基于分辨函数的极大团搜索算法

黄治国[1] 李 娜[2]

(河南工程学院软件学院 郑州 451191)[1] (中南民族大学计算机科学学院 武汉 430074)[2]

摘 要 寻找极大团是几何图论极为重要的基础研究问题之一。将分辨函数模型与极大团性质结合，定义了顶点的极大团分辨函数、顶点关于某顶点子集的布尔映射函数，得到了一些与极大团相关的重要性质与定理，证明了图的极大团搜索问题可快捷自然地转换为相对简单的分辨函数表达式约束，为设计极大团搜索算法提供了一种有效的理论依据与求解途径。进而引入约简树构造方法设计了基于分辨函数的极大团搜索算法，最后通过给定无向连通图实例说明了算法的可行性与有效性。

关键词 图论，极大团，分辨函数，约简树构造

中图法分类号 TP311 **文献标识码** A

Discernibility Function-based Algorithm for Finding All Maximal Cliques

HUANG Zhi-guo[1] LI Na[2]

(School of Software, Henan Institute of Engineering, Zhengzhou 451191, China)[1]

(College of Computer Science, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China)[2]

Abstract Finding maximal clique of a graph is a fundamental problem in graph theory. By combining discernibility function with maximal clique, the discernibility function of maximal clique over the vertex and the Boolean mapping function of the vertex with respect to any vertex set were defined, and some characteristics and theorems relative to maximal clique were obtained, then a fact was proved that the problem of finding all maximal cliques in a graph can be naturally expressed as relatively simple constraints of discernibility function expression. Furthermore, discernibility function-based algorithm was designed for finding all maximal cliques in a graph by introducing the method of reduction tree constructing. The theoretical derivation and simulation instance show that this algorithm is feasible and effective in practice.

Keywords Graph theory, Maximal clique, Discernibility function, Reduction tree constructing

1 引言

图论是以图为研究对象的一个重要数学分支，图论中的图由若干点及两点间连线构成，通常用来描述某些事物及事物之间的某种特定关系[1]。寻找极大团是图论中极为重要的基础性研究问题之一，广泛应用于人工智能、数据挖掘、生物信息学、计算语义学等诸多科学领域[2-4]。

分辨函数概念最早由 Skowron 与 Rauszer 提出[5]，用于描述对象间可分辨关系和刻画条件属性对保持系统信息分辨能力的影响。分辨函数模型将属性约简求解转换为布尔逻辑表达式约束，证明该表达式的等价极小析取范式所有蕴含项与全体约简一一对应，为求取信息系统全体属性约简提供了一种有效途径[6-7]。

为实现分辨函数合取范式向其极小析取范式的等价转换，文献[8]通过二分策略与运用启发式信息扩展结点，设计了一种构造约简树求取全体属性约简的有效算法，该约简树从根结点到叶结点的全体路径构成的析取范式与信息系统分辨函数等价，其极小析取范式所有蕴含项即为信息系统全体属性约简。

以上研究为图的极大团搜索提供了有益启示。本文将分辨函数引入极大团求解，证明了图的极大团搜索问题可快捷自然地转化为相对简单的分辨函数表达式约束。首先定义了顶点相容类与极大团分辨函数、顶点关于某顶点子集的布尔映射函数，然后给出了一些重要的性质与定理证明，并结合约简树构造方法设计了基于分辨函数的极大团搜索算法，最后通过某无向连通图实例说明了该算法的可行性与有效性。

2 极大团与分辨函数

2.1 极大团

定义 1 给定无向图 $G=(V,E)$，V 与 E 分别为 G 的顶点集与边集。若 $\exists V'\subseteq V$ 使得顶点集 V' 导出的子图 $G'=(V',E')$ 为完全图，则称 V' 为图 G 的团；若 $\neg\exists V''\subseteq V\wedge V'\subset V''$ 使得顶点集 V'' 导出的子图为完全图，则称 V' 为图 G 的极大团。

