计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.200800063

初等稳定矩阵约化 A_0 为上 Hessenberg 型的方法研究

苏　尔
浙江传媒学院媒体工程学院　杭州 310018

摘　要　文中讨论用初等矩阵技术选用部分主元素的 Gauss 消去法将 A_0 约化变换为 Hessenberg 矩阵,为使数值具有稳定性,重视如何交换的本质性基础问题。首先简述概括了约化方法的矩阵算式;其次明确了递推约化运算规则式子形成的推演依据;然后重点详述展开约化方法的递推运算完全步骤和逻辑实现,清楚表述最后约化结果与矩阵算式准确计算结果一致事实;最后给出数值实例验证结论,约化方法基于充分计算依据并实际紧凑可行。

关键词:初等矩阵;行列交换;矩阵分块;递推约化;元素置换;约化矩阵
中图法分类号　O241.6

Research on Method of Reducing A_0 to Upper Hessenberg Type with Elementary Stability Matrix

SU Er
College of Media Engineering,Communication University of Zhejiang,Hangzhou 310018,China

Abstract　This paper discusses how to reduce A_0 to Hessenberg matrix by using Gauss elimination method of partial principal elements using elementary matrix technology. In order to make the numerical stability,the essential basic problem of how to exchange is emphasized. The first part briefly summarizes the matrix formula of reduction method. The second part further clarifies the basis of deducing the formula form of recursive reduction operation rule. The third part focuses on the details of recursive algorithm complete steps and logic implementation of the reduction method,and clearly states the fact that the final reduction result is consistent with the accurate calculation result of the matrix formula. The fourth part is a concrete example to verify the conclusion:the reduction method is based on sufficient calculation basis and is actually compact and feasible.

Keywords　Elementary matrix,Exchange of ranks,Matrix block,Recursive reduction,Element replacement,Reduced matrix

几种初等矩阵及基本应用性质[1]:Gauss 向量 $\boldsymbol{\alpha}_r=(\underbrace{0,\cdots,0}_{r个},l_{r+1,r},\cdots,l_{nr})^{\mathrm{T}}$,初等矩阵 $\boldsymbol{N}_r=I-\alpha_r e_r^{\mathrm{T}}$,与单位矩阵具有基本相同型状,区别仅仅在第 r 列上,其第 r 列向量为 $(0,\cdots,1,-l_{r+1,r},\cdots,-l_{nr})^{\mathrm{T}}$,用初等矩阵 $\boldsymbol{N}_r$ 左乘向量 $\boldsymbol{x}$,记新向量 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{N}_r\boldsymbol{x}$,则 $\boldsymbol{x}_i{}'=\boldsymbol{x}_i\,(i=1,\cdots,r)$,$\boldsymbol{x}_i{}'=\boldsymbol{X}_i-l_{ir}\boldsymbol{X}_r=0\,(i=r+1,\cdots,n)$,乘子 $|l_{ir}|=\left|\dfrac{\boldsymbol{X}_i}{\boldsymbol{X}_r}\right|\leqslant 1\,(i=r+1,\cdots,n)$。$N_r^{-1}=I+\alpha_r e_r^{\mathrm{T}}$ 与 N_r 相差仅仅是第 r 列向量的元素符号改变,绝对值不变。考察初等矩阵的乘积 $N_1N_2\cdots N_{n-1}$,得到的是对角线元素都等于 1 的下三角形矩阵:其(i,j)位置上的元素,当 $i>j$ 时等于 $-l_{ij}$,当 $i=j$ 时等于 1,当 $i<j$ 时为 0。对换矩阵记为 I_{ij},与单位矩阵只相差在第 i 行与 j 行以及第 i 列与 j 列,这些行列的形式为 $I_{ij}=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} i\,行 \\ j\,行 \end{array} \\ \begin{array}{cc} i & j\,列 \end{array} & \end{array}$,特别地 $I_{ij}^{-1}=I_{ij}$;$I_{ii}=I$,当任意矩阵左乘以 I_{ij} 时使得该矩阵第 i 行与第 j 行交换;当右乘以 I_{ij} 时使得该矩阵第 i 列与第 j 列交换。当 N_r 左右两边乘以同样对换矩阵得到 $I_{(n-1),(n-1)'}\cdots I_{(r+1),(r+1)'}N_rI_{(r+1),(r+1)'}\cdots I_{(n-1),(n-1)'}=\widetilde{\boldsymbol{N}}_r$,$\widetilde{\boldsymbol{N}}_r$ 称为稳定的初等矩阵。考察 $\widetilde{\boldsymbol{N}}_r$ 与 $\boldsymbol{N}_r$ 的差别,仅仅是第 r 列对角线下面的某些元素在原来位置做了置换(仍是同一列对角线下面原来位置某些元素置换以后的重新排列),以后将列向量某些位置的元素置换都用统一符号表示:$[(r+1),(r+1)']$;$\cdots$;$[(n-1),(n-1)']$,行号$(r+1)'\geqslant r+1$;$\cdots$;行号$(n-1)'\geqslant n-1$。上 Hessenberg 矩阵定义[2]:如果 $a_{ij}=0(i\geqslant j+2)$,Hessenberg 矩阵是特征值问题中很重要的一种特殊类型矩阵。用初等矩阵技术选用部分主元素的 Gauss 消去法约化为 Hessenberg 矩阵,数值稳定性是第一位,一定要交换。

