

# 基于格思想的图结构相似问题的算法

王晓敏<sup>1,2</sup> 苏静<sup>1,2</sup> 姚兵<sup>3</sup>

1 北京大学信息科学技术学院 北京 100871

2 北京大学高可信软件技术教育部重点实验室 北京 100871

3 西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070

(wmxwm0616@163.com)

**摘要** 文中首先给出了顶点撕裂运算与顶点重合运算的定义,基于顶点撕裂连通度的定义证明了连通图的顶点撕裂连通度等价于连通图的连通度;给出了图的 $W$ -相似的定义。其次,给出了图撕裂组以及同构子图相似的定义,介绍了一种特殊图撕裂组和特殊图撕裂组匹配方法。再次,讲述了有关图和图撕裂组的运算和算法,主要有确定图撕裂组的算法、图撕裂收缩算法、图的顶点扩展和收缩算法。然后,给出了图的同构子图相似的基本定理。最后,总结全文并提出了几个值得以后深入研究的问题。

**关键词** 格;图结构相似;撕裂运算;连通度

**中图法分类号** TP311;O.157.5

## Algorithms Based on Lattice Thought for Graph Structure Similarity

WANG Xiao-min<sup>1,2</sup>, SU Jing<sup>1,2</sup> and YAO Bing<sup>3</sup>

1 School of Electronic Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing 100871, China

2 Key Laboratory of High Confidence Software Technologies, Peking University, Beijing 100871, China

3 College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

**Abstract** This paper gives the definition of vertex-splitting operation and vertex-coinciding operation, introduces a new kind of connectivity—vertex-splitting connectivity based on the definition of vertex-splitting operations, proves that vertex-splitting connectivity is equivalent to connectivity of the connected graph, gives the definition of  $W$ -similarity. Secondly, it presents the definition of graph-splitting group and isomorphic subgraphs, and introduces a method for special graph-splitting group and special graph-splitting group matching. Again, it describes the operations and algorithms of graphs and graph-splitting groups, including, deterministic graph-splitting group algorithm, graph-splitting contracting algorithms, vertex expending and contracting algorithm of a graph. Then, it discusses the basic similarities of isomorphic subgraphs of graphs. Finally, it makes a brief conclusion and puts forward a few issues for further study.

**Keywords** Lattice, Graph structure similarity, Splitting operation, Connectivity

## 1 研究简介

图论是一门古老而重要的数学分支,其基本研究对象是图。它的起源较早,人们将1736年认为是图论的元年,因为瑞士数学家Euler使用图对经典的哥尼斯堡七桥问题进行了抽象和论证,由此开创了图论的研究。此后,图论取得了迅猛的发展,使得图论成为了数学分支中一个独立的学科。进而,图论也演变出了许多不同的分支,如基础图论、极值图论、拓扑图论、网络图论、算法图论、代数图论、随机图论、模糊图论、超图论等。近些年,计算机的飞速发展,也使图论大有用武之

地,无论是数学、物理、化学、天文、地理、生物等基础科学,还是信息、交通、战争、安全、经济等应用学科都离不开图论中的理论和技术。

### 1.1 图结构相似的研究

图是一种常见的具有强大表达力的数据结构,因此图常被用来对数据关系进行展示以及对概念进行表示。例如,数据样本之间的相似性可以表示为一个相似图,使得这个图的每个顶点 $v_i$ 代表一个数据样本,则当两个顶点之间的相似度 $s_{ij}$ 为正或大于一个阈值时,顶点 $v_i$ 和顶点 $v_j$ 是连通的,并且边 $v_i v_j$ 被 $s_{ij}$ 加权。在日常的实际应用中,顶点通常用来表示

基金项目:国家自然科学基金重点研发计划(2019YFA0706401);国家自然科学基金重点项目(61632002);国家自然科学基金面上项目(61872166);国家自然科学基金青年项目(61902005,62002002);国家自然科学基金(61662066)

This work was supported by the Major Research Plan of the National Natural Science Foundation of China(2019YFA0706401), Key Program of the National Natural Science Foundation of China(61632002), General Program of the National Natural Science Foundation of China(61872166), Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China(61902005,62002002) and National Natural Science Foundation of China(61662066).

通信作者:苏静(jingsu@pku.edu.cn)

实体,边通常用来表示实体之间的关系,进而形成一个图。一个图的顶点与位置是无关的。图中两个顶点之间的连线与它的长度、曲直或者形状也是无关的。这使得图具有一些非常有趣的性质,如无论如何对其顶点进行旋转、移动,或者镜面对称,都不会改变图中顶点的性质以及相互之间的拓扑联系,即改变后的图与原来的图仍然是同一个图,即拓扑结构相同的图。图的这种拓扑不变性,以及对实体和实体间关系的强适应、易操作、低开销建模性,使得其在实际问题中具有广泛的应用。如软件结构、数据挖掘、化学成分分析、半结构化数据的检索、控制生物性状的基因等。

举例来说,在软件开发过程中,产生的制品(如需求制品、代码制品、软件制品)可以抽象表达成图的形式。例如,需求可以表达成概念图、类图、活动图、状态图等。代码可以表达成控制流图或者程序依赖图。在软件系统结构中,软件结构图可以表示成程序调用关系图(或函数调用关系图)和系统结构图。函数调用关系图或者说是程序调用关系图,都是对源程序中函数关系的一种静态描述,在函数调用关系图中,顶点表示函数,边表示函数之间的调用关系。相关工作主要有法国 LIX 实验室的 Michalis 教授在“图相似性度量与分类”报告中介绍了图结构的相似性度量与分类。Li 等<sup>[2]</sup>给出一种图结构相似性度量方法及其系统,并将其应用于数据挖掘和信息检索领域。他们发现:任何一个图与其他图的相似性数值可以作为一个量化的衡量标准,用于相似性或以图表示形式特征的相似信息搜索查询,也可用于图聚类算法的距离测量,该方法搜索查询的准确度更高。Liu 等<sup>[3]</sup>通过流程图对应的最小宽度优先编码树(BFS)的层次结构,对流程图的各个顶点赋予权值,避免了相关度的节点对相似性度量效果的负面影响,提高了流程图相似性度量方法的精度,大大减少了流程图的节点匹配的数量,提高了流程图相似性度量方法的时间效率。

此外,图核是图相似性计算中一种非常经典的方法。在这类方法中图核的构造非常关键,主要有基于 R-卷积的图核函数、基于圈的图核函数、基于随机游走的图核函数、基于最短路径的图核函数、基于子树的图核函数、基于子图的图核函数等。通常,图核函数  $k: G_1 \times G_2 \rightarrow R$ , 用于测量图之间的相似性。大多数图核基于以下原则:首先需要确定给定图集的子图模式的频率,然后应用核函数的特征属性。目前大多数的图核函数都是基于斯坦福大学的 Hausler 教授于 1999 年提出的 R-卷积理论而构建的<sup>[6]</sup>,该理论是标准的构建图核函数的方法。文献[7]提出基于图的圈模式和树模式的图核。在文献[8]中,Gartner 等提出了一种基于计算两个图结构间共同步数的随机游走核函数。文献[9]和文献[10]提出了一种基于对比两个图结构间最短路径信息的图核函数,即最短路径核。文献[11]中,图核的思想是基于一维 Weisfeiler-Lehman 同构测试算法来寻找一对图结构中同构的子树结构。基于子图结构定义的 R-卷积图核函数的一个经典算法是 graphlet 子图核,其中 graphlet 指图结构的一个小尺寸子图结构,通常包含 3~5 个节点<sup>[12]</sup>。如何设计新的图匹配和图相似算法提高模式识别的精度,依然是相关领域中的理论研究者应该关注的本质问题。图结构相似可以用于社交网络<sup>[13]</sup>、异常检测<sup>[14]</sup>、分子结构<sup>[15]</sup>、数据库中的结构相似<sup>[16]</sup>等。

## 1.2 本文的研究工作

本文利用顶点撕裂运算,将一个连通图  $G$  撕裂成若干个

图撕裂组  $G_k$ ,每个图撕裂组  $G_k$  也叫图基,在图的顶点重合运算下,图基  $G_k$  形成一个叫作图格的图集合。当图格中的一个图是一个软件体系时,图格的图基  $G_k$  就是该软件体系的软件模块组,该图格中的任何两个软件体系具有共同的软件模块组  $G_k$ ,这正是“图结构相似问题”的研究对象之一。本文将给出图结构相似的一个定义,这个定义可以将图结构相似问题的解决归结为寻找图的全图撕裂组。

为推广经典的连通度概念,人们为删去图  $G$  的子集  $S \subset V(G) \cup E(G)$  后的余图  $G-S$  的分支和点割加上一些要求或限制性条件,产生了各种各样的连通度,如限制连通度、额外连通度、超连通度和超边连通度、群连通度、网络模块内连通度和模块间连通度等。因此,本文介绍了顶点撕裂连通度,不同于删边、删顶点的连通度,撕裂连通度保持边数目并增加图的顶点。进而证明,连通图的顶点撕裂连通度等价于连通图的连通度。顶点撕裂连通度和图撕裂组是在运行“顶点撕裂运算”下得到的。

本文给出图撕裂组、同构子图的定义,介绍了一种特殊图撕裂组和特殊图撕裂组匹配的方法,讲述了有关图和图撕裂组的运算和算法,主要有确定图撕裂组的算法,图撕裂组收缩算法,图的顶点扩展、收缩算法。此外,还给出了图的同构子图相似的基本定理。

## 1.3 基本术语

本文采用标准的图论术语和记号,例如简单图  $G$  的顶点集为  $V(G)$ ,边集为  $E(G)$ ,所提及的图均为简单、无向图。没有介绍的图论术语和记号在文献[1]中均可查到。此外,本文要用到下面的概念和术语:记号  $[a, b]$  表示一个非负整数集合  $\{a, a+1, \dots, b\}$  ( $0 \leq a < b$ ),只有一个顶点的图记为  $K_1$ ,只有两个顶点一条边的图记为  $K_2$ ;非负整数集是  $Z^0$ ;顶点互不交的图  $(H_1, H_2, \dots, H_n)$  构成一个图基  $H = (H_1, H_2, \dots, H_n)$ ,其中每个  $H_i$  是无色/着色简单图;一个  $(p, q)$ -图有  $p$  个顶点和  $q$  条边。