到稿日期：2013-06-07 返修日期：2013-10-15 本文受国家自然科学基金项目(61300127)，河南工程学院博士基金项目(D2013003)资助。

黄治国(1978—)，男，博士，讲师，主要研究方向为数据挖掘、智能计算，E-mail：huangzg2020@gmail.com；李 娜(1981—)，女，博士，讲师，主要研究方向为智能计算、图像处理。

定义 2 对于 $\forall x \in V$，顶点 x 的相容类 $TOL(x)$ 定义为：

$TOL(x)=\{y: y\in V \wedge (y=x \vee (x,y)\in E)\}$

由定义 2 可知，$TOL(x)$ 是由顶点 x 及其全部邻接点构成的顶点集合。

定义 3 给定某顶点 $x\in V$，其包含于 $TOL(x)$ 的全体极大团构成的集合 $MC(x)$ 定义为：

$MC(x)=\{X: X$ 为极大团 $\wedge X\subseteq TOL(x)\}$

性质 1 若 $X\subseteq V$ 为图 $G=(V,E)$ 的一个极大团，则必存在某顶点 $x\in V$ 使得 $X\subseteq TOL(x)$。

性质 1 表明，分别针对图 $G=(V,E)$ 中每一顶点 $x\in V$ 搜索包含于 $TOL(x)$ 的极大团集合 $MC(x)$，收集汇总后便可得到图 G 的全体极大团。

2.2 分辨矩阵与分辨函数

Skowron 与 Rauszer 首次提出分辨矩阵概念体现对象间相互关系，并进一步定义分辨函数刻画条件属性对于保持系统信息分辨能力的影响，为信息系统全体属性约简求取建立了一种规范精确的数学模型。

信息系统是分辨函数模型的基础数据结构。信息系统形式化表示为一四元组 $IS=\langle U,A,V,\rho\rangle$。其中，$U=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 为非空有限论域；$A=C\cup D$ 为非空有限属性集，C 和 D 分别为条件属性集和决策属性集，决策 $D\neq\emptyset$ 时信息系统称为决策信息系统，简称决策系统；$V=\bigcup_{a\in A}V_a$，V_a 为属性 a 的值域；$\rho: U\times A\to V$ 为映射函数，使得 $\rho(x_i,a)\in V_a(x_i\in U, a\in A)$。

定义 4 给定属性集 $R\subseteq A$，不可分辨关系 $IND(R)$ 定义为 $IND(R)=\{(x_i,x_j)\in U\times U: \forall a\in R\to\rho(x_i,a)=\rho(x_j,a)\}$。

根据定义 4 可知，不可分辨关系 $IND(R)$ 为满足自反、对称与传递特性的等价关系。由此可得论域 U 关于不可分辨关系 $IND(C)$ 与 $IND(D)$ 导致的商集分别为 $U/IND(C)=\{X_1,\cdots,X_{|U/IND(C)|}\}$ 和 $U/IND(D)=\{D_1,\cdots,D_{|U/IND(D)|}\}$。

属性约简具有多种不同的准则，约简准则体现了属性约简过程中必须遵循的标准与原则[9,10]。各准则均可通过相应的分辨矩阵进行描述，文献[11]依据其共性提出了普适分辨矩阵概念。文献[12]详细地比较分析了目前已有的各种约简准则，针对相容决策系统将其归为两类，针对不相容决策系统将其归为 6 类。以下是结合上述研究给出的分辨矩阵定义。

定义 5 给定决策系统 $DS=\langle U,A,V,\rho\rangle$ 与信息分辨特性 β，分辨矩阵 M 是一个 $|U/IND(C)|\times|U/IND(C)|$ 的矩阵，矩阵中每一元素定义为：

$$c_{ij}=\begin{cases}\{a|a\in C\wedge\rho(X_i,a)\neq\rho(X_j,a)\}, & \\ \quad X_i \text{ 与 } X_j \text{ 关于 } \beta \text{ 可分辨} & \\ \emptyset, & \text{otherwise}\end{cases}$$