1　约化思路和矩阵算式

对于原始矩阵 $\boldsymbol{A}_0$,约化过程由 $n-1$ 步组成。第 1 步:$A_1=A_0$,可以直接得到 h_{11}。第 2 步:由 $A_1=\begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,对 $a_{21}\cdots a_{n1}$ 比较绝对值,取 $\max\limits_{2\leqslant i\leqslant n}|a_{i1}|=|a_{2'1}|$,得到 $2'$,交换第 $2,2'$ 行$\Leftrightarrow I_{2,2'}A_1=\begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & a_{1n} \\ h_{21} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$,得到 $h_{21}=a_{2'1}$。从这步以后,随着原始矩阵 $\boldsymbol{A}_0$ 发生行交换,$\boldsymbol{A}_0$ 的元素变化统一以 $\tilde{a}_{ij}$ 记号表示,约化矩阵的元素也随着 $\boldsymbol{A}_0$ 元素变化相应记号。计算 $l_{32}=\dfrac{\tilde{a}_{31}}{h_{21}}$,$\cdots$,$l_{n2}=\dfrac{\tilde{a}_{n1}}{h_{21}}$,$N_2=I-\alpha_2e_2^{\mathrm{T}}=$

通信作者:苏尔(se072002@aliyun.com)

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & O \\ \vdots & -l_{32} & 1 & \\ & \vdots & 0 & \ddots \\ & -l_{n2} & \vdots & & 1 \end{bmatrix}$$，对约化矩阵 $I_{2,2'}A_1$ 的第 3 行一第 n 行实施行变换：第 $i(3\sim n)$ 行相应元素减去第 2 行相应元素乘以 $l_{i2} \Leftrightarrow N_2 I_{2,2'} A_1 = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ h_{21} & & & \tilde{a}_{2n} \\ 0 & (3,2) & \cdots & (3,n) \\ \vdots & \vdots & & \\ & (n,2) & & (n,n) \end{bmatrix}$，为使约化变换总是相似变换，约化矩阵先交换第 2、2′列(右乘 $I_{2,2'}$)，然后第 2 列实施列变换(右乘 N_2^{-1})：第 $i(3\sim n)$ 列相应元素乘以 l_{i2} 加到第 2 列相应元素 $\Leftrightarrow N_2 I_{2,2'} A_1 I_{2,2'} N_2^{-1} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \tilde{a}_{13} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \tilde{a}_{23} & & \tilde{a}_{2n} \\ 0 & (3,2) & (3,3) & \cdots & (3,n) \\ \vdots & \vdots & & & \\ & (n,2) & (n,3) & & (n,n) \end{bmatrix} = A_2$，至此得到约化矩阵 A_2，左上角元素 $h_{ij}(i=1,2,j=1,2)$ 已确定，后面约化过程不再变化。依次递推，不失一般地，第 r 步开始已有约化矩阵 A_{r-1}，第 r 步约化过程可以将其写成矩阵相似变换形式：$A_r = N_r I_{r,r'} A_{r-1} I_{r,r'} N_r^{-1}(r=2,\cdots,n-1)$，此步约化完成，确定约化矩阵 A_r 的左上角元素 $h_{r,r-1}, h_{1,r}, \cdots, h_{r,r}$ 及稳定矩阵 N_r。直至第 $n-1$ 步约化完成，全部约化过程可以写成矩阵变换形式为：$A_{n-1} = N_{n-1} I_{(n-1),(n-1)'} \cdots N_3 I_{3,3'} N_2 I_{2,2'} A_0 I_{2,2'} N_2^{-1} I_{3,3'} N_3^{-1} \cdots I_{(n-1),(n-1)'} N_{n-1}^{-1} = H$（约化完成最后得到约化矩阵 A_{n-1} 就是形式为上 Hessenberg 型矩阵 $\boldsymbol{H}$）。对上式进行变形整理，得：