给定两个图  $G$  和图  $H$ ,若有映射  $f: V(G) \rightarrow V(H)$ ,使  $uv$  是图  $G$  的一条边当且仅当  $f(u)f(v)$  是图  $H$  的一条边,则称图  $G$  同构于图  $H$ ,记为  $G \cong H$ 。

在文献[4]中, $m$ -维空间  $R^m$  ( $n \leq m$ ) 中的线性无关的  $n$ -维向量  $b_j = (c_{j,1}, c_{j,2}, \dots, c_{j,n})$  组构成一个矩阵  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 。一个格(lattice)定义为:

$$L(B) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i b_i : x_i \in Z, 1 \leq i \leq n \right\} \quad (1)$$

其中, $Z$  是整数集, $n$  是格的阶, $B$  是格的基。格  $L(B)$  是  $n$  个线性无关的  $n$ -维向量的整数线性组合之集。

对于  $\lambda \leq p, \mu \leq q$  和  $2n-2 \leq p, F_{p,q}$  是全体  $\lambda$  个顶点和  $\mu$  条边图之集。将对  $G \in F_{p,q}$  和图基  $H$  实施图运算“ $(\cdot)$ ”的结果记为  $G(\cdot)H = G(\cdot)_{i=1}^n a_i H_i; a_i \in Z^0$ 。文献[5]称式(2)所示的图集合为图格(graphic  $H$  lattice), $H$  是图格基, $p$  是图格的维数, $n$  是图格的阶。此外,当  $(\cdot)_{k=1}^n a_k H_k$  构成图时,集合  $L((\cdot)H) = \{(\cdot)_{k=1}^n a_k H_k, a_k \in X^0, H_k \in H\}$  也是一个图格。

$$L(F_{p,q}(\cdot)H) = \left\{ G(\cdot)_{i=1}^n a_i H_i : a_i \in Z^0, \sum_{i=1}^n a_i \geq 1, G \in F_{p,q} \right\} \quad (2)$$

## 2 新定义、算法、结论

### 2.1 顶点撕裂运算、顶点重合运算及撕裂连通度

在图结构相似研究中,下面的顶点撕裂运算和无公共邻

点的顶点重合运算是一个非常有力的工具。

顶点撕裂运算为“ $\wedge$ ”,顶点重合运算为“ $\odot$ ”。设图  $H$  有两个不相邻的顶点  $u'$  和顶点  $u''$ ,这两个顶点的邻集满足  $N_{e_i}(u') \cap N_{e_i}(u'') = \emptyset$ 。将顶点  $u'$  和顶点  $u''$  重合成一个顶点  $u = u' \odot u''$ ,使得顶点  $u$  的邻点之集  $N_{e_i}(u) = N_{e_i}(u') \cup N_{e_i}(u'')$ ,得到的图记为  $G = H(u' \odot u'')$ 。由  $H$  得到  $G$  的过程叫作顶点重合运算 (non-common adjacent vertex-coinciding operation),如图 1(a)到图 1(b)的过程。注意,顶点重合运算是无公共邻点的顶点重合运算。反之,由  $G$  得到  $H$  的过程叫作顶点撕裂运算(vertex-splitting operation),记为  $H = G \wedge u$ ,如图 1(b)到图 1(a)的过程。

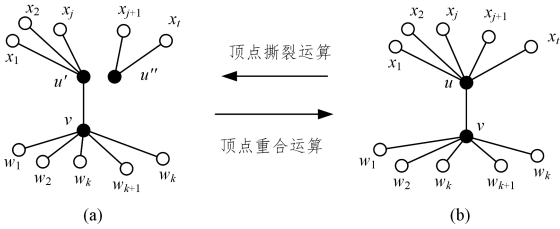


图 1 解释顶点撕裂运算和无公共邻点的顶点重合运算的示意图

Fig. 1 Scheme for illustrating vertex-splitting operation and vertex-coinciding operation

去掉一个连通图  $G$  的最少的顶点数目  $\kappa$ ,使得余图是不连通图,称数  $\kappa$  为连通图  $G$  的连通度(connectivity),记为  $\kappa = \kappa(G)$ 。本文接下来证明了撕裂连通度与连通度之间的关系。

**定理 1** 非完全图的连通图  $G$  的顶点撕裂连通度等价于  $G$  的连通度,即  $\kappa_s(G) = \kappa(G)$ 。

证明:必要性。设连通图  $G$  是  $k$ -连通的,即有  $k$  个顶点的真子集  $S \subset V(G)$ ,使得移走集合  $S$  的  $k$  个顶点后的余图  $G-S$  是不连通图。令  $G_1, G_2, \dots, G_m$  是不连通图  $G-S$  的顶点不交的连通分支,则有以下事实:1)  $m \geq 2$ ; 2) 集合  $S$  中的每个顶点  $x$  必与某个连通分支  $V(G_i) (i \in [1, m])$  的顶点  $u_{x,i}$  相邻,否则存在图  $G$  的另一个顶点真子集  $S \subset V(G)$ ,且  $|S^*| < |S|$ ,使得  $G-S^*$  是不连通的,矛盾; 3) 根据 2),得到图  $G$  的  $m$  个边不交的子图  $H_i (i \in [1, m])$ ,称每个子图  $H_i$  为块,则当

$i \neq j$  时,有  $V(H_i) \cap V(H_j) = S$  和  $\bigcup_{i=1}^m V(H_i) = S$ ,对  $S$  的顶点实施顶点撕裂运算,导致图  $G$  是撕裂  $k$ -连通的,使得顶点撕裂图  $G \wedge S$  有边不交的子图  $H_1, H_2, \dots, H_m$ ; 4) 顶点撕裂图  $G \wedge S$  有边不交的子图  $L_1, L_2, \dots, L_n, n \geq 2$  满足  $L_j = \bigcup_{i=1}^m H_{j,i} (j \in [1, n])$ ,  $\sum_{j=1}^n m_j = m$ ,以及  $V(L_s) \cap V(L_t) = S (s \neq t)$ ;

5) 如果连通图  $G$  是  $k^*$ -连通的,其中  $k^* < k$ ,则有图  $G$  的一个  $k^*$  个顶点的真子集  $X \subset V(G)$ ,对  $X$  的顶点实施一系列的顶点撕裂运算,使得顶点撕裂图  $G \wedge X$  有边不交的子图  $R_1, R_2, \dots, R_a$ ,且当  $i \neq j$  时,  $V(R_i) \cap V(R_j) = X$ 。从而可得  $G-X$  是不连通图,这矛盾于必要性假设。

充分性。假定图  $G$  的撕裂连通度是  $k$ ,也就是说,存在  $V(G)$  的一个  $k$  个顶点的真子集  $Y$ ,使得顶点撕裂图  $G \wedge Y$  有边不交的子图  $G_1', G_2', \dots, G_b'$  且当  $i \neq j$  时,  $V(G_i') \cap V(G_j') = Y$ 。因此,移走真子集  $Y$  的所有顶点后的图  $G-Y$  是不连通图,有分支  $G_j' - Y (j \in [1, b])$ ,说明  $G$  是  $k$ -连通图。如果图  $G$  是  $k'$ -连通图,且  $k' < k$ ,那么根据必要性证明,图  $G$  是撕裂  $k'$ -连通图,这与充分性的假设冲突,证毕。

## 2.2 图的 W-相似定义

本文综合分析图相似研究中已有的事实,给出了广义图相似的概念。

**定义 1** 对连通图  $G_a$  和连通图  $G_b$ ,存在  $W$ -函数  $f$  和相似度量“ $(*)$ ”,使得子图  $L_a \subseteq G_a$  和子图  $L_b \subseteq G_b$  满足  $f(L_a) (*) f(L_b)$ ,则说图  $G_a$  和图  $G_b$  承认  $W$ -相似( $W$ -similarity),记为  $G \approx H$ 。

定义 1 具有如下的基本要素:子图、 $W$ -函数、相似度量、 $W$ -相似。导致  $W$ -相似的“相似度量”是:拓扑结构(图、超图),数学属性(赋权、度序列、矩阵、特征向量、图运算等),以及混合型相似度量:拓扑结构+数学属性。有以下特殊的  $W$ -相似。

**定义 2** 当子图  $L_a \subseteq G_a$  和子图  $L_b \subseteq G_b$  是相互同构时,“相似度量  $(*)$ ”是同构“ $(\cong)$ ”,“ $W$ -函数  $f$ ”是图结构,即  $f(L_a) (\cong) f(L_b)$ ,“ $W$ -相似”是“同构子图相似”(isomorphic subgraph similarity)。这是图相似研究的基本任务之一。

**定义 3** 当图  $G_a$  和图  $G_b$  是赋权图时,子图  $L_a \subseteq G_a$  和子图  $L_b \subseteq G_b$  相互同构,“ $W$ -函数  $f$ ”和“相似度量  $(*)$ ”是“同构和赋权相等”的二元函数,且使得  $f(L_a) (\cong, =) f(L_b)$ ,“ $W$ -相似”是“同构子图赋权相似”(isomorphic subgraph weighted similarity)。

**定义 4** 当图  $G_a$  和图  $G_b$  是着色图时,子图  $L_a \subseteq G_a$  和子图  $L_b \subseteq G_b$  的拓扑编码矩阵  $T_{code}(L_a)$  和  $T_{code}(L_b)$  满足  $T_{code}(L_a)$  相似于  $T_{code}(L_b)$ ,“ $W$ -函数  $f$ ”是拓扑编码矩阵,“相似度量  $(*)$ ”是矩阵等价“ $(\sim)$ ”,即  $T_{code}(L_a) = f(L_a) (\sim) f(L_b) = T_{code}(L_b)$ ,“ $W$ -相似”是“子图拓扑编码矩阵相似”(subgraph Topcode-matrix similarity)。