分辨矩阵满足对称性且对于 $1\leqslant\forall i\leqslant|U/IND(C)|$ 均有 $c_{ii}=\emptyset$，因此可仅选取其下三角元素来表示矩阵。

定义 6 给定决策系统 $DS=\langle U,A,V,\rho\rangle$ 及其上的分辨矩阵 M，其分辨函数 $DF(M)$ 定义为：

$DF(M)=\wedge\{\vee(c_{ij}): 1\leqslant j<i\leqslant|U/IND(C)|, c_{ij}\neq\emptyset\}$

其中，$\vee(c_{ij})$ 表示 c_{ij} 中所有元素的析取，$\wedge\{\vee(c_{ij}): 1\leqslant j<i\leqslant|U/IND(C)|, c_{ij}\neq\emptyset\}$ 表示对 $1\leqslant j<i\leqslant|U/IND(C)|$（即矩阵下三角元素）且不为空的全体 $\vee(c_{ij})$ 间作合取。运用布尔逻辑分解律与吸收律，将形式为合取范式的分辨函数转换为与之等价的极小析取范式，极小析取范式中所蕴含的析取项与决策系统属性约简一一对应。

3 基于分辨函数的极大团搜索算法

分辨矩阵与分辨函数概念为信息系统全体属性约简求取建立了一种规范精确的数学模型。将性质 1 与分辨函数概念结合，同样可为设计图的极大团搜索算法提供有益启示。本节将阐述与之相关的定义、性质与定理证明，并给出基于分辨函数的极大团搜索算法描述。

3.1 基于分辨函数的极大团搜索原理

定义 7 对于 $\forall x\in V$，其极大团分辨函数定义为：

$DF(x)=\wedge\{(x_i\vee x_j): x_i,x_j\in TOL(x)\wedge(x_i\notin TOL(x_j)\vee x_j\notin TOL(x_i))\}$

其中，$(x_i\vee x_j)$ 为 x_i 与 x_j 的简单析取式，$DF(x)$ 即为满足条件 $x_i,x_j\in TOL(x)\wedge(x_i\notin TOL(x_j)\vee x_j\notin TOL(x_i))$ 的所有 $(x_i\vee x_j)$ 的合取范式。

定义 8 给定非空顶点集 $X\subseteq V$，$\forall x\in V$ 关于 X 的布尔映射函数定义为：

$$\partial_X(x)=\begin{cases}0 & x\in X\\ 1 & x\notin X\end{cases}$$

由定义 8 可得，$DF(x)$ 关于 $X\subseteq V$ 的布尔映射函数为 $\partial_X(DF(x))=\wedge\{\partial_X(x_i)\vee\partial_X(x_j): x_i,x_j\in TOL(x)\wedge(x_i\notin TOL(x_j)\vee x_j\notin TOL(x_i))\}$。

性质 2 给定 $\forall x\in V$ 且 $\{(x_i\vee x_j): x_i,x_j\in TOL(x)\wedge(x_i\notin TOL(x_j)\vee x_j\notin TOL(x_i))\}\neq\emptyset$，则对 $\forall X\in MC(x)$ 可得 $\partial_{TOL(x)-X}(DF(x))=1$。

证明：若 $\{(x_i\vee x_j): x_i,x_j\in TOL(x)\wedge(x_i\notin TOL(x_j)\vee x_j\notin TOL(x_i))\}\neq\emptyset$，则对于包含于 $DF(x)$ 中的任意简单析取式 $(x_i\vee x_j)$ 可得 $x_i\notin TOL(x_j)\vee x_j\notin TOL(x_i)$，也就是说同时属于 $TOL(x)$ 的两元素 x_i 与 x_j 不可能同属于任意极大团 $X(X\in MC(x))$，即 x_i 与 x_j 中至少其中之一属于 $TOL(x)-X$，故恒有 $\partial_{TOL(x)-X}(x_i\vee x_j)=1$。对蕴含于 $DF(x)$ 中的任意简单析取式 $(x_i\vee x_j)$ 均可得 $\partial_{TOL(x)-X}(x_i\vee x_j)=1$，因此 $\partial_{TOL(x)-X}(DF(x))=1$。

