

# 三维可变形物体的特征点层次提取

潘 翔 章国栋 陈启华

(浙江工业大学计算机科学与技术学院 杭州 310023)

**摘 要** 针对不同姿态下的三维可变形物体特征点一致性问题,提出了一种基于样例学习的特征点层次提取方法。该方法首先提取出三维模型的外部特征点;其次,根据外部特征点在不同姿态下所具有的局部特征相似性,采用热核信号和支持向量机识别出外部特征点的语义标签;最后,根据语义标签和测地距离,层次地提取出三维模型的其它语义特征点。实验结果表明,该方法能很好地得到三维可变形物体的各种语义上的有效特征点。

**关键词** 三维模型特征点,层次提取,语义标签,支持向量机,热核信号

**中图分类号** TP391.14 **文献标识码** A

## Hierarchically Extracting Feature Points of 3D Deformable Shapes

PAN Xiang ZHANG Guo-dong CHEN Qi-hua

(College of Computer Science and Technology, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract** This paper addressed the problem about the consistency of feature points, with different posed of 3D deformable shapes. It proposed a new algorithm to hierarchically detect feature points, based on the learning samples. Firstly, the algorithm detects the external feature points from input 3D shapes. Secondly, according to the local similarity of external points under different postures, semantic tags of external point are recognized by heat kernel signature and support vector machine. Finally, other feature points are hierarchically extracted by combining semantic tags and the geodesic distance of external points. In experiment, the proposed algorithm is proven to be very robust in detecting semantic-aware feature points on deformable shapes.

**Keywords** 3D model feature point, Hierarchical extraction, Semantic tags, Support vector machine, Heat kernel signature

## 1 引言

在计算机图形学和计算机视觉领域,如何有效地提取特征点是一个非常意义的研究课题。提取出来的特征点可用于三维模型检索<sup>[1]</sup>、骨架提取<sup>[2]</sup>、模型分割<sup>[3]</sup>等。在 2010 年, AIM@SHAPE 在其组织的三维形状分析系列竞赛中首次增加特征点提取的算法性能比赛<sup>[4]</sup>。同时,在 2011 年将开展当前这一研究成果的竞赛,希望能够进一步推动此研究领域的迅速发展。

对于三维模型上的特征点定义,由于应用领域不一样,很难采用一个统一的定义。目前,已有特征点提取技术主要可以分为两类:三维模型表面的几何特征突变点和语义知识可描述的特征点。第一类特征点主要是保证特征点在仿射变换下具有稳定性,从而可以解决三维模型对齐和匹配等问题。对于这方面的研究,图像领域有很多非常经典的特征点提取理论。例如,在 1988 年由 Harris 和 Stephens 两位学者提出的 Harris 算子<sup>[5]</sup>,由于其具有旋转、尺度和光照不变性,已经被广泛应用于图像特征点提取<sup>[6]</sup>。而这种极值理论也同样适用于三维空间。Sipiran 等人把 Harris 算子应用于三维模型特征点提取。他们主要是对三维形状在局部空间上进行平面拟合,从而在二维空间中完成差分操作<sup>[5]</sup>;并且 Sipiran 等人

对 Harris 算子作了进一步工作,提出了 Harris3D 算子<sup>[7]</sup>。而另外一个理论高斯差分模型 DoG 也同样被扩展到三维空间<sup>[8,9]</sup>。类似地,Zou 等人首先构造三维形状的测地尺度空间,用以避免姿态变化对算法结果产生影响,然后采用 DoG 理论进行感兴趣点提取<sup>[10]</sup>。Sun 等人<sup>[11]</sup>采用热核信号构造特征点提取方法。热核信号实际上是一种扩展的多尺度曲率特征。通过热核信号可以利用极值分析得到一些稳定点,而且这些点在刚性变换下具有很好的稳定性。Mian 等人考虑可重复性评价指标的局限性,提出采用曲率值定义特征点的质量评价指标,希望能够提取出更有代表性的特征点<sup>[12]</sup>。该研究可以看作是对可重复性指标的改进。第二类则是从三维模型中识别出具有明显语义信息的特征点,从而能够通过这些特征点驱动计算机动画和变形。例如,计算机动画主要由关节来定义,因此需要自动识别出这些关节,从而驱动整个计算机动画的自动生成。在这方面的研究,最为典型的无疑是人脸上眼睛、鼻子、嘴巴等特征点的提取,通过控制特征点就可以完成人脸表情建模。另外,陈启华等<sup>[13]</sup>提出了一种针对三维人体模型特征点检测和分割的方法,其能有效地提取人体模型的外部特征点和关节点。