**定义 5** 对子图  $L_a \subseteq G_a$  和子图  $L_b \subseteq G_b$ ,“ $W$ -函数  $f$ ”是着色数函数,“相似度量  $(*)$ ”是着色数函数相等或近似“ $(=, \approx)$ ”,即  $f(L_a) (=, \approx) f(L_b)$ ,“ $W$ -相似”是“着色子图相似”(coloring subgraph similarity)。

**定义 6** 对子图  $L_a \subseteq G_a$  和子图  $L_b \subseteq G_b$ ,“ $W$ -函数  $f$ ”是“着色数和结构”的二元函数,“相似度量  $(*)$ ”是着色数函数相等和子图同构“ $(=, \cong)$ ”,即  $f(L_a) (=, \cong) f(L_b)$ ,“ $W$ -相似”是同构子图着色相似”(isomorphic subgraph coloring similarity)。

**定义 7** 对子图  $L_a \subseteq G_a$  和子图  $L_b \subseteq G_b$ ,“ $W$ -函数  $f$ ”是子图的相邻矩阵的特征值和特征向量,“相似度量  $(*)$ ”是图谱相等,即  $f(L_a) (=, \approx) f(L_b)$ ,“ $W$ -相似”是“子图图谱相似”(subgraph spectrum similarity)。

**定义 8** 子图  $L_a \subseteq G_a$  的度序列为  $d(L_a) = (d_{a,1}, d_{a,2}, \dots, d_{a,n})$ ,子图  $L_b \subseteq G_b$  的度序列为  $d(L_b) = (d_{b,1}, d_{b,2}, \dots, d_{b,n})$ ,“ $W$ -函数  $f$ ”是度序列  $d(L_a)$  和  $d(L_b)$ ,“相似度量  $(*)$ ”是度序列距离,即度序列间的距离  $D(d(L_a), d(L_b)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (d_{a,i} - d_{b,i})^2} < \epsilon$ ,“ $W$ -相似”是“子图度序列  $\epsilon$ -距离相似”(subgraph degree sequence  $\epsilon$ -distance similarity)。

**定义 9** 对子图  $L_a \subseteq G_a$  和子图  $L_b \subseteq G_b$ ,图运算(加顶点或边、删顶点或边、顶点剖分、顶点撕裂、顶点重合等)存在图  $L^j (j \in [1, m])$ ,“ $W$ -函数  $f$ ”是变换函数  $L^{j+1} = f(L^j) (i \in [0, m-1])$ ,其中  $L_a = L^0$  和  $L_b = L^m$ ,“相似度量  $(*)$ ”是编辑距离  $m$ ,“ $W$ -相似”是“子图  $m$ -可编辑相似”(subgraph  $m$ -edit-able similarity)。

**定义 10** 对子图  $L_a \subseteq G_a$  和子图  $L_b \subseteq G_b$ ,“ $W$ -函数  $f$ ”是

幂律分布函数  $f(L_a) = c_a k^{-\lambda_a}$  和  $f(L_b) = c_b k^{-\lambda_b}$ , “相似度量 ( $*$ )”是极限逼近  $|\lambda_a - \lambda_b| < \epsilon$ , “W-相似”是“子图  $\epsilon$ -无标度相似”(subgraphe-scale-free similarity)。

**定义 11** 同构子图相似的图集合。顶点互不交的无色/着色图  $H_1, H_2, \dots, H_n$  构成一个图基  $\mathbf{H} = (H_1, H_2, \dots, H_n)$ ,  $F_{p,q}$  是顶点数目和边数目分别不大于  $p$  和  $q$  的连通图的集合, 在图运算“( $\cdot$ )”和顶点重合运算“( $\odot$ )”下, 有以下两个图格:

$$L(F_{p,q}(\cdot)\mathbf{H}) = \{G(\cdot) = \prod_{k=1}^n a_k H_k : a_k \in \mathbb{Z}^0, \sum_{k=1}^n a_k \geq 1, H_k \in \mathbf{H}, G \in F_{p,q}\}$$

$$L((\cdot)\mathbf{H}) = \{\prod_{k=1}^n a_k H_k : a_k \in \mathbb{Z}^0, \sum_{k=1}^n a_k \geq 1, H_k \in \mathbf{H}\}$$

图格  $L(F_{p,q}(\cdot)\mathbf{H})$  或图格  $L((\cdot)\mathbf{H})$  中的任何两个图承认图基  $\mathbf{H}$ -相似, 称这两个格为图  $\mathbf{H}$ -基相似格 (graph  $\mathbf{H}$ -base similarity lattice)。当一个图  $G_i \in L(F_{p,q}(\cdot)\mathbf{H})$  或  $G_i \in L((\cdot)\mathbf{H})$  是一个软件体系时, 图基  $\mathbf{H}$  就是软件模块组, 两个软件体系  $G_i$  和  $G_j$  具有共同的软件模块组  $\mathbf{H}$ 。

2.3 同构子图相似定义

2.3.1 图撕裂组, 同构子图相似定义

设对连通图  $G$  进行顶点撕裂运算后, 得到  $n_G$  个互不相同的图撕裂组 (graph-splitting group)  $G_k = (G_{k,1}, G_{k,2}, \dots, G_{k,m_k}) (m_k \geq 2)$ , 使得每个子图  $G_{k,i}$  是连通的, 且至少包含一条边, 即  $|E(G_{k,i})| \geq 1, (k \in [1, n_G])$ , 以及  $E(G_{k,i}) \cap E(G_{k,i'}) = \emptyset (i \neq i')$  和  $E(G) = \bigcup_{k=1}^{n_G} E(G_k)$ 。见图 2 中连通图  $G$  和连通图  $H$  的部分图撕裂组。相反, 对每个图撕裂组  $G_k$  的边不交连通子图  $G_{k,1}, G_{k,2}, \dots, G_{k,m_k}$  运用无公共邻点的顶点重合运算“( $\odot$ )”, 就可得到原来的图  $G$ , 记为  $G = \odot(G_k) = \prod_{i=1}^{m_k} G_{k,i} (k \in [1, n_G])$ 。在一般情形下, 记号  $\prod_{i=1}^{m_k} G_{k,i}$  表示不同构于  $G$  的图, 故有

$$L(\wedge G) = \bigcup_{k=1}^{n_G} \{\prod_{i=1}^{m_k} G_{k,i}\},$$

称它为  $G$ -顶点撕裂准格 ( $G$ -v-splitting quasi-lattice)。图 3 给出了图 2 所示的一个图撕裂组  $G_2$  在顶点重合运算  $\odot$  下构成的图集合  $\{\prod_{i=1}^{m_2} G_{2,i}\} = \{G_{2,1}, G_{2,2}, \dots, G_{2,19}\}$ 。然而, 确定  $G$ -顶点撕裂准格的全体成员是困难的, 因为涉及到图同构这个 NP-完全问题。

再对另外一个连通  $H$  进行顶点撕裂运算后, 得到  $n_H$  个互不相同的图撕裂组  $H_j = (H_{j,1}, H_{j,2}, \dots, H_{j,n_j}) (n_j \geq 2)$ , 使得每个子图  $H_{j,r}$  是连通的, 且至少包含一条边, 且有  $E(H_{j,r}) \cap E(H_{j,s}) = \emptyset (r \neq s)$ , 则得到  $H = \odot(H_j) = \prod_{i=0}^{n_j} H_{j,i} (j \in [1, n_H])$ , 以及  $E(H) = \bigcup_{k=1}^{n_H} E(H_k)$  和  $H = \odot(H_k) = \prod_{i=1}^{n_j} H_{j,i} (j \in [1, n_H])$ 。同样, 有  $H$ -顶点撕裂准格 ( $H$ -v-splitting quasi-lattice)  $L(\wedge H) = \bigcup_{j=1}^{n_H} \{\prod_{i=1}^{n_j} H_{j,i}\}$ , 以及  $H \in L(\wedge H)$ 。

下面给出图结构的相似研究中的同构子图相似定义。  
**定义 12** 设连通图  $G$  有  $n_G$  个图撕裂组  $G_k = (G_{k,1}, G_{k,2}, \dots, G_{k,m_k}) (m_k \geq 2)$ , 连通图  $H$  有  $n_H$  个图撕裂组  $H_j = (H_{j,1}, H_{j,2}, \dots, H_{j,n_j}) (n_j \geq 2)$ 。如果图撕裂组  $G_k$  与图撕裂组  $H_j$  具有非  $K_2$  的同构连通子图  $G_{k,i}$  和  $H_{j,s}$ , 即存在同构函数  $f$ , 使得  $f(G_{k,i}) (\cong) f(H_{j,s})$ , 则说图  $G$  和图  $H$  承认同构子图相似 (isomorphic subgraph similarity)。

图论中有很多漂亮的定理可以运用到图的同构子图相似研究中, 使得连通图  $G$  和连通图  $H$  具有如下的  $W$ -相似。

图论中有很多漂亮的定理可以运用到图的同构子图相似研究中, 使得连通图  $G$  和连通图  $H$  具有如下的  $W$ -相似。

结构相似 1 若两个图的最小度  $\delta(G) \geq \frac{p}{2}$  和  $\delta(H) \geq \frac{p}{2}$ , 其中  $p = |V(G)| = |V(H)|$ , 则连通图  $G$  和连通图  $H$  具有  $p$  个顶点的哈密尔顿圈, 则说图  $G$  和图  $H$  承认  $p$ -哈密尔顿圈相似。

结构相似 2 若连通图  $G$  和连通图  $H$  均无奇圈, 则图  $G$  和图  $H$  承认偶图相似。

结构相似 3 若连通图  $G$  和连通图  $H$  均无奇度顶点, 则图  $G$  和图  $H$  承认 Euler-图相似。

结构相似 4 若连通图  $G$  和连通图  $H$  均为  $k$ -连通图, 则图  $G$  和图  $H$  承认  $k$ -连通相似。因为  $k$ -连通图的任何两个顶点  $u, v$  被  $k$  条内部不交的  $(u, v)$ -路连接, 则图  $G$  和图  $H$  承认  $(u, v)$ - $k$ -内部不交路相似。