若 $\{(x_i\vee x_j): x_i,x_j\in TOL(x)\wedge(x_i\notin TOL(x_j)\vee x_j\notin TOL(x_i))\}=\emptyset$，则对 $\forall x_i,x_j\in TOL(x)$ 有 $x_i\in TOL(x_j)\wedge x_j\in TOL(x_i))$，故 $TOL(x)$ 中仅存在一个极大团即 $TOL(x)$。此种情形下无需讨论，因此后续部分若不作特殊说明均表示在 $\{(x_i\vee x_j): x_i,x_j\in TOL(x)\wedge(x_i\notin TOL(x_j)\vee x_j\notin TOL(x_i))\}\neq\emptyset$ 情形下分析讨论。

性质 3 给定 $\forall X,Y\subseteq V$ 且 $X\subseteq Y$，若 $\partial_X(DF(x))=1$，则 $\partial_Y(DF(x))=1$。

证明：若 $\partial_X(DF(x))=1$，则对蕴含于 $DF(x)$ 中的任意简单析取式 $(x_i\vee x_j)$ 均有 $x_i\in X\vee x_j\in X$，又 $X\subseteq Y$，故可得 $x_i\in Y\vee x_j\in Y$，因此对蕴含于 $DF(x)$ 中的任意简单析取式 $(x_i\vee x_j)$ 均可得 $\partial_Y(x_i\vee x_j)=1$，故有 $\partial_Y(DF(x))=1$。性质 3 得证。

定理 1 给定 $\forall x\in V$ 且 $\{(x_i\vee x_j): x_i,x_j\in TOL(x)\wedge(x_i\notin TOL(x_j)\vee x_j\notin TOL(x_i))\}\neq\emptyset$，$X\in MC(x)$ 当且仅当 X 同时满足以下两个条件：

(1) $\partial_{TOL(x)-X}(DF(x))=1$；

(2) $\forall y\in TOL(x)-X$，$\partial_{TOL(x)-(X\cup\{y\})}(DF(x))=0$。

证明：先证必要性。

若 $X\in MC(x)$，即 X 是包含于 $TOL(x)$ 中的极大团，由性质 2 可得 $\partial_{TOL(x)-X}(DF(x))=1$，条件 1 成立。

既然 $\{(x_i\vee x_j): x_i,x_j\in TOL(x)\wedge(x_i\notin TOL(x_j)\vee x_j\notin TOL(x_i))\}\neq\emptyset$，那么对 $\forall X\in MC(x)$ 一定有 $TOL(x)-X\neq\emptyset$，则对 $\forall y\in TOL(x)-X$ 必定存在 $y'\in X$ 使得 $(y\vee y')$ 为 $DF(x)$ 中的一项简单析取式。由 $y'\in X$ 可推出 $y'\notin(TOL(x)-(X\cup\{y\}))$，又因 $y\notin(TOL(x)-(X\cup\{y\}))$，故 $\partial_{TOL(x)-(X\cup\{y\})}(y\vee y')=0$。又因 $(y\vee y')$ 为 $DF(x)$ 中的一项简单析取式（对应合取范式中某合取项），故可得 $\partial_{TOL(x)-(X\cup\{y\})}(DF(x))=0$，条件 2 成立。

再证充分性。

首先证若条件(1)$\partial_{TOL(x)-X}(DF(x))=1$ 为真，则对 $\forall u,v\in X$ 有 $u\in TOL(v)\wedge v\in TOL(u)$ 成立。运用反证法假设 $u\in TOL(v)\wedge v\in TOL(u)$ 不成立，即 $u\notin TOL(v)\vee v\notin TOL(u)$ 成立，那么 $(u\vee v)$ 定为 $DF(x)$ 中的一项简单析取式（对应一合取项），又因 $u,v\in X$，故 $\partial_{TOL(x)-X}(u\vee v)=0$，因而有 $\partial_{TOL(x)-X}(DF(x))=0$，这与条件(1)$\partial_{TOL(x)-X}(DF(x))=1$ 矛盾，故假设不成立。因此若 $\partial_{TOL(x)-X}(DF(x))=1$ 为真，则对 $\forall u,v\in X$ 有 $u\in TOL(v)\wedge v\in TOL(u)$ 成立，即条件(1)保证 X 是图中的一个团。