本文受文献[13]的启发,提出了一种基于样例学习的三维可变形物体的特征点层次传输方法。与文献[13]相比较,

到稿日期:2013-05-30 返修日期:2013-07-20 本文受国家自然科学基金(61272304),浙江省自然科学基金(Y1110780)资助。

潘翔(1977—),男,博士,教授,主要研究方向为计算机图形学、图像处理,E-mail:panx@zjut.edu.cn.

本文方法适用于任何具有关节拓扑结构的三维可变形物体,因此更具有一般性。算法的主要思想是根据外部特征点在不同姿态下所具有的局部特征相似性,采用样例数据进行相似性学习,从而为每个特征点定义一个语义标签,然后根据语义标签和特征点之间的层次相关性,再识别出其他特征点,从而提取出语义上符合人类视觉感知的特征点。

## 2 算法框架

本文算法主要考虑三维可变形物体的特征点提取。对于这类模型,有两类特征点最为重要。第一类是外部特征点,这些特征点决定了三维模型的拓扑结构;第二类是和外部特征点相关联的关节点,这类特征点用于驱动三维模型的动画生成。因此,对于这两类的模型特征点,论文采用层次提取算法。首先提取出外部特征点,然后根据关节点和外部特征点的连接特性,提取出其他特征点。整个算法的流程如图1所示。首先,提取三维物体的外部特征点;其次,根据样例知识和外部特征点的热核信号特征,识别出语义标签;最后,根据语义标签进行层次关节点提取。

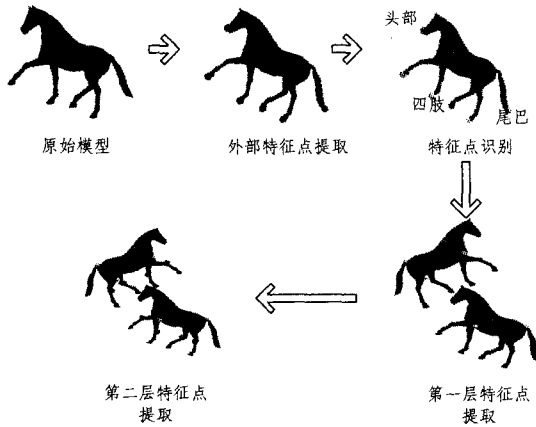


图1 算法流程图

## 3 算法细节

根据上述算法流程,本节对算法实现进行详细描述。首先通过测地距离提取出外部特征点。然后采用支持向量机对外部特征点的语义进行识别,得到语义标签。最后,根据语义标签层次提取关节点。为了描述方便,首先给出三维模型的形式化定义和一些符号描述。设三维模型为  $M$ ,且模型中包含三角片集合  $F = \{f_1, \dots, f_i, \dots, f_{NF}\}$  以及顶点集合  $V = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_{NV}\}$ ,这里  $NF$  和  $NV$  分别代表三角片数量和顶点数量。特征点提取目标是能够在集合  $F$  中识别出两个子集合:一个是外部特征点子集合  $EP = \{ef_1, ef_2, \dots, ef_i, \dots, ef_{EK}\}$ ,  $ef_i \in F$ ,这里  $EK$  代表外部特征点的数目;另外一个是根据外部特征点语义标签层次得到的关节特征点子集合  $IP = \{if_1, \dots, if_j, \dots, if_{IK}\}$ ,  $if_j \in F$  来表示,这里  $IK$  代表关节特征点的数目。注意到算法采用三角片索引来定义特征点。因此,在后续算法描述中特征点代表一个三角片索引而不是顶点位置。

### 3.1 外部特征点提取

对于外部特征点的提取,有很多方法可以参考。论文采用测地距离所具有的极大值特性提取特征点。主要是三维可

变形物体通常由一个中心部分(例如人的身体)和其它子部分组成(例如手臂和头)。对于这类模型,采用测地距离可以有效地检测出外部特征点。对于三角网格模型,其任意两个三角片  $f_i$  和  $f_j$  之间的测地距离  $geo(f_i, f_j)$  可以通过最短路径算法计算得到。采用测地距离提取可变形物体的外部特征点,主要包括如下几个步骤:

