险和高回报；当 $\omega=0$ 时，$f_\omega(\widehat{\lambda_{..}})=\lambda_{..}^{-}$ 表明决策者追求低风险和低回报。因此，决策者可以根据实际需要来选取 ω 值。

根据定义 13，可以进一步得到不完备序信息系统下的期望损失为：

$$\begin{aligned}&f_\omega(\hat{R}(a_P|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))\\&=(1-\omega)(\lambda_{PP}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\lambda_{PN}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))+\omega(\lambda_{PP}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\lambda_{PN}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))\\&=P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})((1-\omega)\lambda_{PP}^{-}+\omega\lambda_{PP}^{+})+(1-P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))((1-\omega)\lambda_{PN}^{-}+\omega\lambda_{PN}^{+})\\&=P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})f_\omega(\widehat{\lambda_{PP}})+(1-P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))f_\omega(\widehat{\lambda_{PN}})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&f_\omega(\hat{R}(a_B|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))\\&=(1-\omega)(\lambda_{BP}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\lambda_{BN}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))+\omega(\lambda_{BP}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\lambda_{BN}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))\\&=P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})((1-\omega)\lambda_{BP}^{-}+\omega\lambda_{BP}^{+})+(1-P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))((1-\omega)\lambda_{BN}^{-}+\omega\lambda_{BN}^{+})\\&=P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})f_\omega(\widehat{\lambda_{BP}})+(1-P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))f_\omega(\widehat{\lambda_{BN}})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&f_\omega(\hat{R}(a_N|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))\\&=(1-\omega)(\lambda_{NP}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\lambda_{NN}^{-}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))+\omega(\lambda_{NP}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})+\lambda_{NN}^{+}\cdot P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))\\&=P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})((1-\omega)\lambda_{NP}^{-}+\omega\lambda_{NP}^{+})+(1-P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))((1-\omega)\lambda_{NN}^{-}+\omega\lambda_{NN}^{+})\\&=P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})f_\omega(\widehat{\lambda_{NP}})+(1-P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant}))f_\omega(\widehat{\lambda_{NN}})\end{aligned}$$

在不完备序信息系统 $IOIS=(U,AT,VT,f)$中，设 $B\subseteq AT$，根据 Bayes 风险决策理论，可以进一步得到如下形式的决策规则。

接受决策规则($\hat{\mathrm{P}}$)：如果 $P(X|[x]_{B}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}$，那么 $x\in\widehat{POS}(X)$；

延迟决策规则($\hat{\mathrm{B}}$)：如果 $\hat{\beta}<P(X|[x]_{B}^{\lambda\leqslant})<\hat{\alpha}$，那么 $x\in\widehat{BND}(X)$；

拒绝决策规则($\hat{\mathrm{N}}$)：如果 $P(X|[x]_{B}^{\lambda\leqslant})\leqslant\hat{\beta}$，那么 $x\in\widehat{NEG}(X)$。

其中，$\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 可通过下列 2 个公式计算：

$$\hat{\alpha}=\frac{f_\omega(\widehat{\lambda_{PN}})-f_\omega(\widehat{\lambda_{BN}})}{(f_\omega(\widehat{\lambda_{PN}})-f_\omega(\widehat{\lambda_{BN}}))+(f_\omega(\widehat{\lambda_{BP}})-f_\omega(\widehat{\lambda_{PP}}))}$$

$$\hat{\beta}=\frac{f_\omega(\widehat{\lambda_{BN}})-f_\omega(\widehat{\lambda_{NN}})}{(f_\omega(\widehat{\lambda_{BN}})-f_\omega(\widehat{\lambda_{NN}}))+(f_\omega(\widehat{\lambda_{NP}})-f_\omega(\widehat{\lambda_{BP}}))}$$

针对不完备序信息系统，3.1 节—3.4 节给出了 5 个集对优势关系下的多粒度决策粗糙集模型，可以推导出各个模型下的三支决策规则。

4.1 5 种集对优势关系下多粒度决策粗糙集的可变三支决策规则

由于阈值 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 是根据损失函数 $f_\omega(\widehat{\lambda_{..}})$来计算的，而损失函数 $f_\omega(\widehat{\lambda_{..}})$与 $\omega\in[0,1]$的取值有关，因此可根据实际需要选取不同的 ω 值，从而推导出对应 ω 值下的三支决策规则，称其为可变三支决策规则。定义 8－定义 12 给出了 5 种集对优势关系下的多粒度决策粗糙集模型，并得到了相应的正域、负域和边界域。根据这些粗糙域，下面分别给出相应的可变三支决策规则。