然而, 承认  $p$ -哈密尔顿圈相似的两个图的边数目可能相差很大, 其他的几个结构相似也会出现此现象。需要在图的顶点和边数目上附加合适的“相似度量”, 才能使得承认  $W$ -相似的两个图在结构上接近达到较高度的相似。故, 可对定义 2 进行进一步细化, 得到要求更高的同构子图相似。此外, 定义 2 指明了图结构相似问题的解决主要依赖寻找图的全体图撕裂组。然而, 寻找一个连通图的全体图撕裂组是 NP-完全问题。

图 2 给出了两个连通图的部分图撕裂组。连通图  $G$  和连通图  $H$  的一个图撕裂组匹配  $(G_k, H_j)$  由图撕裂组  $G_k$  与图撕裂组  $H_j$  构成, 设图撕裂组  $G_k$  的非  $K_2$  的边不交连通子图  $G_{k,i_1}, G_{k,i_2}, \dots, G_{k,i_d}$  与图撕裂组  $H_j$  的非  $K_2$  的边不交连通子图  $H_{j,i_1}, H_{j,i_2}, \dots, H_{j,i_d}$  分别同构, 即  $G_{k,i_s} \cong H_{j,i_s} (s \in [1, d])$ 。图撕裂组匹配  $(G_k, H_j)$  中非  $K_2$  的同构连通子图的个数  $d$  是最大的, 特记为  $d = m(G_k, H_j)$ , 这些非  $K_2$  的同构连通子图的顶点数目之和与边数目之和分别记为:

$$m_v(G_k, H_j) = \sum_{s=1}^d |V(G_{k,i_s})| = \sum_{s=1}^d |V(H_{j,i_s})|$$

$$m_e(G_k, H_j) = \sum_{s=1}^d |E(G_{k,i_s})| = \sum_{s=1}^d |E(H_{j,i_s})|$$

则说连通图  $G$  和连通图  $H$  承认非  $K_2$  的同构子图相似。见图 2 中连通图  $G$  和连通图  $H$  的图撕裂组匹配  $(G_j, H_j) (j \in [1, 9])$ 。定义如下的新参数。

(1) 令  $B_{lock} = \{m(G_k, H_j) : k \in [1, n_G], j \in [1, n_H]\}$ , 则非  $K_2$  的最多同构子图数目  $N_{ax}(G, H) = \max B_{lock}$  和非  $K_2$  的最少同构子图数目  $n_{in}(G, H) = \min B_{lock}$ 。在图 2 所示的图撕裂组匹配中, 非  $K_2$  的最少同构子图数目  $n_{in}(G, H) = 1 = m(G_3, H_3) = m(G_5, H_5) = m(G_8, H_8)$ , 以及非  $K_2$  的最多同构子图数目  $N_{ax}(G, H) = 2 = m(G_2, H_2) = m(G_4, H_4) = m(G_6, H_6) = m(G_7, H_7) = m(G_9, H_9)$ 。

(2) 再令  $B_{lock}^e = \{m_e(G_k, H_j) : k \in [1, n_G], j \in [1, n_H]\}$ , 有非  $K_2$  的最多同构子图顶点数目和边数目是  $M_{lock}^v(G, H) = \max B_{lock}^v$ , 非  $K_2$  的最少同构子图顶点数目和边数目为  $m_{in}^e(G, H) = \min B_{lock}^e (\epsilon = v, e)$ 。

在图 2 所示的图撕裂组匹配中, 非  $K_2$  的最少同构子图顶点数目为  $n_{in}^v(G, H) = 6 = m_v(G_8, H_8)$ ; 非  $K_2$  的最多同构子图顶点数目是  $M_{ax}^v(G, H) = 9 = m_v(G_6, H_6) = m_v(G_9, H_9)$ ; 非  $K_2$  的最少同构子图边数目是  $m_{in}^e(G, H) = 6 = m_e(G_5, H_5) = m_e(G_8, H_8)$ ; 非  $K_2$  的最多同构子图边数目为  $M_{ax}^e(G, H) = 8 = m_e(G_4, H_4) = |E(G)| = |E(H)|$ 。同构子图相似的整体参数分别如式(3)和式(4)所示:

$$D_v^{df}(G, H) = \frac{M_{ax}^v(G, H)}{\min\{|V(G)|, |V(H)|\}} \quad (3)$$

$$D_e^{df}(G, H) = \frac{M_{ax}^e(G, H)}{\min\{|E(G)|, |E(H)|\}}$$

$$r_v^{atio}(G, H) = \frac{2M_{ax}^v(G, H)}{|V(G)| + |V(H)|} \quad (4)$$

$$r_e^{atio}(G, H) = \frac{2M_{ax}^e(G, H)}{|E(G)| + |E(H)|}$$

关于定义 2,有如下的事实:

(1)当 $(r_v^{atio}(G, H), r_e^{atio}(G, H)) = (1, 1)$ 时,连通图  $G$  同

构于连通图  $H$ ,即  $G \cong H$ .

(2)当 $(D_v^{df}(G, H), D_e^{df}(G, H)) = (1, 1)$ 时,且 $|V(G)| = \min\{|V(G)|, |V(H)|\}$ 和 $|E(G)| = \min\{|E(G)|, |E(H)|\}$ ,则连通图  $G$  是连通图  $H$  的一个子图,即  $G \subseteq H$ .

(3)每个图撕裂组匹配 $(G_k, H_j)$ 的 3 个指标 $m(G_k, H_j)$ ,  $m_v(G_k, H_j)$ ,  $m_e(G_k, H_j)$ ,如果有另外一个图撕裂组匹配 $(G_r, H_s)$ ,使得 $m(G_k, H_j) \leq m(G_r, H_s)$ ,  $m_v(G_k, H_j) \leq m_v(G_r, H_s)$ ,  $m_e(G_k, H_j) \leq m_e(G_r, H_s)$ ,则说图撕裂组匹配 $(G_k, H_j)$  优于图撕裂组匹配 $(G_r, H_s)$ ,其中 $k \neq r, j \neq s$ .

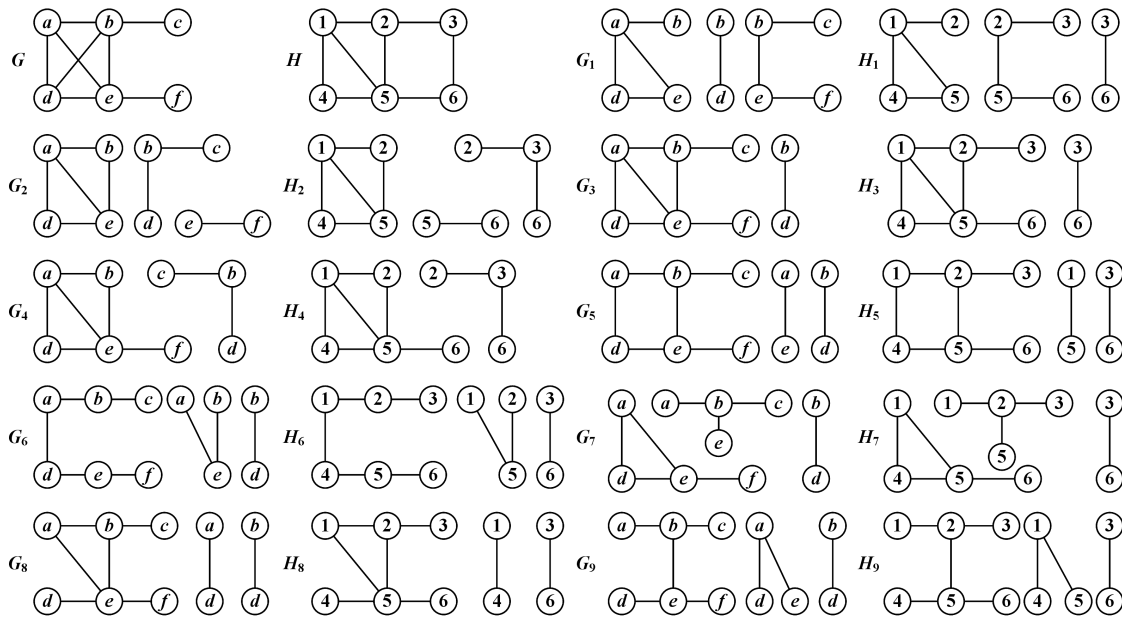


图 2 对连通图  $G$  和连通图  $H$  实施顶点撕裂运算得到的部分图撕裂组

Fig. 2 Part of splitting graph groups obtained by the vertex-splitting operation on two graphs  $G$  and  $H$

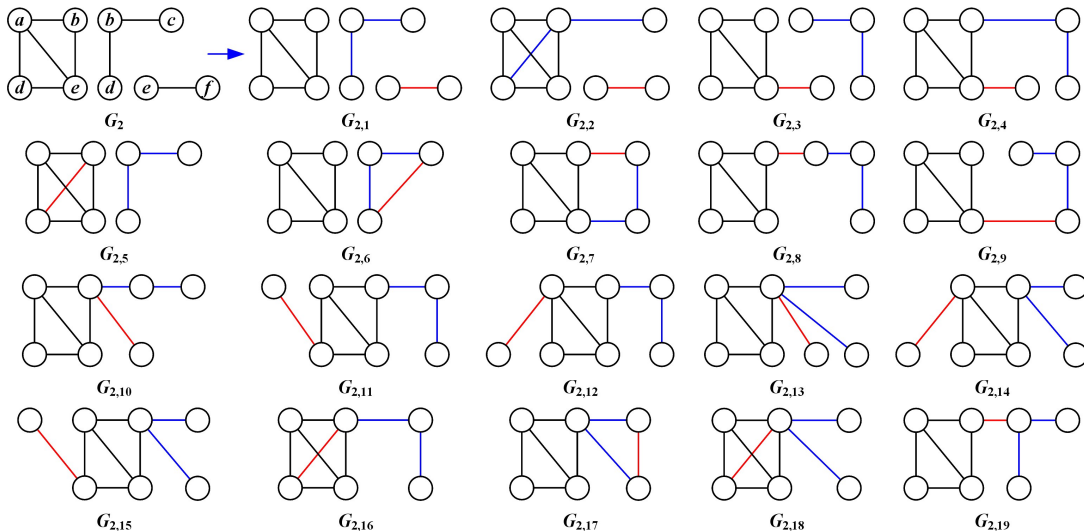


图 3 图 2 中的图撕裂组  $G_2$  在顶点重合运算“ $\odot$ ”下构成的图集合 $\{G_{2.1}, G_{2.2}, \dots, G_{2.19}\}$