1)提取模型中心三角片。中心三角片在几何特性上表现为测地距离之和最小,因此,可以采用如下公式得到中心三角片  $f_c$  的位置:

$$\begin{cases} sum_i = \sum_{j=0}^{NF} w_i \cdot geo(f_i, f_j) \\ f_c = \{f_i | \min(sum_i), i \in [1, NF]\} \\ w_i = \frac{a_i}{\sum_{k=1}^{NF} a_k} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $a_i$  代表每个三角片的面积。把归一化的三角片面积作为测地距离权重主要是考虑三维模型表面的三角片大小具有不均匀性,需要通过权重使计算得到的测地距离之和更加准确有效。

2)递归提取模型外部特征点。在得到的中心三角片基础上,可通过迭代得到模型的外部特征点,即外部特征点。注意到对可变形三维模型,外部特征点要远离中心三角片和已经提取出来的特征点,因此通过式(2)递归得到其他外部特征点:

$$ef_j = \max_{f_i \in F} \{f_i | \min geo(f_i, f_k), f_k \in EP \cup \{f_c\}\} \quad (2)$$

该式在每次迭代过程中,对任意一个三角片  $f_i$ ,首先计算出其到中心三角片和已经提取出来的特征点的最小距离。显然,下一个特征点位置则是在所有三角片中具有最大的最小距离,从而使提取出来的特征点远离中心点和中心三角片。

3)递归中止。对于递归中止,算法考虑当提取得到的特征点到其他特征点和中心三角片小于某个预设定的阈值时结束。递归中止条件定义如下:

$$con = \frac{\max_{f_i \in F} \{\min geo(f_i, f_k), f_k \in EP\}}{\frac{1}{NF} \times \sum_j^{NF} geo(f_j, f_c)} < Th \quad (3)$$

如何定义  $Th$  是一个非常重要的问题。 $Th$  定义过小,会提取出很多并不具有语义知识的特征点,但是  $Th$  定义过大会导致丢失部分外部特征点。注意到算法会进一步采用识别出每个特征点的语义知识,即使是部分被误提取出来的特征点,仍然能够通过语义识别消除误提取的影响。通过实验分析发现,  $Th$  取 0.4 能够有效地提取出所有的外部特征点。

上述递归提取能够有效地识别出外部特征点。图2给出了部分模型的外部特征点提取结果。可以发现,这些特征点能够有效地描述模型的拓扑结构。另外一方面,通过最大化外部特征点之间的测地距离能够有效地保证每个特征点和三维模型拓扑结构中每个子部分的一致性。例如,图2(a)中的马模型则是由身体、四肢、尾巴和头部组成。图2(b)给出了一个人体模型特征点误提取的例子,误提取的特征点主要存在人体背部,可以发现,这种误提取的特征点通常处在可变形物体的非刚性部分,其局部特征和外部特征点具有非常明显的差异性。因此通过局部特征识别特征点的语义标签可以有效提高特征点识别的准确率。

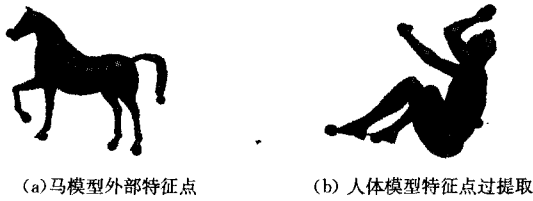


图2 三维模型的外部特征点

### 3.2 外部特征点语义识别

对于上述算法得到的外部特征点,算法根据三维模型顶点的热核信号特征描述符和支持向量机识别出外部特征点对应的语义标签。识别出来的语义特征不仅能够驱动后续其他特征点的层次提取,而且能够排除误提取的特征点。因此,在这里构造一个有4个类别的分类器,包括头部、四肢、尾巴和躯干类。其中前面3个对应外部特征点,最后一个类别用于消除误提取的特征点。