(1)集对优势关系下乐观多粒度决策粗糙集的可变三支决策规则

接受决策规则($\hat{\mathrm{P}}^{\mathrm{O}}$)：如果满足 $\bigvee_{i=1}^{m}P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}$，那么 $x\in\widehat{POS}^{O}(X)$；

拒绝决策规则($\hat{\mathrm{N}}^{\mathrm{O}}$)：如果满足 $\bigwedge_{i=1}^{m}P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\leqslant\hat{\beta}$，那么 $x\in\widehat{NEG}^{O}(X)$；

延迟决策规则($\hat{\mathrm{B}}^{\mathrm{O}}$)：如果满足 $\bigvee_{i=1}^{m}P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})>\hat{\beta}$ 且不满

足$\bigvee_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}$,那么$x\in\widehat{BND}^{O}(X)$。

(2)集对优势关系下悲观多粒度决策粗糙集的可变三支决策规则

接受决策规则($\hat{\mathrm{P}}^{I}$):如果满足$\bigwedge_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}$,那么$x\in\widehat{POS}^{I}(X)$;

拒绝决策规则($\hat{\mathrm{N}}^{I}$):如果满足$\bigvee_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\leqslant\hat{\beta}$,那么$x\in\widehat{NEG}^{I}(X)$;

延迟决策规则($\hat{\mathrm{B}}^{I}$):如果满足$\bigwedge_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})>\hat{\beta}$且不满足$\bigwedge_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}$,那么$x\in\widehat{BND}^{I}(X)$。

(3)集对优势关系下均值多粒度决策粗糙集的可变三支决策规则

接受决策规则($\hat{\mathrm{P}}^{M}$):如果满足$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}$,那么$x\in\widehat{POS}^{M}(X)$;

拒绝决策规则($\hat{\mathrm{N}}^{M}$):如果满足$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\leqslant\hat{\beta}$,那么$x\in\widehat{NEG}^{M}(X)$;

延迟决策规则($\hat{\mathrm{B}}^{M}$):如果满足$\hat{\beta}<\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\leqslant\hat{\alpha}$,那么$x\in\widehat{BND}^{M}(X)$。

(4)集对优势关系下乐观-悲观多粒度决策粗糙集的可变三支决策规则

接受决策规则($\hat{\mathrm{P}}^{OI}$):如果满足$\bigvee_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}$且满足$\bigwedge_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})>\hat{\beta}$,那么$x\in\widehat{POS}^{OI}(X)$。

拒绝决策规则($\hat{\mathrm{N}}^{OI}$):如果满足$\bigvee_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\leqslant\hat{\beta}$,那么$x\in\widehat{NEG}^{OI}(X)$。

上延迟决策规则($\widehat{\mathrm{UB}}^{OI}$):如果满足$\bigwedge_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})>\hat{\beta}$且不满足$\bigvee_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}$,那么$x\in\widehat{UBND}^{OI}(X)$。

下延迟决策规则($\widehat{\mathrm{LB}}^{OI}$):如果满足$\bigvee_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}$且不满足$\bigwedge_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})>\hat{\beta}$,那么$x\in\widehat{LBND}^{OI}(X)$。

(5)集对优势关系下悲观-乐观多粒度决策粗糙集的可变三支决策规则

接受决策规则($\hat{\mathrm{P}}^{IO}$):如果$\bigwedge_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}$,那么$x\in\widehat{POS}^{IO}(X)$;

拒绝决策规则($\hat{\mathrm{N}}^{IO}$):如果$\bigwedge_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\leqslant\hat{\beta}$,那么$x\in\widehat{NEG}^{IO}(X)$;

延迟决策规则($\hat{\mathrm{B}}^{IO}$):如果满足$\bigvee_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})>\hat{\beta}$且不满足$\bigwedge_{i=1}^{m} P(X|[x]_{A_i}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}$,