Fig. 3 Graph set  $\{G_{2.1}, G_{2.2}, \dots, G_{2.19}\}$  obtained by doing the vertex-coinciding operation on a graph group  $G_2$  shown in Fig. 2

2.3.2 特殊图撕裂组和特殊图撕裂组匹配

定义 13 设连通图  $G$  的图撕裂组集为  $S_{plit}(G) = \{G_k = (G_{k,1}, G_{k,2}, \dots, G_{k,m_k}) : (m_k \geq 2), k \in [1, n_G]\}$ , 连通图  $H$  的图撕裂组集为  $S_{plit}(H) = \{H_j = (H_{j,1}, H_{j,2}, \dots, H_{j,n_j}) : (n_j \geq 2), j \in [1, n_H]\}$ ,有如下的特殊图撕裂组和特殊的图撕裂组匹配。

特殊 1 如果每个连通子图  $G_{k,i} (i \in [1, m_k])$  满足  $|V(G_{k,i})| = 2$ ,则称  $G_k$  为平凡图撕裂组(trivial graph-splitting group)。

特殊 2 如果某个连通子图  $G_{k,i}$  满足  $|V(G_{k,i})| \geq 3$ ,则称  $G_k$  为正常图撕裂组(normal graph-splitting group)。

特殊 3 如果  $|V(G_{k,1})| \geq 3$ ,其他的连通子图满足  $|V$

$(G_{k,i}) = 2 (i \in [1, m_k])$ , 则称  $G_k$  为唯一非  $K_2$  图撕裂组 (unique non- $K_2$  graph-splitting group)。

特殊 4 如果每个连通子图满足  $|V(G_{k,i})| \geq 3, (i \in [1, m_k])$ , 则称  $G_k$  为非  $K_2$  图撕裂组 (non- $K_2$  graph-splitting group)。

特殊 5 如果非  $K_2$  图撕裂组  $G_k$  的每个连通子图  $G_{k,i} (i \in [1, m_k])$  是一条路, 则称  $G_k$  为纯路图撕裂组 (pure-path graph-splitting group)。

特殊 6 如果非  $K_2$  图撕裂组  $G_k$  的每个连通子图  $G_{k,i} (i \in [1, m_k])$  是一个圈, 则称  $G_k$  为纯圈图撕裂组 (pure-cycle graph-splitting group)。

特殊 7 如果非  $K_2$  图撕裂组  $G_k$  的每个连通子图  $G_{k,i} (i \in [1, m_k])$  是一棵树, 则称  $G_k$  为树图撕裂组 (tree-type graph-splitting group)。如果每棵树的直径  $D(G_{k,i}) \geq 3$ , 则称  $G_k$  为纯树图撕裂组 (pure tree-type graph-splitting group)。

特殊 8 如果图撕裂组  $G_k$  的每个连通子图  $G_{k,i} (i \in [1, m_k])$  是一颗  $v(k, i) = |V(G_{k,i})|$  个顶点的星  $K_{v(k,i)}$ , 且有星  $K_{v(k,i)}$  满足  $v(k, i) \geq 2$ , 则称  $G_k$  为星图撕裂组 (star graph-splitting group)。

特殊 9 如果图撕裂组  $G_k$  的每个连通子图  $G_{k,i} (i \in [1, m_k])$  是一个哈密尔顿图, 则称  $G_k$  为哈密尔顿图撕裂组 (hamiltonian graph-splitting group)。

特殊 10 如果每个连通子图  $G_{k,i} (i \in [1, m_k])$  的顶点度数均为偶数, 则称  $G_k$  为欧拉图撕裂组 (Euler's graph-splitting group)。

特殊 11 如果任何两个连通子图满足  $G_{k,i} \neq G_{k,j} (i \neq j, i, j \in [1, m_k])$ , 则称  $G_k$  为互不同构图撕裂组 (mutually non-isomorphic graph-splitting group)。

特殊 12 如果连通子图满足  $|E(G_{k,i})| > |E(G_{k,j})|, j \in [1, m_k - 1]$ , 则称  $G_k$  为边严格递减图撕裂组 (edge strictly-decreasing graph-splitting group)。

特殊 13 如果连通子图满足  $|V(G_{k,i})| > |V(G_{k,j})|, j \in [1, m_k - 1]$ , 则称  $G_k$  为顶点严格递减图撕裂组 (vertex strictly-decreasing graph-splitting group)。

特殊 14 如果两个正常图撕裂组  $G_k$  和  $H_k$  满足  $G_{k,i} \cong H_{j,i} (i \in [1, m_k] = [1, n_j])$ , 把这个事实记为  $G_k \cong H_k$ , 并称  $(G_k, H_k)$  是一个全同构图撕裂组匹配 (totally isomorphic graph-splitting group matching)。

特殊 15 如果有  $G_k \cong H_k$ , 且平凡图撕裂组  $G_k$  和平凡图撕裂组  $H_k$  都是  $W$ -图撕裂组, 则称  $(G_k, H_k)$  为全  $W$ -图撕裂组匹配 (totally  $W$ -graph-splitting group matching)。

**定理 2** 设  $G$  和  $H$  是两个连通  $(p, q)$ -图, 按照定义 3 中的特殊图撕裂组和特殊图撕裂组匹配定义, 有如下的结论。

结论 1 每个欧拉图有纯圈图撕裂组、欧拉图撕裂组。

结论 2 每个至少有 3 条边的连通图有唯一非  $K_2$  图撕裂组。

结论 3 若连通图  $G$  和连通图  $H$  同构, 则有一一映射  $\varphi: S_{plit}(G) \rightarrow S_{plit}(H)$ , 使得  $S_{plit}(G) \ni G_k (\cong) \varphi(G_k) \in S_{plit}(H)$ ,  $(G_k, \varphi(G_k))$  是全同构图撕裂组匹配。

结论 4 每个至少有 3 条边的连通图有星图撕裂组。

结论 5 若连通图  $G$  和连通图  $H$  的顶点度数至少为 3,

且  $|E(G)| = |E(H)|$ , 则图  $G$  和图  $H$  承认唯一非  $K_2$  同构子图相似, 且有全同构图撕裂组匹配。

证明:(1)用图论中的 Euler 定理即可证得结论 1。也可以先从连通图  $G$  中运用顶点撕裂运算撕裂出一个圈  $C$ , 然后对余图  $G-E(C)$  运用数学归纳法证得结论 1。

(2)运用顶点撕裂运算先从连通图  $G$  中撕裂出一颗星  $K_{1,2}$ , 则余图  $G-E(K_{1,2})$  的边集合为  $E^* = \{u_i v_i : i \in [1, q-2]\}$ , 令  $G_1 = K_{1,2}, G = u_i v_i (i \in [1, q-2])$ , 得到连通图  $G$  的一个唯一非  $K_2$  图撕裂组。

(3)结论 3 可由同构定义直接推出。

(4)运用顶点撕裂运算先从连通图  $G$  中撕裂出一颗星  $K_{1,d}$ , 然后对余图  $G-E(K_{1,d})$  运用数学归纳法证得结论 4。

(5)运用结论 4 的证明方法即可证得结论 5。

## 2.4 图和图撕裂组的运算、算法

### 2.4.1 确定图撕裂组的算法

计算一个图的  $G$ -顶点撕裂准格的元素个数是困难的, 要涉及到子图同构这个 NP 完全的问题, 还要涉及到确定图的全图撕裂组。确定图的图撕裂组算法如算法 1 所示。

**算法 1** 最大分支顶点撕裂算法 (MAXIMUM-COMPO-NENT v-splitting algorithm)

输入: 具有撕裂连通度  $\kappa_s(G) = c$  连通图  $G$ , 即有分支数  $\omega_s(G) = 1$  和一个正整数  $k$

输出: 连通图  $G$  的一个最大分支图撕裂组 (MAXIMUM-COMPO-NENT graph-splitting group)  $G_k = (G_{k,1}, G_{k,2}, \dots, G_{k,m_k}) (m_k \geq 2)$

步骤 1 选取连通图  $G$  的一个具有  $c$  顶点的顶点子集  $X_1$ , 使得图  $G_1 \leftarrow G \wedge X_1$  不连通, 即有分支数  $\omega_s(G_1) \geq 2$ 。设不连通图  $G_1$  的分支为  $G_{1,1}, G_{1,2}, \dots, G_{1,b_1} (b_1 \geq 2)$ 。

步骤 2 选取不连通图  $G_j$  的一个顶点最大分支  $G_{j,r}$ , 使得  $|V(G_{j,r})| > |V(G_{j,i})| (i \in [1, b_j])$ , 且  $\kappa_s(G_{j,r}) = c_j$ 。选取连通子图  $G_{j,r}$  的一个顶点子集  $X_{j+1}, |X_{j+1}| = c_j$ , 得连通图  $G_{j+1} \leftarrow G_j \wedge X_{j+1} = G_{j,r} \wedge X_{j+1}$ 。设不连通图  $G_{j+1}$  的分支为  $G_{j+1,1}, G_{j+1,2}, \dots, G_{j+1,b_{j+1}} (b_{j+1} \geq 2)$ 。显然,  $\{G_{j,1}, G_{j,2}, \dots, G_{j,b_j}\} \subset \{G_{j+1,1}, G_{j+1,2}, \dots, G_{j+1,b_{j+1}}\}$ 。