#### 3.2.1 三维顶点热核信号特征描述符提取

对于外部特征点的语义标签识别,算法采用热核信号(HKS)<sup>[11]</sup>作为局部特征描述符。热核信号是一种扩展的多尺度曲率特征,其理论依据主要是物理学中的偏微分理论-热差分。对三维模型中任意一个顶点,热核信号都定义了一串代表该点局部和全局几何属性的特征向量。热核信号根据给定的尺度对局部区域的热分布进行描述,因此能够同时描述三维模型的局部和全局特征。对三维模型  $M$  中的任意一个三维顶点  $v_i$ ,其多尺度热核信号特征采用式(4)来表示:

$$fea_i = \{h_{t_1}, h_{t_2}, \dots, h_{t_j}, \dots, h_{t_m}\} \quad (4)$$

这里  $\{1, 2, \dots, j, \dots, m\}$  代表热核信号的不同尺度,取值为  $[0.1, 14]$ 。对一个特定的尺度  $t_j$ ,其热核信号采用式(5)计算:

$$h_{t_j} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t_j} \phi_i^2 \quad (5)$$

式中,  $\lambda_i$  和  $\phi_i$  分别是拉普拉斯-贝尔特拉米算子中顶点  $v_i$  所对应的特征值和特征函数。对于网格模型,可以通过构造顶点的拉普拉斯方程,然后通过大规模稀疏方程组进行求解得到。可以发现,上式只采用了热核信号的自相关特征,主要是算法只考虑采用热核信号描述特征点的几何特性,因此并没有采用热核信号的互相关特征。从上式可以发现,随着  $t$  从小到大的变化,热核自信号能够描述出特征点的局部几何特性和全局性质。如果  $t$  很小,则只是对很小的区域的相关特征进行描述,而  $t$  增大时,热核信号主要表现出全局特性。图3给出了  $t=8$  时的热核信号特征,可以发现人体四肢的外部特征点具有相似的热核信号特征描述符,而和头部、躯干部分具有明显的差异性。另外一方面,不同于曲率特征,热核信号具有局部聚类性。在同一个子部分上的顶点具有类似的热核信号。这种稳定性保证了热核信号可以有效地识别出外部特征点的语义标签。

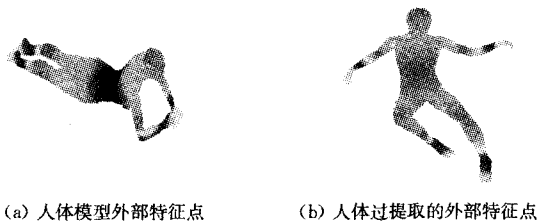


图3 热核信号特征一致性效果图( $t=8$ )

#### 3.2.2 外部特征点语义识别

由于算法把特征点定义在三角片上,因此对于模型中任意一个外部特征点  $ef_i$ ,其特征点形状描述符  $Fea_i$  采用式(6)定义:

$$Fea_i = \frac{fea_{v_{i,1}} + fea_{v_{i,2}} + fea_{v_{i,3}}}{3} \quad (6)$$

式中,  $\{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$  代表特征点所在三角片的3个顶点索引。语义识别的目标是根据该特征采用支持向量机对每个外部特征点识别出其语义标签  $y, 1 \leq y \leq Y$ 。这里  $Y$  为语义标签的类别总数,设为4,包括头部、四肢、尾巴和躯干类。对于支持向量机的统计分类,可以采用式(7)完成识别。

$$V(Fea_i) = \{y | y = \max_{j=1}^Y vot(Fea_i), j = [1, Y]\} \quad (7)$$

这里  $vot$  是一个2类支持向量机。当特征  $Fea_i$  被判定为类别  $y$  时,对标识  $y$  投1票,否则投0票。因此,通过多个2类支持向量机的组合,采用投票数最大原则得到特征点  $ef_i$  所属的语义标签  $y_i$ 。注意到外部特征点不包含躯干点,因此通过语义识别可以过滤掉过提取的特征点,从而保证了特征点提取的正确性和可靠性。对于支持向量机的更多定义和细节描述,可以参考文献[14]。

#### 3.2.3 关节点提取

通过热核信号和支持向量机,算法识别出每个外部特征点的语义标签,得到外部特征点集合  $EP$  以及相应的语义标签。在这里,根据语义标签和可变形物体关节点特性可以层次提取出其他特征点。显然,对于三维可变形物体,关节点只需要对语义标签为四肢的特征点进行层次提取。