那么$x\in\widehat{BND}^{IO}(X)$。

4.2 基于集对优势关系的乐观多粒度决策粗糙集的可变三支决策算法

根据集对优势关系下乐观多粒度决策粗糙集的可变三支决策规则,本节构建了相应的可变三支决策算法,其具体步骤如算法1所示。

算法1 集对优势关系下乐观多粒度决策粗糙集的可变三支决策算法

输入:不完备序信息系统IOIS=(U,AT,VT,f),X⊆U,ω∈[0,1],不完备信息系统下的损失函数矩阵

输出:$\widehat{\mathrm{POS}}^{\mathrm{O}}(\mathrm{X})$,$\widehat{\mathrm{NEG}}^{\mathrm{O}}(\mathrm{X})$,$\widehat{\mathrm{BND}}^{\mathrm{O}}(\mathrm{X})$

1. 初始化:$\widehat{\mathrm{POS}}^{\mathrm{O}}(\mathrm{X})\leftarrow\varnothing$,$\widehat{\mathrm{NEG}}^{\mathrm{O}}(\mathrm{X})\leftarrow\varnothing$,$\widehat{\mathrm{BND}}^{\mathrm{O}}(\mathrm{X})\leftarrow\varnothing$;
2. 根据定义7,计算x在$\mathrm{A_i}$下的$[\mathrm{x}]_{\mathrm{A_i}}^{\lambda\leqslant}$;
3. 计算条件概率$\mathrm{P}(\mathrm{X}|[\mathrm{x}]_{\mathrm{A_i}}^{\lambda\leqslant})$;
4. 对给出的损失函数矩阵,根据定义13,选取合适的ω值,计算损失函数值$\mathrm{f}_{\omega}(\widehat{\lambda_{\cdot\cdot}})$,从而得到相应的阈值$\hat{\alpha}$,$\hat{\beta}$;
5. 如果满足$\bigvee_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}}\mathrm{P}(\mathrm{X}|[\mathrm{x}]_{\mathrm{A_i}}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}$,那么$\mathrm{x}\in\widehat{\mathrm{POS}}^{\mathrm{O}}(\mathrm{X})$,转步骤8;
6. 如果满足$\bigwedge_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}}\mathrm{P}(\mathrm{X}|[\mathrm{x}]_{\mathrm{A_i}}^{\lambda\leqslant})\leqslant\hat{\beta}$,那么$\mathrm{x}\in\widehat{\mathrm{NEG}}^{\mathrm{O}}(\mathrm{X})$,转步骤8;
7. 如果满足$\bigvee_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}}\mathrm{P}(\mathrm{X}|[\mathrm{x}]_{\mathrm{A_i}}^{\lambda\leqslant})>\hat{\beta}$且不满足$\bigvee_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}}\mathrm{P}(\mathrm{X}|[\mathrm{x}]_{\mathrm{A_i}}^{\lambda\leqslant})\geqslant\hat{\alpha}$,那么$\mathrm{x}\in\widehat{\mathrm{BND}}^{\mathrm{O}}(\mathrm{X})$;
8. 输出正域$\widehat{\mathrm{POS}}^{\mathrm{O}}(\mathrm{X})$,负域$\widehat{\mathrm{NEG}}^{\mathrm{O}}(\mathrm{X})$和边界域$\widehat{\mathrm{BND}}^{\mathrm{O}}(\mathrm{X})$。

算法1中,步骤1对正域、负域和边界域进行初始化,时间复杂度为常数;步骤2、步骤3对条件概率进行计算,时间复杂度为$O(|X|^2\cdot|AT|)$;步骤4根据定义13精确化区间值损失函数,并计算阈值,时间复杂度为常数;步骤5—步骤7通过条件概率值和阈值的比较,求得正域、负域和边界域,时间复杂度为$O(|X|\cdot|AT|)$;步骤8输出正域、负域和边界域,时间复杂度为常数。因此,算法1的时间复杂度为$O(|X|^2\cdot|AT|)$。算法1是由乐观多粒度决策粗糙集的可变三支决策模型来构建的。类似地,其余4种模型也可推导出相应的算法,不再赘述。