然后证明 $X\in MC(x)$ 即 X 同时也是极大团。运用反证法假设 X 不是极大团，则应从顶点集 $TOL(x)-X$ 中取若干顶点（至少要取一个顶点）加入才能使 X 成为极大团，假设应选取的顶点集合为 $Y(Y\subset TOL(x)-X)$，即 $X\cup Y$ 为一包含于 $TOL(x)$ 的极大团，则由性质 2 可得 $\partial_{TOL(x)-(X\cup Y)}(DF(x))=1$。现取 $\forall y\in TOL(x)-X$ 可知 $(TOL(x)-(X\cup Y))\subseteq(TOL(x)-(X\cup\{y\})$，由性质 3 可得 $\partial_{TOL(x)-(X\cup\{y\})}(DF(x))=1$，这与条件(2)矛盾，故假设不成立，$X$ 一定是极大团。充分性得证。

定理 2　对 $\forall x\in V$ 且 $\{(x_i\vee x_j): x_i,x_j\in TOL(x)\wedge(x_i\notin TOL(x_j)\vee x_j\notin TOL(x_i))\}\neq\emptyset$，令 $DF'(x)=(\wedge X_1)\vee\cdots\vee(\wedge X_h)$ 是与 $DF(x)$ 等价的极小析取范式，则 $MC(x)=\{TOL(x)-X_1,\cdots,TOL(x)-X_h\}$。其中 $X_i\subseteq V\wedge X_i\neq\emptyset(1\leqslant i\leqslant h)$，$\wedge X_i$ 是由 X_i 中所有元素构成的简单合取式。

证明：

(1)先证 $MC(x)\subseteq\{TOL(x)-X_1,\cdots,TOL(x)-X_h\}$。

对 $\forall X\in MC(x)$，即 X 是包含于 $TOL(x)$ 的任意极大团，由定理 1 可得 $\partial_{TOL(x)-X}(DF(x))=1$。既然 $DF'(x)=(\wedge X_1)\vee\cdots\vee(\wedge X_h)$ 是与 $DF(x)$ 等价的极小析取范式，则 $\partial_{TOL(x)-X}(DF'(x))=\partial_{TOL(x)-X}((\wedge X_1)\vee\cdots\vee(\wedge X_h))==\partial_{TOL(x)-X}(\wedge X_1)\vee\cdots\vee\partial_{TOL(x)-X}(\wedge X_h)=1$，即存在 $X_i(1\leqslant i\leqslant h)$ 使得 $X_i\subseteq TOL(x)-X$。

对于 $\forall X\in MC(x)$，由定理 1 可知对 $\forall y\in TOL(x)-X$ 可得 $\partial_{TOL(x)-(X\cup\{y\})}(DF(x))=0$ 成立，又 $DF'(x)$ 是与 $DF(x)$ 等价的极小析取范式，故对 $\forall y\in TOL(x)-X$ 可推导得出 $\partial_{TOL(x)-(X\cup\{y\})}(DF'(x))=\partial_{TOL(x)-(X\cup\{y\})}((\wedge X_1)\vee\cdots\vee(\wedge X_h))=0$，即对于 $\forall X\in MC(x)$，$\forall y\in TOL(x)-X$ 均有 $X_i\nsubseteq TOL(x)-(X\cup\{y\})(1\leqslant i\leqslant h)$。与结论 $X_i\subseteq TOL(x)-X$ 联立可得 $y\in X_i$，即对 $\forall y\in TOL(x)-X$ 可推导得出 $y\in X_i$，故 $TOL(x)-X\subseteq X_i$。