为了能够提高关节点提取的精度和一致性,采用测地路径和分割边界的交点得到其相应的关节点位置。采用分割边界主要是考虑到这些关节点一般都在高曲率位置,因此可以通过图割提取出较为精确的关节线,定义关节线集合  $RV = \{rf_1, \dots, rf_i, \dots, rf_{EX}\}$ ,其中  $rf_i$  为某个外部特征点  $ef_i$  所对应的关节线。然后通过测地路径和关节线的交点提取出关节特征点。因此对于外部特征点  $kp_i$  所对应的关节点  $if_i$ ,可以采用式(8)得到:

$$if_i = pa(ef_i, f_c) \cap rf_i \quad (8)$$

式中,  $pa(ef_i, f_c)$  代表测地路径  $ef_i$  到  $f_c$  所经过的三角片集合。算法效果如图4所示。其中黑线为分割得到的关节线,白线为中心点与头部特征点之间所形成的测地线。由于分割边界是封闭的,因此和测地线有且只有一个交点,而且这个交点很好地描述了人体的颈部关节点。

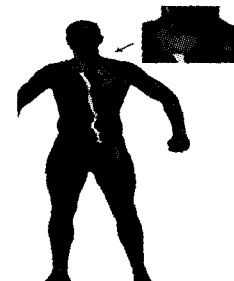


图4 关节线与测地路径交点

类似地,对于第二层次关节点提取,只需将第二层次的关节线加入集合  $RV$  中,再重复以上迭代过程,便可迭代得到第

二层次的关节点。

## 4 实验结果与分析

本节对算法进行实验分析和验证。实验数据使用普林斯顿大学和麻省理工大学的三维图形数据库<sup>[15,16]</sup>,包括人体、马、狮子以及猫等可变形三维模型,总共有 125 个模型。选其中 25 个模型用于训练,另外 100 个模型用于测试。实验首先验证特征点提取结果和人类认知结果的一致性。其次,对算法在噪声和分辨率下的稳定性进行测试。最后,对实验结果进行统计分析,说明算法具有一般性。

### 4.1 特征点提取结果分析

图 5—图 8 中分别显示了 4 类可变形物体模型即人体、马、狮子、猫提取的外部特征点和关节点的情况。从中可以看出,这几类模型的外部特征点能被精确锁定。人体模型包括了头部和四肢两部分外部特征点;而马、狮子以及猫的模型则增加了尾巴上的外部特征点,如图 5(b)、图 6(b)、图 7(b)、图 8(b)所示。其中图 5(c)、图 6(c)、图 7(c)、图 8(c)显示了这些模型第一层次的关节点提取情况;图 5(d)、图 6(d)、图 7(d)、图 8(d)则显示了第二层次的关节点提取情况。从这些图中可以明显地看到,本文方法提取得到的第一层次和第二层次的特征点基本上位于视觉感知意义上的关节点,符合人类的认知规律。



图 5 人体模型的特征点提取

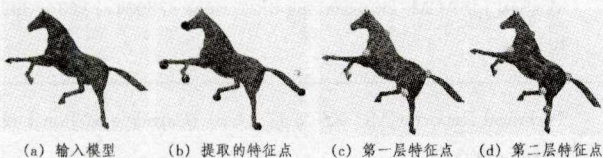


图 6 马模型的特征点提取



图 7 狮子模型的特征点提取



图 8 猫模型的特征点提取

### 4.2 稳定性分析

为验证算法的稳定性,对三维模型分别作简化和加噪处理。首先,对原始模型进行 50% 的简化操作,使得模型顶点

数和三角片数量均为原来的一半。尽管模型分辨率降低,但是模型的特征点分布并没有发生显著的变化,而且多尺度热核信号在不同分辨率下仍具有稳定性。因此,算法在多分辨率下具有鲁棒性,实验效果如图 9 所示。

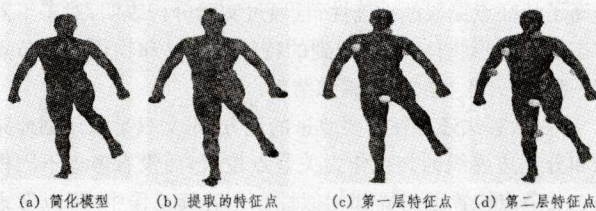


图 9 简化模型的特征点提取

其次,对原始模型增加 5% 的噪点,然后对噪声模型进行层次提取关节点。尽管噪声点对曲率、法向夹角等几何特征具有比较明显的影响,但是由于算法采用测地线和分割边界的交点作为关节点,而且分割边界是一个具有最小代价的闭合曲线,因此在噪声下仍具有一定的稳定性。算法效果如图 10 所示。可以发现,从噪声模型中提取出来的特征点位置和原始模型还是具有一致性。