5 实例分析

前面推导出了5种集对优势关系下多粒度决策粗糙集的可变三支决策规则,并给出了算法来计算正域、负域和边界域。本节通过对某公司员工评估的案例进行分析,来论证所提出模型的有效性。

表3为某公司对20名员工的评估信息表$IODIS=(U,AT\cup d,VT,f)$。针对每个员工的职业能力、职业意识和职业品德3个方面来进行评估,即$AT=\{A_1,A_2,A_3\}$。职业能力包含了解决问题的能力、逻辑思维能力和沟通协调能力;职业意识包括成本意识、创新意识和风险意识;职业品德包含了工作素质、工作态度等。其中,$A_1=\{a_1,a_2\}$,$A_2=\{a_3,a_4\}$,$A_3=\{a_5,a_6\}$分别表示两位管理者对每位员工职业能力、职业意识和职业品德的评估;$VT=\{3,2,1,*\}$表示管理者对员工的评分等级,由于职责不同,有的管理者对个别员工不熟悉,很难给出具体的评分,因此有些评分是空缺的,用*表示。$d=\{0,1\}$是决策属性,决策值为1的员工最有可能得到优秀员工的称号。由表3可以得到$U/d=\{D_1,D_2\}$,其中$D_1=\{x_1,x_2,x_4,x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{15},x_{19}\}$代表决策值为1的员工集合,$D_2=\{x_3,x_5,x_6,x_9,x_{10},x_{11},x_{14},x_{15},x_{18},x_{20}\}$代表决策值为0的员工集合。设$D_1$为目标对象集,即$X=D_1$。该公司的管理部门给出的员工评价损失函数如表4所列,由于存在

缺失值,因此表中的损失函数是区间值的形式。

表 3 员工评估信息的统计数据

Table 3 Statistical data of employees evaluation information

U	A_1		A_2		A_3		d
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
x_1	2	1	*	1	1	1	0
x_2	2	2	3	*	2	3	1
x_3	2	*	1	2	1	2	0
x_4	2	1	2	*	1	1	0
x_5	2	1	1	2	*	1	0
x_6	2	2	2	2	2	*	1
x_7	1	2	2	*	1	2	1
x_8	2	1	1	*	2	1	0
x_9	1	3	1	2	2	3	1
x_{10}	1	1	2	1	2	2	1
x_{11}	3	*	1	1	2	3	1
x_{12}	1	2	1	2	1	1	0
x_{13}	1	1	2	*	1	2	0
x_{14}	*	1	1	2	1	2	0
x_{15}	3	2	2	2	2	1	1
x_{16}	2	1	1	2	2	1	0
x_{17}	2	1	1	1	2	1	0
x_{18}	1	2	1	2	1	2	0
x_{19}	*	2	2	1	2	3	1
x_{20}	2	1	*	2	1	1	0

表 4 员工评估的损失函数

Table 4 Loss function of employees evaluation

Decision Actions	Decision Functions	
	X	$\sim X$
a_P	$\widehat{\lambda_{PP}}=[0,0.29]$	$\widehat{\lambda_{PN}}=[0.98,1.35]$
a_B	$\widehat{\lambda_{BP}}=[0.20,0.31]$	$\widehat{\lambda_{BN}}=[0.28,0.34]$
a_N	$\widehat{\lambda_{NP}}=[0.61,0.69]$	$\widehat{\lambda_{NN}}=[0,0.12]$

根据定义 7,由算法 1 的步骤 2 计算在每个粒度集下 20 名员工的优势类集合。在不失一般性的前提下,本文设 $\lambda=1$。

根据步骤 3,计算员工在每个粒度集下的条件概率 $P(X|[x_j]_{A_i}^{\lambda\leqslant})$,其中 $i=1,2,3,j=1,2,3,\cdots,20$。具体结果如表 5 所列。