步骤 3 如果  $j < k$ , 则转向步骤 2, 否则转向步骤 4。

步骤 4 返回一个最大分支图撕裂组  $G_k = (G_{k,1}, G_{k,2}, \dots, G_{k,m_k}) (m_k \geq 2)$ 。

**算法 2** 随机子图撕裂算法 (RANDOM-SUBGRAPH-SPLITTING Algorithm)

输入: 连通图  $G$ , 一个正整数  $k$

输出: 连通图  $G$  的一个具有随机子图  $G_{1,1}, G_{2,1}, \dots, G_{k,1}$  的图撕裂组

步骤 1 随机选取连通图  $G$  的一个连通子图  $G_{1,1}$ , 用顶点撕裂运算将连通子图  $G_{1,1}$  从连通图  $G$  中撕裂出来, 得余图  $G_1 \leftarrow G \wedge V(G_{1,1})$ 。

步骤 2 随机选取图  $G_j = G_{j-1} \wedge V(G_{j-1})$  的一个连通子图  $G_{j+1,1}$ , 用顶点撕裂运算将连通子图  $G_{j+1,1}$  从图  $G_j$  中撕裂出来, 得余图  $G_{j+1} \leftarrow G_j \wedge V(G_{j+1,1})$ 。

步骤 3 如果  $j < k$ , 则转向步骤 2, 否则转向步骤 4。

步骤 4 返回具有随机子图  $G_{1,1}, G_{2,1}, \dots, G_{k,1}$  的一个图撕裂组。

**算法 3** 加边迭代算法 (ADDING-EDGE Iteration Algorithm)

输入: 加边连通图  $G = L + uv$ , 以及连通图  $L$  的图撕裂组集  $S_{plit}(L) =$

$\{L_j = (L_{j,1}, L_{j,2}, \dots, L_{j,n_j}) : n_j \geq 2, j \in [1, n_L]\}$

输出: 连通图  $G$  的图撕裂组集  $S_{plit}(G)$

步骤 1 对  $j \in [1, n_L]$ , 构造图撕裂组  $L_j^1 = (L_{j,1}^1, L_{j,2}^1, \dots, L_{j,n_j}^1, L_{j,n_j+1}^1)$ , 其中  $L_{j,i}^1 = L_{j,i} (i \in [1, n_j]), L_{j,n_j+1}^1 = uv$ .

步骤 2 对  $j \in [1, n_L]$ , 构造图撕裂组  $L_j^2 = (L_{j,1}^2, L_{j,2}^2, \dots, L_{j,n_j}^2)$ , 其中  $L_{j,i}^2 = L_{j,i} (i \in [1, n_j], i \neq s)$ , 将边  $uv$  的端点  $u$  与连通子图  $L_{j,s}$  的顶点  $u$  重合成一个顶点, 得到的连通子图记为  $L_{j,s}^2 = L_{j,s} \odot uv$ .

步骤 3 对  $j \in [1, n_L]$ , 构造图撕裂组  $L_j^3 = (L_{j,1}^3, L_{j,2}^3, \dots, L_{j,n_j}^3)$ , 其中  $L_{j,i}^3 = L_{j,i} (i \in [1, n_j], i \neq r)$ , 将边  $uv$  的端点  $v$  与连通子图  $L_{j,r}$  的顶点  $v$  重合成一个顶点, 得到的连通子图记为  $L_{j,s}^3 = L_{j,s} \odot vu$ .

步骤 4 对每一个图撕裂组  $L_j \in S_{\text{plit}}(L) (i \in [1, n_L])$ , 有以下两种情形:

4.1 不妨设  $j \in [1, n_L']$ , 连通子图  $L_{j,i}$  包含顶点  $u$  和顶点  $v$ , 则给连通子图  $L_{j,i}$  添加边  $uv$ , 得到连通子图  $L_{j,i} + uv$ , 构造图撕裂组  $L_j^4 = (L_{j,1}^4, L_{j,2}^4, \dots, L_{j,n_j}^4)$ .

4.2 不妨设  $j \in [n_L' + 1, n_L]$ , 连通子图  $L_{j,s}$  包含顶点  $u$ , 连通子图  $L_{j,r}$  包含顶点  $v$ , 不妨设  $s = n_j - 1$  和  $r = n_j$ . 添加边  $uv$ , 将  $L_{j,s}$  的顶点  $u$  和  $L_{j,r}$  的顶点  $v$  连接在一起, 得到的图记为  $L_{j,n_j-1} - L_{j,n_j}$ . 构造图撕裂组  $L_j^5 = (L_{j,1}^5, L_{j,2}^5, \dots, L_{j,n_j-2}^5, L_{j,n_j-1}^5)$ , 其中  $L_{j,i}^5 = L_{j,i} (i \in [1, n_j - 2]), L_{j,n_j-1}^5 = L_{j,n_j-1} \odot L_{j,n_j}$ .

步骤 5 返回连通图  $G$  的图撕裂组集.

$$S_{\text{plit}}(G) = \{L_j^4 : j \in [1, n_L']\} \cup \{L_j^5 : j \in [n_L' + 1, n_L]\} \cup \left( \bigcup_{k=1}^3 \{L_j^k : j \in [1, n_L]\} \right) \quad (5)$$

加边迭代算法的复杂度是  $O(n_L^5)$ , 根据此算法, 可得出以下结论.

**引理 1** 如果每棵树  $T$  的图撕裂组集  $S_{\text{plit}}(T)$  确定, 则任何连通图  $G$  的图撕裂组集  $S_{\text{plit}}(G)$  也确定.

**证明:** 设树  $T = G^0$  的图撕裂组集  $S_{\text{plit}}(G^0) = \{G_j^0 = (G_{j,1}^0, G_{j,2}^0, \dots, G_{j,n(0,j)}^0) : n(0, j) \geq 2, j \in [1, n(G^0)]\}$  给树添加一条边  $u_1 v_1$ , 得到一个加边连通图  $G^1 = G^0 + u_1 v_1$ . 对连通图  $G^0$  实施加边迭代算法, 得到连通图  $G^1$  的图撕裂组集  $S_{\text{plit}}(G^1)$ . 继续下去, 得到加边连通图  $G^k = G^{k-1} + u_k v_k$ , 其中连通图  $G^{k-1}$  的图撕裂组集  $S_{\text{plit}}(G^{k-1})$  确定. 因此, 加边连通图  $G^k$  的图撕裂组集  $S_{\text{plit}}(G^k)$  可对连通图  $G^{k-1}$  实施加边迭代算法而得到. 引理 1 得证.

**算法 4** 加叶子迭代算法 (ADDING-LEAF Iteration Algorithm)

输入: 加叶子连通图  $H = L \odot xy, V(H) \setminus V(L) = \{y\}$ , 以及连通图  $L$  的图撕裂组集  $S_{\text{plit}}(L) = \{L_j = (L_{j,1}, L_{j,2}, \dots, L_{j,n_j}) : n_j \geq 2, j \in [1, n_L]\}$

输出: 连通图  $H$  的图撕裂组集  $S_{\text{plit}}(H)$

步骤 1 对  $j \in [1, n_L]$ , 构造图撕裂组  $L_j^1 = (L_{j,1}^1, L_{j,2}^1, \dots, L_{j,n_j}^1, L_{j,n_j+1}^1)$ , 其中  $L_{j,i}^1 = L_{j,i} (i \in [1, n_j]), L_{j,n_j+1}^1 = K_{1,1}$ , 以及  $E(K_{1,1}) = \{uv\}$ .

步骤 2 对  $j \in [1, n_L]$ , 构造图撕裂组  $L_j^2 = (L_{j,1}^2, L_{j,2}^2, \dots, L_{j,n_j}^2)$ , 其中  $L_{j,i}^2 = L_{j,i} (i \in [1, n_j], i \neq s)$ , 将边  $xy$  的端点  $x$  与连通子图  $L_{j,s}$  的顶点  $x$  重合成一个顶点, 得到的连通子图记为  $L_{j,s}^2 = L_{j,s} \odot xy$ .

步骤 3 返回连通图  $H$  的图撕裂组集  $S_{\text{plit}}(H) = J_1 \cup J_2, J_k = \{L_j^k : j \in [1, n_L]\} (k=1, 2)$ .

**引理 2** 每棵树  $T$  的图撕裂组集  $S_{\text{plit}}(T)$  可以由加叶子迭代算法和星树的图撕裂组集确定.

根据引理 1、引理 2、加叶子迭代算法和加边迭代算法可得定理 3.

**定理 3** 每个连通图  $G$  包含一个连通子图  $G_0$ , 且图撕裂组集  $S_{\text{plit}}(G_0)$  确定, 则对图  $G_0$  进行加顶点、加边后得到连通图  $G$ , 并在多项式时间内确定图撕裂组集  $S_{\text{plit}}(G)$ .

### 2.4.2 图撕裂组收缩算法

图撕裂组收缩算法 (Graph-splitting Group-contracting Algorithm) 的定义如下: 对连通图  $G$  的一个图撕裂组  $G_{k_1} = (G_{k_1,1}, G_{k_1,2}, \dots, G_{k_1,m_{k_1}})$ : ( $m_{k_1} \geq 2, k_1 \in [1, n_G]$ ), 设每个连通子图  $G_{k_1,i}$  在连通图  $G$  中与顶点集  $X_{k_1,i}$  中的顶点相邻, 则可做子图收缩运算: 将每个连通子图  $G_{k_1,i}$  收缩成一个顶点  $w_{k_1,i}$ , 用边将顶点集  $X_{k_1,i}$  中的每个顶点分别与顶点  $w_{k_1,i}$  连接, 如果顶点集  $X_{k_1,i}$  中的某些顶点是其他连通子图  $G_{k_1,r} (r \neq i)$  的顶点, 则将顶点  $w_{k_1,i}$  与顶点  $w_{k_1,r}$  用边相连, 得到的图撕裂组收缩连通图记为  $C_1^m(k_1) = G \triangleleft G_{k_1}$ , 这是对连通图  $G$  的一个撕裂组  $G_{k_1}$  的图撕裂组变换 (Graph-splitting Group Transformation), 记为  $G \Rightarrow C_1^m(k_1)$ . 设连通图  $C_1^m(k_1)$  的一个图撕裂组  $G_{k_2}^1 = (G_{k_2,2,1}^1, G_{k_2,2,2}^1, \dots, G_{k_2,2,m_{k_2}^1}^1), k_2 \in [1, n_{C_1^m(k_1)}]$ , 且每个连通图  $G_{k_2,i}^1$  在连通图  $C_1^m(k_1)$  中与顶点集  $X_{k_2,i}^1$  中的顶点相连. 如果  $m_{k_2}^1 \geq 2$ , 则可对图撕裂组  $G_{k_2}^1$  的每个连通图  $G_{k_2,i}^1$  做子图收缩运算, 得到另一个连通图  $C_2^m(k_1, k_2)$ , 记为  $G \Rightarrow C_2^m(k_1, k_2)$ . 如此进行下去, 得到连通图序列  $\{C_s^m(k_1, k_2, \dots, k_s)\}_{s=1}^A$ , 记为  $G \Rightarrow C_s^m(k_1, k_2, \dots, k_s) (s \in [1, A])$ . 连通图  $C_1^m(k_1)$  的顶点数目为:

$$\begin{aligned} |V(C_1^m(k_1))| &= |V(G)| + m_{k_1} - \sum_{i=1}^{m_{k_1}} |V(G_{k_1,i})| \leq |V(G)| + \\ &= |V(G)| - 2m_{k_1} \end{aligned} \quad (6)$$