图 10 噪声模型的特征点提取

### 4.3 量化误差

为了进一步验证算法的一般性,本小节对上述 4 类模型的实验结果进行统计分析。首先,手工标记每类模型的期望特征点集合  $WP = \{wf_1, \dots, wf_i, \dots, wf_h\}$ ,其中  $h$  为关节点数量;然后使用式(9)计算每个模型关节点的平均误差率  $Ra$ :

$$Ra = \frac{\sum_{i=0}^h \frac{\|geo(wf_i, f_c) - geo(if_i, f_c)\|}{\sum_{j=0}^n geo(ef_j, f_c)}}{\sum_{j=0}^n geo(ef_j, f_c)} \times 100\% \quad (9)$$

式中,  $n$  为外部特征点数量,  $wf_i$  为第  $i$  个期望关节点,  $if_i$  为第  $i$  个算法得到的关节点,  $ef_j$  为第  $j$  个外部特征点。

图 11 给出了 4 类模型的特征点提取误差。可以发现,所提算法提取得到的特征点与期望得到的特征点之间的平均误差率维持在 12% 以内。因此,验证了所提算法可以有效地提取不同类型可变形物体的外部特征点以及关节点。

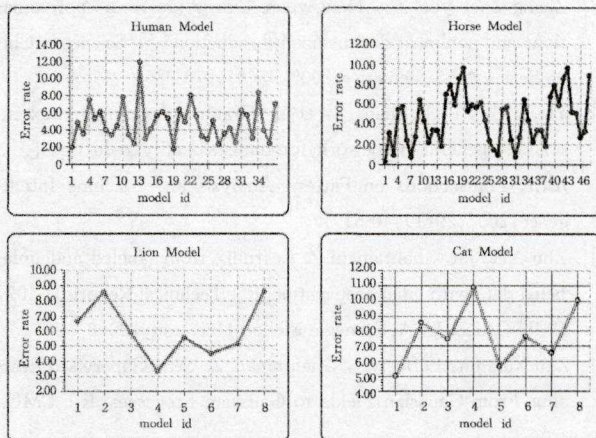


图 11 不同模型集合的量化误差

结束语 针对计算机动画所需的特征点提取问题,提出

了基于语义标签约束的特征点层次提取方法。不同于已有方法只是考虑极值理论进行特征点定义,算法对提取出来的外部特征点进行语义识别,从而能够通过语义标签来控制特征点的数量。此外,算法通过图割理论进行特征点优化,有效地提高了特征点提取的准确性;且通过实验分析表明,对于不同姿态的可变形物体,算法得到的特征点能够和物体的关节点相一致,符合人类的视觉感知结果。

但是,算法还存在需要改进的地方;本文只是采用测地路径和分割边界线的交点作为关节点位置,而没有考虑不同模型在关节点位置上的局部相似性。在后续工作中,可以考虑对不同模型分割边界线上的顶点集合进行聚类分析,提取出更为一致的关节点位置。另外一方面,目前算法只是考虑一些三维造型数据,而没有考虑到扫描得到的三维数据,由于这些数据存在局部遮挡等问题,使得特征点具有不完全性。因此,需要设计更为准确的语义标签识别算法,这将是后续研究的另一问题。