总结以上陈述，对 $\forall X\in MC(x)$ 必存在 $X_i(1\leqslant i\leqslant h)$ 使得 $X_i\subseteq TOL(x)-X$ 且 $TOL(x)-X\subseteq X_i$ 即 $X_i=TOL(x)-X$。也就是说，对 $\forall X\in MC(x)$ 必存在 $X_i(1\leqslant i\leqslant h)$ 使得 $X=TOL(x)-X_i$，即 $MC(x)\subseteq\{TOL(x)-X_1,\cdots,TOL(x)-X_h\}$。

(2)再证 $\{TOL(x)-X_1,\cdots,TOL(x)-X_h\}\subseteq MC(x)$。

令 $Y_i=TOL(x)-X_i$，对 $\forall Y_i\in\{Y_1,\cdots,Y_h\}$ 可得 $\partial_{TOL(x)-Y_i}(DF'(x))=\partial_{X_i}(\wedge X_1)\vee\cdots\vee(\wedge X_h)=1$。对 $\forall y\in TOL(x)-Y_i=X_i$ 可得 $\partial_{TOL(x)-(Y_i\cup\{y\})}(DF'(x))=\partial_{X_i-\{y\}}(\wedge X_1)\vee\cdots\vee(\wedge X_h)$。又因 $DF'(x)$ 是与 $DF(x)$ 等价的极小析取范式，故对 $\forall X_j\in\{X_1,\cdots,X_h\}(1\leqslant j\leqslant h,j\neq i)$ 均有 $X_i-X_j\neq\emptyset$。若 $y\notin X_j$，则由 $y\in X_i$ 可得 $X_j-(X_i-\{y\})\neq\emptyset$；若 $y\in X_j$，则由 $y\in X_i$ 同样可得 $X_j-(X_i-\{y\})\neq\emptyset$。因此 $\partial_{TOL(x)-(Y_i\cup\{y\})}(DF'(x))=\partial_{X_i-\{y\}}(\wedge X_1)\vee\cdots\vee(\wedge X_h)=0$。对 $\forall Y_i\in\{Y_1,\cdots,Y_h\}$ 均有 $\partial_{TOL(x)-Y_i}(DF'(x))=1$，对 $\forall y\in TOL(x)-Y_i$ 均有 $\partial_{TOL(x)-(Y_i\cup\{y\})}(DF'(x))=0$，据定理 1 可知 $Y_i\in MC(x)$。对 $\forall Y_i\in\{Y_1,\cdots,Y_h\}$ 均有 $Y_i\in MC(x)$，故 $\{Y_1,\cdots,Y_h\}\subseteq MC(x)$，即 $\{TOL(x)-X_1,\cdots,TOL(x)-X_h\}\subseteq MC(x)$。

总结(1)(2)陈述可得，若 $DF'(x)=(\wedge X_1)\vee\cdots\vee(\wedge X_h)$ 是与 $DF(x)$ 等价的极小析取范式，则包含于 $TOL(x)$ 的全体极大团集合 $MC(x)=\{TOL(x)-X_1,\cdots,TOL(x)-X_h\}$。

3.2　基于分辨函数的极大团搜索算法

定理 2 为设计基于分辨函数的极大团搜索算法提供了有效的理论依据与求解途径。定理 2 表明，仅需针对每一顶点 $x\in V$ 生成其极大团分辨函数 $DF(x)$，将此函数转换为与之等价的极小析取范式 $DF'(x)=(\wedge X_1)\vee\cdots\vee(\wedge X_h)$，则包含于 $TOL(x)$ 中的极大团集 $MC(x)=\{TOL(x)-X_1,\cdots,TOL(x)-X_h\}$，对每一顶点 $x\in V$ 收集包含于 $TOL(x)$ 的极大团汇总后便可得到图的全体极大团。运用此定理设计基于分辨函数的极大团搜索算法流程见算法 1。