表 5 员工在每个粒度集下的条件概率值

Table 5 Conditional probability value of employees under each granularity set

U	$P(X\|[x_j]_{A_1}^{\lambda\leqslant})$	$P(X\|[x_j]_{A_2}^{\lambda\leqslant})$	$P(X\|[x_j]_{A_3}^{\lambda\leqslant})$
x_1	0.38	0.60	0.40
x_2	1.00	1.00	1.00
x_3	0.80	0.36	0.64
x_4	0.38	0.67	0.40
x_5	0.38	0.36	0.64
x_6	1.00	1.00	1.00
x_7	0.70	0.67	0.64
x_8	0.38	0.33	0.70
x_9	0.67	0.36	1.00
x_{10}	0.40	0.67	1.00
x_{11}	1.00	0.40	1.00
x_{12}	0.70	0.36	0.40
x_{13}	0.40	0.67	0.64
x_{14}	0.36	0.36	0.64
x_{15}	1.00	1.00	0.70
x_{16}	0.38	0.36	0.70
x_{17}	0.38	0.40	0.70
x_{18}	0.70	0.36	0.64
x_{19}	1.00	0.67	1.00
x_{20}	0.38	0.67	0.40

通过步骤 4,根据定义 13 中的 $f_\omega(\widehat{\lambda_{..}})$函数,本实例将其中的 ω 值在[0,1]区间上以 0.2 为单位依次取值,计算出相应的损失函数。根据步骤 5—步骤 7,可以得到集对优势关系下的乐观多粒度决策粗糙集的粗糙域。类似地,根据各个模型对应的决策规则,可以得到相应的粗糙域。具体结果如表 6—表 10 所列。

表 6 集对优势关系下的乐观多粒度决策粗糙集的粗糙域

Table 6 Rough regions of optimistic multi-granulation decision rough set under set-pair dominance relation

ω	$\widehat{POS^O}(X)$	$\widehat{NEG^O}(X)$	$\widehat{BND^O}(X)$
0.0	$\{x_2,x_3,x_6,x_9,x_{10},x_{11},x_{15},x_{19}\}$	∅	$\{x_1,x_4,x_5,x_7,x_8,x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$
0.2	$\{x_2,x_3,x_6,x_9,x_{10},x_{11},x_{15},x_{19}\}$	∅	$\{x_1,x_4,x_5,x_7,x_8,x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$
0.4	$\{x_2,x_3,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19}\}$	∅	$\{x_1,x_4,x_5,x_{13},x_{14},x_{20}\}$
0.6	$\{x_2,x_3,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19}\}$	∅	$\{x_1,x_4,x_5,x_{13},x_{14},x_{20}\}$
0.8	$\{x_2,x_3,x_4,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19},x_{20}\}$	∅	$\{x_1,x_5,x_{14}\}$
1.0	$\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19},x_{20}\}$	∅	$\{x_1\}$

表 7 集对优势关系下的悲观多粒度决策粗糙集的粗糙域

Table 7 Rough regions of pessimistic multi-granulation decision rough set under set-pair dominance relation

ω	$\widehat{POS^I}(X)$	$\widehat{NEG^I}(X)$	$\widehat{BND^I}(X)$
0.0	$\{x_2,x_6\}$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$	$\{x_7,x_{15},x_{19}\}$
0.2	$\{x_2,x_6\}$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_8,x_9,x_{12},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$	$\{x_7,x_{10},x_{11},x_{13},x_{15},x_{19}\}$
0.4	$\{x_2,x_6,x_{15}\}$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_8,x_9,x_{12},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$	$\{x_7,x_{10},x_{11},x_{13},x_{19}\}$
0.6	$\{x_2,x_6,x_{15}\}$	$\{x_3,x_5,x_8,x_9,x_{12},x_{14},x_{16},x_{18}\}$	$\{x_1,x_4,x_7,x_{10},x_{11},x_{13},x_{17},x_{19},x_{20}\}$
0.8	$\{x_2,x_6,x_{15},x_{19}\}$	$\{x_3,x_5,x_8,x_9,x_{12},x_{14},x_{16},x_{18}\}$	$\{x_1,x_4,x_7,x_{10},x_{11},x_{13},x_{17},x_{20}\}$
1.0	$\{x_2,x_6,x_7,x_{15},x_{19}\}$	$\{x_3,x_5,x_8,x_9,x_{12},x_{14},x_{16},x_{18}\}$	$\{x_1,x_4,x_{10},x_{11},x_{13},x_{17},x_{20}\}$