$$N_{n-1} \underbrace{I_{(n-1),(n-1)'} N_{n-2} I_{(n-1),(n-1)'}}_{记\tilde{N}_{n-2}} \underbrace{I_{(n-1),(n-1)'} I_{(n-2),(n-2)'} N_{n-3} I_{(n-2),(n-2)'} I_{(n-1),(n-1)'}}_{记\tilde{N}_{n-3}}$$

$$\underbrace{I_{(n-1),(n-1)'} I_{(n-2),(n-2)'} I_{(n-3),(n-3)'} N_{n-4} I_{(n-3),(n-3)'} I_{(n-2),(n-2)'} I_{(n-1),(n-1)'}}_{记\tilde{N}_{n-4}}$$

$$\cdots$$

$$\underbrace{I_{(n-1),(n-1)'} \cdots I_{3,3'} N_2 I_{3,3'} \cdots I_{(n-1),(n-1)'}}_{记\tilde{N}_2}$$

$$\underbrace{I_{(n-1),(n-1)'} I_{(n-2),(n-2)'} \cdots I_{2,2'} A_0 I_{2,2'} \cdots I_{(n-2),(n-2)'} I_{(n-1),(n-1)'}}_{记\tilde{A}_0}$$

$$\underbrace{I_{(n-1),(n-1)'} \cdots I_{3,3'} N_2^{-1} I_{3,3'} \cdots I_{(n-1),(n-1)'}}_{记\tilde{N}_2^{-1}} \cdots$$

$$\underbrace{I_{(n-1),(n-1)'} I_{n-2,(n-2)'} N_{n-3}^{-1} I_{n-2,(n-2)'} I_{(n-1),(n-1)'}}_{记\tilde{N}_{n-3}^{-1}}$$

$\underbrace{I_{(n-1),(n-1)'} N_{n-2}^{-1} I_{(n-1),(n-1)'}}_{记\tilde{N}_{n-2}^{-1}} N_{n-1}^{-1} = H$，最后，全部 $n-1$ 步约化过程写成矩阵变换式子为：$N_{n-1} \tilde{N}_{n-2} \cdots \tilde{N}_3 \tilde{N}_2 \tilde{A}_0 \underbrace{\tilde{N}_2^{-1} \tilde{N}_3^{-1} \cdots \tilde{N}_{n-2}^{-1} N_{n-1}^{-1}}_{记为\tilde{N}} = H \Leftrightarrow \tilde{N}^{-1} \tilde{A}_0 \tilde{N} = H \Leftrightarrow \tilde{A}_0 \tilde{N} = \tilde{N} H \cdots$ 记作式①，其中，$\tilde{A}_0$ 是经过行列交换后的 A_0 置换形式，每步约化过程结合行交换是使得约化矩阵的列主元素总是出现在该列对角线以下第一个元素的位置上，保证了约化稳定性。式中有 $\tilde{N} = \tilde{N}_2^{-1} \tilde{N}_3^{-1} \cdots \tilde{N}_{n-2}^{-1} N_{n-1}^{-1}$，所得乘积 $\tilde{N}$ 是单位下三角阵：第 1 列为已知(特殊)单位向量 e_1；其余第 r 列对角线以下元素仍是 N_r^{-1} 的第 r 列对角线以下位置的元素相互置换结果 $\tilde{l}_{ir}$，$|\tilde{l}_{ir}| \leqslant 1(i=r+1,\cdots,n; r=2,\cdots,n-1)$，矩阵 $\boldsymbol{\tilde{N}}$ 具有良好性质：对角线以下非零元素不会出现 $\tilde{l}_{ir}$ 的乘积项，对角线以下非零元素的模都不大于 1。