算法 1　基于分辨函数的极大团搜索算法

输入：图 $G=(V,E)$

输出：图 G 的全体极大团

```
1. All_max_cli=∅;
2. for ∀x∈V
3.     compute TOL(x);
4.     generate DF(x);
5.     transform DF(x) to DF'(x)=(∧X1)∨…∨(∧Xh);
6.     MC(x)=∅;
7.     for j=1 to h
8.     MC(x)=MC(x)∪{(TOL(x)-Xj)}
9.     endfor
10.    All_max_cli=All_max_cli∪MC(x);
11. endfor
12. output All_max_cli
```

算法 1 中 *All*_max_*cli* 为一全局变量，其初值为空，用于存储图的全体极大团。算法第 3－4 行针对 $\forall x\in V$ 计算其相容类 $TOL(x)$、生成其极大团分辨函数 $DF(x)$（对应一合取范式），算法第 5 行将 $DF(x)$ 转换为与之等价的极小析取范式 $DF'(x)$，算法第 6－9 行收集包含于 $TOL(x)$ 中的极大团集 $MC(x)$，随后将 $MC(x)$ 加入 *All*_max_*cli*，算法运行结束，*All*_max_*cli* 取值即为图 G 的全体极大团集合。

4 实例分析

为验证算法 1 的可行性与有效性，本节以文献[13]中给出的已知无向连通图为实例(见图 1)，依据算法流程计算给定图的全体极大团。

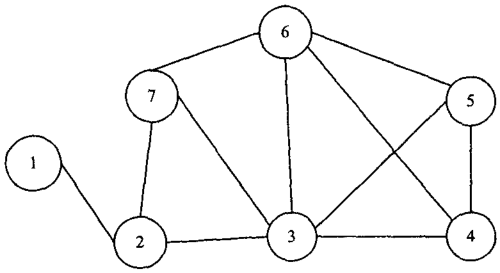

图 1 无向连通图实例

针对任意顶点 $x \in V$ 计算其相容类 $TOL(x)$，见表 1。

表 1 $\forall x \in V$ 的相容类

x	x's 相容类 TOL(x)
1	1,2
2	1,2,3,7
3	2,3,4,5,6,7
4	3,4,5,6
5	3,4,5,6
6	3,4,5,6,7
7	2,3,6,7

依据定义 7 可计算得到任意顶点 x 的极大团分辨函数 $DF(x)$ 及其极小析取范式 $DF'(x)$，见表 2。

表 2 $\forall x \in V$ 的极大团分辨函数 $DF(x)$ 与 $DF'(x)$

x	DF(x)	DF'(x)
1	$DF(1)=\emptyset$	$DF'(1)=\emptyset$
2	$DF(2)=(1\vee 3)\wedge(1\vee 7)$	$DF'(2)=1\vee(3\wedge 7)$
3	$DF(3)=(2\vee 4)\wedge(2\vee 5)\wedge(2\vee 6)\wedge(4\vee 7)\wedge(5\vee 7)$	$DF'(3)=(2\wedge 7)\vee(2\wedge 4\wedge 5)\vee(4\wedge 5\wedge 6)$
4	$DF(4)=\emptyset$	$DF'(4)=\emptyset$
5	$DF(5)=\emptyset$	$DF'(5)=\emptyset$
6	$DF(6)=(4\vee 7)\wedge(5\vee 7)$	$DF'(6)=(4\wedge 5)\vee 7$
7	$DF(7)=(2\vee 6)$	$DF'(7)=2\vee 6$

依据定理 2 可对任意顶点 $x \in V$ 计算得到包含于其最大相容类 $TOL(x)$ 中的极大团集 $MC(x)$，见表 3。

表 3 $\forall x \in V$ 的极大团集 $MC(x)$

x	TOL(x)	DF'(x)	MC(x)
1	1,2	$DF'(1)=\emptyset$	{1,2}
2	1,2,3,7	$DF'(2)=1\vee(3\wedge 7)$	{2,3,7},{1,2}
3	2,3,4,5,6,7	$DF'(3)=(2\wedge 7)\vee(2\wedge 4\wedge 5)\vee(4\wedge 5\wedge 6)$	{3,4,5,6},{3,6,7},{2,3,7}
4	3,4,5,6	$DF'(4)=\emptyset$	{3,4,5,6}
5	3,4,5,6	$DF'(5)=\emptyset$	{3,4,5,6}
6	3,4,5,6,7	$DF'(6)=(4\wedge 5)\vee 7$	{3,6,7},{3,4,5,6}
7	2,3,6,7	$DF'(7)=2\vee 6$	{3,6,7},{2,3,7}