表 8　集对优势关系下的均值多粒度决策粗糙集的粗糙域

Table 8　Rough regions of mean multi-granulation decision rough set under set-pair dominance relation

ω	$\widehat{POS}^M(X)$	$\widehat{NEG}^M(X)$	$\widehat{BND}^M(X)$
0.0	$\{x_2,x_6,x_{11},x_{15},x_{19}\}$	$\varnothing$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$
0.2	$\{x_2,x_6,x_{11},x_{15},x_{19}\}$	$\varnothing$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$
0.4	$\{x_2,x_6,x_{11},x_{15},x_{19}\}$	$\varnothing$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$
0.6	$\{x_2,x_6,x_9,x_{10},x_{11},x_{15},x_{19}\}$	$\varnothing$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8,x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$
0.8	$\{x_2,x_6,x_7,x_9,x_{10},x_{11},x_{15},x_{19}\}$	$\varnothing$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_8,x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$
1.0	$\{x_2,x_6,x_7,x_9,x_{10},x_{11},x_{15},x_{19}\}$	$\varnothing$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_8,x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$

表 9　集对优势关系下的乐观-悲观多粒度决策粗糙集的粗糙域

Table 9　Rough regions of optimistic pessimistic multi-granulation decision rough set under set-pair dominance relation

ω	$\widehat{POS}^{OI}(X)$	$\widehat{NEG}^{IO}(X)$	$\widehat{UBND}^{OI}(X)$	$\widehat{LBND}^{OI}(X)$
0.0	$\{x_2,x_6,x_{15},x_{19}\}$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_8,x_9,x_{10},x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$	$\{x_7\}$	$\{x_3,x_9,x_{10},x_{11}\}$
0.2	$\{x_2,x_6,x_{10},x_{11},x_{15},x_{19}\}$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_8,x_9,x_{12},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$	$\{x_7,x_{13}\}$	$\{x_3,x_9\}$
0.4	$\{x_2,x_6,x_7,x_{10},x_{11},x_{15},x_{19}\}$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_8,x_9,x_{12},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$	$\{x_{13}\}$	$\{x_3,x_8,x_9,x_{12},x_{16},x_{17},x_{18}\}$
0.6	$\{x_2,x_6,x_7,x_{10},x_{11},x_{15},x_{17},x_{19}\}$	$\{x_3,x_5,x_8,x_9,x_{12},x_{14},x_{16},x_{18},x_{20}\}$	$\{x_1,x_4,x_{13},x_{20}\}$	$\{x_3,x_8,x_9,x_{12},x_{16},x_{18}\}$
0.8	$\{x_2,x_4,x_6,x_7,x_{10},x_{11},x_{13},x_{15},x_{17},x_{19},x_{20}\}$	$\{x_3,x_5,x_8,x_9,x_{12},x_{14},x_{16},x_{18}\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3,x_8,x_9,x_{12},x_{16},x_{18}\}$
1.0	$\{x_2,x_4,x_6,x_7,x_{10},x_{11},x_{13},x_{15},x_{17},x_{19},x_{20}\}$	$\{x_3,x_5,x_8,x_9,x_{12},x_{14},x_{16},x_{18}\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3,x_5,x_8,x_9,x_{12},x_{14},x_{16},x_{18}\}$

表 10　集对优势关系下的悲观-乐观多粒度决策粗糙集的粗糙域

Table 10　Rough regions of pessimistic optimistic multi-granulation decision rough set under set-pair dominance relation

ω	$\widehat{POS}^{IO}(X)$	$\widehat{NEG}^{IO}(X)$	$\widehat{BND}^{IO}(X)$
0.0	$\{x_2,x_6\}$	$\varnothing$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19},x_{20}\}$
0.2	$\{x_2,x_6\}$	$\varnothing$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19},x_{20}\}$
0.4	$\{x_2,x_6,x_{15}\}$	$\varnothing$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19},x_{20}\}$
0.6	$\{x_2,x_6,x_{15}\}$	$\varnothing$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{19},x_{20}\}$
0.8	$\{x_2,x_6,x_{15},x_{19}\}$	$\varnothing$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$
1.0	$\{x_2,x_6,x_7,x_{15},x_{19}\}$	$\varnothing$	$\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{18},x_{20}\}$