连通图  $C_1^m(k_1)$  的边数目为  $|E(C_1^m(k_1))| = |E(G)| - \sum_{i=1}^{m_{k_1}} |E(G_{k_1,i})|$ . 注意,  $|E(C_1^m(k_1))|$  可能为负数. 进一步, 连通图  $C_1^m(k_1, k_2)$  的顶点数目  $|V(C_1^m(k_1, k_2))|$  满足:

$$\begin{aligned} |V(C_1^m(k_1, k_2))| &= |V(C_1^m(k_1))| + m_{k_1}^1 - \sum_{i=1}^{m_{k_1}^1} |V(G_{k_1,i}^1)| \\ &\leq |V(C_1^m(k_1))| + m_{k_1}^1 - 2m_{k_1}^1 \\ &= |V(C_1^m(k_1))| - m_{k_1}^1 \end{aligned} \quad (7)$$

连通图  $C_1^m(k_1, k_2)$  的边数目  $|E(C_1^m(k_1, k_2))|$  满足:

$$|E(C_1^m(k_1, k_2))| = |E(C_1^m(k_1))| - \sum_{i=1}^{m_{k_1}^1} |E(G_{k_1,i}^1)|$$

得连通图  $C_{r+1}^m(k_1, k_2, \dots, k_{r+1}) (k_{r+1} \in [1, n_{C_{r+1}^m(k_1, k_2, \dots, k_{r+1})}])$  的边数目  $|V(C_{r+1}^m(k_1, k_2, \dots, k_{r+1}))|$  和它的顶点数目  $|E(C_{r+1}^m(k_1, k_2, \dots, k_{r+1}))|$  的迭代公式分别为:

$$\begin{aligned} |E(C_{r+1}^m(k_1, k_2, \dots, k_{r+1}))| &= |E(C_1^m(k_1, k_2, \dots, k_r))| - \\ &= \sum_{i=1}^{m_{k_r}^r} |E(G_{k_r,i}^r)| \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} |V(C_1^m(k_1, k_2, \dots, k_{r+1}))| &= |V(C_r^m(k_1, k_2, \dots, k_r))| + m_{k_r}^r - \sum_{i=1}^{m_{k_r}^r} |V(G_{k_r,i}^r)| \\ &\leq |V(C_r^m(k_1, k_2, \dots, k_r))| + m_{k_r}^r - 2m_{k_r}^r \\ &= |V(C_1^m(k_1, k_2, \dots, k_r))| - m_{k_r}^r \\ &= |V(C_1^m(k_1, k_2, \dots, k_r))| - m_{k_r}^r \end{aligned} \quad (9)$$

解释子图收缩运算的例子如图 4 和图 5 所示.

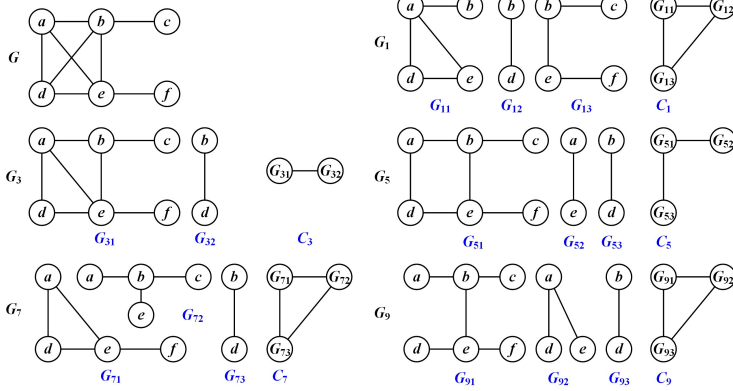


图4 对图  $G$  的 5 个图撕裂组实施图撕裂组收缩算法:  $G \Rightarrow G_k (k=1, 3, 5, 7, 9)$

Fig. 4 Conducting graph-splitting group-contracting algorithm to five graph-splitting groups of the graph  $G \Rightarrow G_k$  with  $k=1, 3, 5, 7, 9$

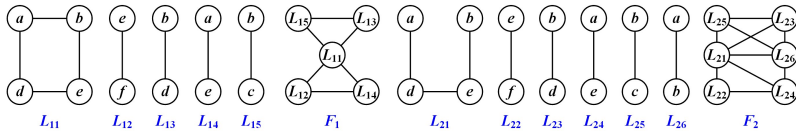


图5 对图4中的图  $G$  的两个图撕裂组实施图撕裂组收缩算法后得到的图  $F_1$  和  $F_2$ , 即  $G \Rightarrow F_1, G \Rightarrow F_2$

Fig. 5 Two graphs  $F_1$  and  $F_2$  obtained by doing the graph-splitting group-contracting algorithm to two graph-splitting groups of the graph  $G$  shown in Fig. 4

对图撕裂组集  $S_{plit}(G)$  中的每个图撕裂组  $G_k \in S_{plit}(G)$  运用图撕裂组收缩算法, 得到图撕裂组收缩图  $C_{G_k}^m = G < G_k$ , 也记为  $G \Rightarrow C_{G_k}^m$ , 则称集合  $C_{tra}(G) = \{G < G_k : G_k \in S_{plit}(G)\}$  为图撕裂组收缩图格 (graph-splitting contracting graph lattice).

2.4.3 图的顶点扩展、收缩算法

**算法5** 全顶点扩展算法 (totally vertex-expending algorithm)

输入: 具有顶点集合  $V(J) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  的连通图  $J$

输出: 全顶点扩展图 (totally vertex-expending graph)

步骤1 用一个至少包含一条边的连通子图  $I_1$  替换顶点  $u_1 \in V(J)$ : 设顶点  $u_1$  的邻点集为  $N_{ei}(u_1) = \{u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,r_1}\} (r_1 = \text{deg}_J(u_1))$ , 删掉顶点  $u_1$ , 将每个顶点  $u_{1,i} \in [1, r_1]$  分别与连通子图  $I_1$  某一个顶点用新边连接, 得到一个新图  $J_1 \leftarrow J \wedge u_1$ .

步骤2 用一个至少包含一条边的连通子图  $I_{k+1}$  替换顶点  $u_{k+1} \in V(J_k), J_{k+1} \leftarrow J_k \wedge u_{k+1}$ .

步骤3 如果  $V(J_k) > 0$ , 则转到步骤2, 否则转到步骤4.

步骤4 返回全顶点扩展图  $J_n = J \wedge V(J)$ , 它具有顶点集  $V(J_n) = \bigcup_{i=1}^n V(I_i)$ , 且有  $|E(J_n)| = |E(J)| + \sum_{i=1}^n |E(I_i)|$  条边.

子图收缩算法 (subgraph-contracting algorithm): 将上面的全顶点扩展图  $J_n = J \wedge V(J)$  的子图  $I(u_n)$  收缩为一个顶点  $u_n$ , 如果子图  $I_n$  中的顶点与  $I(u_n)$  以外的顶点  $w_1, w_2, \dots, w_x$  相邻, 则用边将顶点  $u_n$  与顶点  $w_1, w_2, \dots, w_x$  分别连接在一起, 得到的新图记为  $J_{n-1} = J_n \vee I(u_n)$ , 这个过程叫作子图  $I(u_n)$  的收缩算法. 再将连通图  $J_{n-1}$  的子图  $I_{n-1}$  收缩为一个顶点  $u_{n-1}$ , 对子图  $I_{n-1}$  的收缩, 得到图  $J_{n-2} = J_{n-1} \vee I(u_{n-1})$ . 如此进行下去, 得到图  $J_{n-k} = J_{n-k+1} \vee I(u_{n-k+1}) (k \in [1, n])$ , 其中  $J_0 = J$ .

显然, 顶点扩展算法和子图收缩算法是一对相互为逆的算法. 顶点扩展算法可导致下面的一个结论.

**定理4** 设有互不同构且顶点不交的连通图  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , 每个连通图  $F_i$  的顶点集为  $V(F_i) = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}\} i \in [1, m]$ . 对连通图  $F_i$  的每个顶点  $x_{i,j} (j \in [1, n])$  实施顶点扩展算法, 用连通图  $I_j$  来替换顶点  $x_{i,j}$ , 得到连通图  $F_i$  的

全顶点扩展图  $F_i^{(n)} = F_i \succ_{k=1}^n I_k (i \in [1, m])$ . 则当  $i \neq k$  时, 两个全顶点扩展图  $F_i^{(n)}$  和  $F_k^{(n)}$  承认图  $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ -基相似 (graph  $I$ -base similarity).