### 参 考 文 献

- [1] Chen D Y, Pei X T. On Visual Similarity Based 3D Model Retrieval[J]. Computer Graphics Forum, 2003, 22(3): 223-232
  - [2] Karni Z, Gotsman C. Spectral compress of mesh geometry[C]// Proceedings of SIGGRAPH'00. USA: ACM press, 2000, 279-286
  - [3] Sagi K, George L, Ayellet T. Mesh Segmentation using feature point and core extraction[J]. The Visual Computer, 2005, 9: 649-659
  - [4] Bronsteiny A, Bronsteiny M, Bustos B. SHREC 2010: robust feature detection and description benchmark[C]// Proceedings of the IEEE Conference on CVPR. New York: IEEE computer society press, 2010
  - [5] Mikolajczyk K, Schmid C. Scale and Affine invariant interest point detectors[J]. International Journal of Computer Vision, 2004, 60(1): 63-86
  - [6] Schmid C, Mohr R, Bauckhage C. Evaluation of interest point detectors[J]. International Journal of Computer Vision, 2000, 37(2): 151-172
  - [7] Sipiran I, Bustos B. Harris 3D: A robust extension of the Harris operator for interest point detection on 3D meshes[J]. The Visual Computer, 2011, 27(11): 963-976
  - [8] Castellani U, Cristani M, Fantoni S. Sparse points matching by combining 3D mesh saliency with statistical descriptors[J]. Computer Graphics Forum, 2008, 27(2): 643-652
  - [9] Zaharescu A, Boyer E, Varanasi K. Surface feature detection and description with applications to mesh matching[C]// Proceedings of IEEE Conference on CVPR. New York: IEEE computer society press, 2009: 373-380
  - [10] Zou G, Hua J, Dong M. Surface matching with salient keypoints in geodesic scale space[J]. Computer Animation and Virtual Worlds, 2008, 19(3): 399-410
  - [11] Sun J, Ovsjanikov M, Guibas L. A concise and provably informative multi-scale signature based on heat diffusion[J]. Computer Graphics Forum, 2009, 28: 1383-1392
  - [12] Mian A, Bennamoun M, Owens R. On the Repeatability and Quality of Keypoints for Local Feature-based 3D Object Retrieval from Cluttered Scenes[J]. International Journal of Computer Vision, 2009, 89(2): 348-361
  - [13] 陈启华, 潘翔, 张三元. 语义知识约束的三维人体特征点检测和分割[J]. 计算机辅助设计与图形学报, 2011, 23(6): 1061-1068
  - [14] Kristin P, Campbell C. Support Vector machines; hype or hallucination[C]// Proceedings of ACM SIGKDD Explorations Newsletter. New York: ACM Press, 2000, 2(2): 1-13
  - [15] Kim V G, Yaron L, Thomas F. Blended Intrinsic Maps [J]. ACM Transaction on Graphics, 2011, 30(4)
  - [16] Robert W, Sumner, Jovan P. Deformation Transfer for Triangle Meshes[J]. ACM Transactions on Graphics, 2004, 23(3): 399-405
- 
- (上接第 282 页)
- [5] Brans M M. Charting a manifold[C]// Neural Information Processing Systems: Natural and Synthetic. Vancouver, Canada, 2000: 232-245
  - [6] Zhang Zhen-yue, Zha Hong-yuan. Linear low-rank approximations and nonlinear dimensionality reduction [J]. Science in China Series A-Mathematics, 2005, 35(3): 273-285
  - [7] Yan S C, Xu D, Zhang B, et al. Graph embedding and extensions: A general framework for dimensionality reduction [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(1): 40-51
  - [8] Zhu Xiao-jin, Ghahramani Z. Learning from labeled and unlabeled data with label propagation[R]. Technical Report 02-107, CMU-CALD. USA: Carnegie Mellon University, 2002
  - [9] Zhu Xiao-jin, Lafferty J, Ghahramani Z. Semi-Supervised Learning: From Gaussian Fields to Gaussian Processes[R]. CMU. Technical Report, CMU-CS-03-175. USA: Carnegie Mellon University, 2003
  - [10] Pothan, Alex, Fan C-J. Computing the Block Triangular Form of a Sparse Matrix [J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1990, 16(4): 303-324
  - [11] 李岩波, 宋琼, 郭新辰. 基于流形距离的人工免疫半监督聚类算法[J]. 计算机科学, 2012, 39(11): 204-207
  - [12] 刘志勇, 袁媛. 基于测地距离的半监督增强[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(21): 202-204
  - [13] 任剑锋, 梁雪, 李淑红. 基于非线性流形学习和支持向量机的文本分类算法[J]. 计算机科学, 2012, 39(1): 261-263
  - [14] 罗磊, 李跃华. 基于 LLE 的分类算法及其在被动毫米波目标识别中的应用[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(6): 1306-1310
  - [15] 王越, 王泉, 吕奇峰, 等. 基于初始聚类中心优化和维间加权的改进 k-means 算法[J]. 重庆理工大学学报: 自然科学版, 2013, 27(4): 77-80