表 6 列出了集对优势关系下的乐观多粒度决策粗糙集模型中的 3 个决策域。其中，$\widehat{POS}^O(X)$中的员工直接评为优秀员工，$\widehat{NEG}^O(X)$中的员工直接不考虑评为优秀员工，$\widehat{BND}^O(X)$中的员工则需要进一步考察评估。通过分析发现，随着 ω 值的增大，$\widehat{POS}^O(X)$中的员工数也在增加，$\widehat{BND}^O(X)$中的人数相应减少，而$\widehat{NEG}^O(X)$一直为空集 $\varnothing$。这主要是由于乐观模型中对下近似的定义较为宽松，对象只要在一个粒度集下满足相应的条件，就被划分到正域中；对象在所有粒度集下的条件概率小于或等于相应的阈值才被划分到负域中。

表 7 所列的悲观模型中，随着 ω 值的增大，$\widehat{POS}^I(X)$中的员工数相应增加，$\widehat{NEG}^I(X)$中的员工数减少。可以看出，悲观模型中$\widehat{POS}^I(X)$的员工数明显少于乐观模型中相应的人数，这是由于悲观模型中对下近似的定义较为宽松，适用于较为宽松的优秀员工评定。

表 8 列出均值模型下 3 个区域的结果，当 ω 值增大到 0.8 时，正域中的员工数不再改变。表 8 的结果介于表 6 和表 7 之间。表 9 是乐观-悲观模型下的决策结果，其$\widehat{POS}^{OI}(X)$中的员工数也随着 ω 值的增大而增加。不同于传统的粗糙集模型，其下近似不完全包含于上近似，因此分为上边界域和下边界域。此模型可运用于研究生招生中，对包含在下近似但不包含在上近似中的某些方面特别优秀的学生进行破格录取。表 10 为悲观-乐观模型，随着 ω 值的增大，$\widehat{POS}^{IO}(X)$中的员工数也随之增大，$\widehat{BND}^{IO}(X)$中的员工数相应减少，其$\widehat{NEG}^{IO}(X)$保持不变，为空集，表明没有特别差的员工。

表 6－表 10 分别列出了 5 个模型中员工在不同参数下的粗糙域。综合分析各个模型的结果可以发现，随着 ω 值的增大，正域的员工数也相应增加，员工 x_2 和员工 x_6 总是被划分到正域中，可直接评为优秀员工。其中，乐观、均值和悲观-乐观模型的负域最小，悲观模型的负域最大。在实际应用中，可根据实际需要来选取合适的模型以及适当的参数。

结束语　本文结合集对优势关系和多粒度决策粗糙集，在不完备序信息系统中从多粒度的视角提出了集对优势关系下的乐观、悲观、均值、乐观-悲观和悲观-乐观 5 种多粒度决策粗糙集模型，着重讨论了各个模型的相关性质及模型之间的关系。其次，结合三支决策理论，用区间值来表示损失函数，构建了 5 种相应的可变三支决策模型，从而推导出决策规则，使得这种决策诱导方法在不完备序信息系统中更为合理。最后，对公司员工评估的实例进行了分析，探究了各个模型下参数值变化对决策结果的影响，表明所提模型具有一定的有效性与实用性。由于直觉模糊集也是处理复杂和不精确问题的有效工具，未来将考虑在直觉模糊集的框架下进一步拓展本文的方法。