设有图基  $I = (I_1, I_2, \dots, I_n)$ , 可以将一个图  $G$  的部分顶点用顶点扩展算法进行替换, 得到部分顶点扩展图  $\partial G \succ_{k=1}^n a_k I_k$ , 这些图能够描述软件体系的模块替换, 比较软件结构之间的相似程度. 式(10)所示的图集集合叫作图  $I$ -基图格 (graphic  $I$ -base lattice), 其中  $\sum_{j=1}^n a_j = |V(G)|$ .

$$L(\partial F_{p,q} \succ I) = \{\partial H \succ_{k=1}^n a_k I_k : a_k \in Z^0, I_k \in I, H \in F_{p,q}\} \tag{10}$$

2.5 图的同构子图相似的基本定理

**定理5** 图  $G$  的  $G$ -顶点撕裂准格  $L(\wedge G) = \bigcup_{k=1}^{n_G} \{\bigodot_{i=1}^{m_k} a_k G_{k,i}\}$  中的每一个图  $T$  与图  $G$  承认同构子图相似, 且具有相同的边数目  $|E(T)| = |E(G)|$ .

**定理6** 当连通图  $G$  和连通图  $H$  承认同构子图相似时, 图  $G$  的  $G$ -顶点撕裂准格  $L(\wedge G)$  与图  $H$  的  $H$ -顶点撕裂准格  $L(\wedge H)$  承认图准格相似 (graphic quasi-lattice similarity).

**定理7** 设连通图  $G$  至少有 3 条边, 且  $G$  不是完全图.

(1) 对连通图  $G$  实施行顶点撕裂运算后, 至少得到 2 个图撕裂组  $G_k = (G_{k,1}, G_{k,2}, \dots, G_{k,m_k}) (m_k \geq 1, k=1, 2)$ , 使得  $G_1 \neq G_2, G = \bigcap_{i=1}^{m_k} G_{k,i}$ , 以及  $E(G) = E(G_1) = E(G_2)$ , 其中  $E(G_k) = \bigcup_{i=1}^{m_k} E(G_{k,i}) (k=1, 2)$ .

(2) 存在连通图  $H$  满足  $H \neq G$  和  $|E(H)| = |E(G)|$ , 使得图  $G$  和图  $H$  承认同构子图相似.

证明: (1) 采用反证法. 设对连通图  $G$  实施行顶点撕裂运算后, 只有唯一的图撕裂组  $G_1 = (G_{1,1}, G_{1,2}, \dots, G_{1,m})$ , 且每个子图  $G_{1,i} = K_2, (i \in [1, m])$ . 因为  $G$  是连通图, 且至少有 3 条边, 则有图  $G$  的最长路  $P = x_1 x_2 \dots x_n$ , 使得路  $P$  至少有 3 个顶点, 也就是说, 路  $P$  至少有两条边  $x_1 x_2$  和  $x_2 x_3$ . 将子路  $x_1 x_2 x_3$  从图  $G$  中撕裂出来, 记为  $G_{2,1} = x_1 x_2 x_3$ , 对余图

$G \wedge \{x_1, x_2, x_3\}$  进行顶点撕裂运算后, 得到的图撕裂组记为  $(G_{2,2}, G_{2,3}, \dots, G_{2,r})$ , 与子图  $G_{2,1} = x_1, x_2, x_3$  相结合, 就得到连通图  $G$  的一个图撕裂组  $G_2 = (G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3}, \dots, G_{2,r})$ 。显然,  $G_{2,1} \neq G_{1,i} = K_2 (i \in [1, m])$ , 证得  $G_2 \neq G_1$ , 这矛盾于假设。结论(1)得证。

(2) 根据定理 5, 图  $G$  的  $G$ -顶点撕裂准格  $\mathbf{L}(\wedge G) = \bigcup_{k=1}^{n_G} \{\bigotimes_{i=1}^{m_k} G_{k,i}\}$  中的每一个图  $H$  与图  $G$  承认同构子图相似, 且具有相同的边数目  $|E(H)| = |E(G)|$ 。结论(2)得证。

### 3 总结和公开问题

本文定义了顶点撕裂运算与顶点重合运算, 基于顶点撕裂连通度证明了连通图的顶点撕裂连通度等价于连通图的连通度, 给出了图的  $W$ -相似的定义和几种匹配方式和相似性度量的方式, 给出了图撕裂组以及同构子图相似的定义, 介绍了一种特殊图撕裂组和特殊图撕裂组匹配方法, 讲述了有关图和图撕裂组的运算和算法、主要有图撕裂收缩算法、确定图撕裂组的算法、图的顶点扩展和收缩算法、全顶点扩展图相似。然后, 给出了图的同构子图相似的基本定理。

由于格理论在格密码学中的应用, 图格是量子计算中的一个研究对象, 也是拓扑编码学的一个分支, 将为量子计算提供更多的有效的技术和方法。

为深入研究图相似问题, 提出下面的问题。

问题 1 给出确定连通图  $G$  的图撕裂组集  $S_{plit}(G)$  的好算法。

问题 2 寻找具有定义 3 中的特殊图撕裂组和特殊图撕裂组匹配的连通图。

问题 3 对连通图  $G$ , 对图  $G$  实施无公共邻点顶点重合运算后得到的图的集合记为  $V_{coin}(G)$ 。寻找好算法来确定: 集合  $V_{coin}(G)$ , 图  $S_{plit}(G)$ -基图格  $\mathbf{L}(\partial F_{p,q} > S_{plit}(G)) = \{\partial H > \bigcup_{k=1}^n a_k G_k : a_k \in Z^0, G_k \in S_{plit}(G), H \in F_{p,q}\}$

$G$ -顶点撕裂准格  $\mathbf{L}(\wedge G) = \bigcup_{k=1}^{n_G} \{\bigotimes_{i=1}^{m_k} G_{k,i}\} = \{\bigotimes_{i=1}^{m_k} G_{k,i} : G_k \in S_{plit}(G)\}$  和图撕裂组收缩图格  $C_{tra}(G)$ 。

问题 4 如果连通图  $G$  和连通图  $H$  承认同构子图相似, 且  $|V(H)| = |V(G)|$  和  $|E(H)| = |E(G)|$ 。那么,  $G$ -顶点撕裂准格  $\mathbf{L}(\wedge G)$  是否包含图  $H$ ? 反之,  $H$ -顶点撕裂准格  $\mathbf{L}(\wedge H)$  也包含  $G$  吗? 是否有  $\mathbf{L}(\wedge G) = \mathbf{L}(\wedge H)$ ?

问题 5 设两个连通  $(p, q)$ -图  $G$  和  $H$  有边子集  $E_G \subset E(G)$  和  $E_H \subset E(H)$ , 满足  $|E_G| = |E_H|$  和  $G - E_G \cong H - E_H$ , 且图  $G$  和图  $H$  承认同构子图相似, 找出关于这两个图的全部的全同构图撕裂组匹配(参见图 2 中的全同构图撕裂组匹配  $(G_k, H_k) (k \in [1, 9])$ )。

重温 Kelly-Ulam 重构猜想<sup>[1]</sup>: 若图  $G$  和图  $H$  之间存在映射  $f: V(G) \rightarrow V(H)$ , 且对每一个顶点  $u \in V(G)$ , 总有  $G - u \cong H - f(u)$ , 则  $G \cong H$ 。因此, 有如下问题。

问题 6 对于连通图  $G_a$  的每一棵生成树  $T_a \subseteq G_a$ , 总有连通图  $G_b$  的一棵生成树  $T_b$  与之对应, 形成两个图的生成树的一一对应, 使得任何一对对应的生成树满足  $T_a \cong T_b$ , 反之亦真。是否有  $G_a \cong G_b$ ?

### 参 考 文 献

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory [M]. New York Springer, 2008.  
[2] LI Q, WANG LP, LIU W Y, et al. Method and system for meas-

uring similarity of graph structure[P]. CN101256594A, 2008.

- [3] LIU H L, DEGN W C, SU H. A flow chart similarity method based on topological structure[P]. CN104462414A, 2015.  
[4] WANG X Y, LIU M J. A Survey of lattice-based cryptography [J]. Journal of Cryptologic Research, 2014, 1(1): 13-27.  
[5] YAO B. Graphic lattices and matrix lattices of topological coding [J]. arXiv: 2005. 03937, 2020.  
[6] HAUSSLER D. Convolutional kernels on discrete structures [R]. Computer Science Department, UC Santa Cruz. Technical Report, 1999.  
[7] HORATH T, GARTNER T, STEFA W. Cyclic pattern kernels for predictive graph mining[C]// Proceedings of the Tenth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. ACM, 2004: 158-167.  
[8] GARTNER T, FLACH P, WROBEL S. On graph kernels: hardness results and efficient alternatives[C]// Lecture Notes in Artificial Intelligence (Subseries of Lecture Notes in Computer Science). 2003: 2777, 129-143.  
[9] BORGWARDT K M, KRIEGEL H P. Shortest-path kernels on graphs[C]// Fifth IEEE International Conference on Data Mining (ICDM'05). IEEE: 2005: 8-81.  
[10] MACRO A, QI X J, YAN C H. A shortest-path graph kernel for estimating gene product semantic similarity[J]. Journal of Biomedical Semantics, 2011, 2(1): 129-143.  
[11] SHERVASHIDZE N, SCHWEITZER P, VAN L, et al. Weisfeiler-Lehman graph kernels[J]. Journal of Machine Learning Research, 2011, 12: 2539-2561.  
[12] SHERVASHIDZE N. Efficient graphlet kernels for large graph comparison[C]// Proceedings of Machine Learning Research, 2009: 488-495.  
[13] JIN G, CHEN Z, ZHANG J, et al. Detecting user interaction anomaly based on social network graph similarity[C]// 2020 IEEE 10th International Conference on Electronics Information and Emergency Communication (ICEIEC). IEEE, 2020: 131-136.  
[14] FYBIAK M, WALLAT S, REIHARD S, et al. Graph similarity and its applications to hardware security[C]// IEEE Transactions on Computers, 2020: 505-519.  
[15] WANG B, LYU X, TANG Z, et al. Comparison of molecule graph representation with similarity consistency [C] // 2019 IEEE International Conference on Bioinformatics and Biomedicine (BIBM). IEEE, 2019: 1250-1252.  
[16] ZHU Y, QIN L, YU J X, et al. Answering top- $k$  graph similarity queries in graph databases[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2020, 32: 1459-1474.



**WANG Xiao-min**, born in 1989, Ph.D student. Her main research interests include graph theory and complex networks.



**SU Jing**, born in 1993, Ph.D. Her main research interests include graph theory and complex network.