算法 1 运行结束，可得到图 G 的全体极大团 $All\_\max\_cli=\{\{1,2\},\{2,3,7\},\{3,4,5,6\},\{3,6,7\}\}$。

结束语 寻找极大图是图论中极为重要的研究问题之一，广泛应用于涉及图方法建模的诸多科学领域。借鉴分辨函数模型将信息系统约简求取问题转换为布尔逻辑表达式约束的方法，本文将分辨函数与极大团性质结合，定义了顶点的极大团分辨函数、顶点关于某顶点子集的布尔映射函数，通过分析相容类与极大团特性得到了一些重要性质与定理，证明了图的极大团搜索问题同样可快捷自然地转换为相对简单的分辨函数表达式约束，为设计极大团搜索算法提供了一种有效的理论依据与求解途径。

进而引入约简树构造方法，以实现极大团分辨函数(对应某合取范式)向其极小析取范式的等价转换，并在此基础上设计了基于分辨函数的极大团搜索算法。该算法针对图中每一顶点计算其相容类，生成其极大团分辨函数并转换为等价的极小析取范式，将此极小析取范式中各析取项对该顶点相容类取补即得到与该顶点相关的极大团集合，收集汇总与每一顶点相关的极大团集便得到图的全体极大团集合。最后将该算法应用于某给定无向连通图实例，说明了算法的可行性与有效性。

参 考 文 献

[1] 卢俊杰. 几何图论中的若干问题[D]. 上海：上海交通大学，2009

[2] Cazalsa F, Karandeb C. A note on the problem of reporting maximal cliques[J]. Theoretical Computer Science, 2008, 407(3): 564-568

[3] 李敏，王建新，刘彬彬，等. 基于极大团扩展的蛋白质复合物识别算法[J]. 中南大学学报：自然科学版，2010，41(2)：560-565

[4] Cheng J, Zhu L H, Ke Y P, et al. Fast Algorithms for Maximal Clique Enumeration with Limited Memory, 2012[C]// ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. Beijing, 2012: 1240-1248

[5] Skowron A, Rauszer C. The discernibility matrices and functions in information systems[C]// Intelligent Decision Support: Handbook of Applications and Advances to Rough Sets Theory. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992: 331-362

[6] Skowron A, Pawlak Z. Rudiments of rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177(1): 3-27

[7] Skowron A, Pawlak Z. Rough sets and Boolean reasoning[J]. Information Sciences, 2007, 177(1): 41-73

[8] 黄治国，孙伟，吴海涛. 基于差别矩阵的约简树构造方法[J]. 计算机应用，2008，28(6)：1457-1459

[9] Kryszkiewicz M. Comparative study of alternative types of knowledge reduction in inconsistent systems[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2001, 16(1): 105-120

[10] 邓大勇，黄厚宽，李向军. 不一致决策系统中约简之间的比较[J]. 电子学报，2007，35(2)：252-255

[11] Miao D Q, Zhao Y, Yao Y Y, et al. Relative reducts in consistent and inconsistent decision tables of the Pawlak rough set model[J]. Information Sciences, 2009, 179(24): 4140-4150

[12] Zhou J, Miao D Q, Pedrycz W, et al. Analysis of alternative objective functions for attribute reduction in complete decision tables[J]. Soft Computing, 2011, 15(8): 1601-1616

[13] 陈星，林琼，薛颖，等. 利用矩阵求极大相容类的一种方法[J]. 后勤工程学院学报，2010，26(4)：92-96