参 考 文 献

[1]　PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer

and Information Sciences,1982,11(5):341-356.
[2] YAO Y Y. Probabilistic rough set approximations[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2008,49(2):255-271.
[3] YAO Y Y,WONG S K M. A decision theoretic frame-work for approximating concepts[J]. International Journal of Man-machine Studies,1992,37(6):793-809.
[4] SLEZAK D,ZIARKO W. The investigation of the Bayesian rough set model[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2005,40(1/2):81-91.
[5] ZIARKO W. Variable precision rough set model[J]. Journal of Computer and System Sciences,1993,46(1):39-59.
[6] YAO Y Y,LIN T Y. Generalization of rough sets using modal logics[J]. Intelligent Automatic and Soft Computing,1996,2(2):103-120.
[7] ZHANG X,MEI C L,CHEN D G,et al. A fuzzy rough set based feature selection method using representative instances[J]. Knowledge-Based Systems,2018,151(1):216-229.
[8] ZHANG L,ZHAN J M,XU Z S. Covering-based generalized IF rough sets with applications to multi-attribute decision-making[J]. Information Sciences,2019,478:275-302.
[9] CHEN D G,ZHANG X X,WANG X Z,et al. Uncertainty learning of rough set-based prediction under a holistic framework[J]. Information Sciences,2018,463-464:129-151.
[10] HU M J,YAO Y Y. Structured approximations as a basis for three-way decisions in rough set theory[J]. Knowledge-Based Systems,2019,165:92-109.
[11] BU Z,WANG Y Y,LI H J,et al. Link prediction in temporal networks:integrating survival analysis and game theory[J]. Information Sciences,2019,498:41-61.
[12] ZHANG C,LI D Y,MU Y M,et al. An interval-valued hesitant fuzzy multigranulation rough set over two universes model for steam turbine fault diagnosis[J]. Applied Mathematical modelling,2017,42:693-704.
[13] YAO Y Y. The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models[J]. Information Sciences,2011,181(6):1080-1096.
[14] LIU D,LIANG D C,WANG C C. A novel three-way decision model based on incomplete information system[J]. Knowledge-Based Systems,2016,91:32-45.
[15] LIANG D C,XU Z S,LIU D. Three-way decisions with intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets based on point operators[J]. Information Sciences,2017,375:183-201.
[16] QIAN J,DANG C Y,YUE X D,et al. Attribute reduction for sequential three-way decisions under dynamic granulation[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2017,85:196-216.
[17] HU B Q,WONG H,YIU K F C. On two novel types of three-way decisions in three-way decision spaces[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2017,82:285-306.
[18] QIAN Y H,LIANG J Y,YAO Y Y,et al. MGRS:a multi-granulation rough set[J]. Information Sciences,2010,180(6):949-970.
[19] QIAN Y H,ZHANG H,SANG Y L,et al. Multigranulation decision-theoretic rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2014,55(1):225-237.
[20] ZHANG Q H,ZHANG Q,WANG G Y. The uncertainty of probabilistic rough sets in multi-granulation spaces[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2016,77:38-54.
[21] SANG Y L,QIAN Y H. Granular structure reduction approach to multigranulation decision-theoretic rough sets[J]. Computer Science,2017,44(5):199-205.
[22] XU Y. Multigranulation rough set model based on granulation of attributes and granulation of attribute values[J]. Information Sciences,2018,484:1-13.
[23] CHENG Y,LIU Y. Knowledge discovery model based on neighborhood multi-granularity rough sets[J]. Computer Science,2019,46(6):224-230.
[24] QIAN Y H,LIANG J Y,DANG C Y. Incomplete multigranulation rough set[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics-Part A Systems and Humans,2010,40(2):420-431.
[25] LUO G Z,XU X X. Analysis method of multi-granularity decision rough set based on possible degree tolerance relation[J]. Application Research of Computer,2019,36(12):3588-3592.
[26] HUANG L P. Incomplete ordered information system rough set model based on set-pair dominant degree[J]. Journal of Liaocheng University(Natural Science Edition),2017,30(1):97-101.
[27] XUE Z A,ZHANG M,LI Y X,et al. Double-quantitative generalized multi-granulation set-pair dominance rough sets in incomplete ordered information system[J]. Symmetry,2020,12(1):133.
[28] LUO C,LI T R,HUANG Y Y,et al. Updating three-way decisions in incomplete multi-scaleinformation systems [J]. Information Sciences,2019,476:274-289.
[29] CHEN Y X,ZHU P. Extending characteristic relations on an incomplete data set by the three-way decision theory[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2020,119:108-121.
[30] LUO J F,HU M J,QIN K Y. Three-way decision with incomplete information based on similarity and satisfiability[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2020,120:151-183.

XUE Zhan-ao, born in 1963, Ph.D, professor. His main research interests include basic theory of artificial intelligence, rough sets theory, fuzzy sets and three-way decision theory.