2 递推运算规则的推演依据

分析矩阵算式①，这里为便于探讨，由 N_r^{-1} 列向量元素置换所得的稳定矩阵 $\tilde{N}_r^{-1}(2 \leqslant r \leqslant n-2)$ 第 r 列列向量暂时仍然书写为 $[0,\cdots,1,l_{r+1,r},l_{r+2,r},\cdots,l_{nr}]^{\mathrm{T}}$，假设每步约化过程同时结合原始矩阵发生行列交换为 $\boldsymbol{\tilde{A}}_0$，不妨由这个算式递推确定第 r 步约化过程形成的中间结果，得到 $\tilde{N}$ 和 H 的相应(矩阵)元素，因而不经过每步具体变换到 A_r 的约化步骤可以直接确定最后的约化结果和约化矩阵 $\tilde{N}$ 和 H(因 $\tilde{N}$ 和 H 特点是下三角矩阵和非满矩阵，适合分块运算)。下面具体分析讨论，对式①进行矩阵分块。

$$\tilde{A}_0 \tilde{N} = \tilde{N} H \Leftrightarrow \tilde{A}_0 \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \vdots & & & \\ & l_{32} & \ddots & & & \\ & \vdots & & 1 & & \\ & & & l_{r+1,r} & \ddots & \\ & l_{n2} & & \vdots & l_{n,n-1} & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & l_{32} & \ddots & & & \\ & \vdots & & 1 & & \\ & & & l_{r+1,r} & \ddots & \\ & l_{n2} & & \vdots & l_{n,n-1} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|c|c} h_{11} & h_{12} & & h_{1,r-1} & h_{1,r} & H_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & h_{r,r-1} & h_{r,r} & \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & 0 & h_{r+1,r} & \\ & & & \vdots & 0 & H_2 \\ & & & & \vdots & \end{array}\right]$$

将上式的左边分块矩阵记为 $[\tilde{A}_0 \tilde{N}_{左} \ \ \tilde{A}_0 \tilde{N}_{右}]$；右边分块矩阵记为 $[\tilde{N}_{左} \ \ \tilde{N}_{右}] \left[\begin{array}{ccc} & h_{1r} & \\ H_r & \vdots & H_1 \\ & h_{rr} & \\ \hline & h_{r+1,r} & \\ O & 0 & H_2 \\ & \vdots & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \tilde{N}_{左} H_r & \tilde{N}_{左} \begin{bmatrix} h_{1r} \\ \vdots \\ h_{rr} \end{bmatrix} + \tilde{N}_{右} \begin{bmatrix} h_{r+1,r} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} & \tilde{N}_{左} H_1 + \tilde{N}_{右} H_2 \end{array}\right]$，上述左右二边分块矩阵对应结构中，由二边的左半部分对应结构相等，可得该式子：

$$\tilde{A}_0\tilde{N}_{左}=\left[\tilde{N}_{左}H_r\quad \tilde{N}_{左}\begin{bmatrix}h_{1r}\\ \vdots\\ h_{rr}\end{bmatrix}+\tilde{N}_{右}\begin{bmatrix}h_{r+1,r}\\ 0\\ \vdots\end{bmatrix}\right]\cdots$$，将其记为式②。

对式②中矩阵继续分块 $\tilde{N}_{左}=\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & & & 0\\ 0 & 1 & & & \vdots\\ \vdots & l_{32} & \ddots & & 1\\ & \vdots & & & l_{r+1,r}\\ & & & & \vdots\\ & l_{n2} & & & l_{nr}\end{array}\right]$，考察式②的矩阵结构，由左右两边分块矩阵结构相等，由分块矩阵的左半部分对应结构，得到左右两边相等式子为：

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & l_{32} & \ddots & \\ & \vdots & & 1\\ & & & l_{r,r-1}\\ & & & \vdots\\ & l_{n2} & & l_{n,r-1}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & l_{32} & \ddots & \\ & \vdots & & 1\\ & & & l_{r+1,r}\\ & & & \vdots\\ & l_{n2} & & l_{n,r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{11} & h_{12} & & h_{1,r-1}\\ h_{21} & h_{22} & & \vdots\\ 0 & h_{32} & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ & \vdots & & h_{r,r-1}\end{bmatrix}$$

由右半部分对应结构，得到左右两边相等式子为：

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ l_{r+1,r}\\ \vdots\\ l_{nr}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & l_{32} & \ddots & \\ & \vdots & & 1\\ & & & l_{r+1,r}\\ & & & \vdots\\ & l_{n2} & & l_{nr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{1r}\\ \vdots\\ h_{rr}\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 1 & & \\ l_{r+2,r+1} & \ddots & \\ \vdots & & 1\\ l_{n,r+1} & l_{n,n-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{r+1,r}\\ 0\\ \vdots\end{bmatrix}$$

上述两个式子的左边和右边的矩阵乘积各自计算，得左右两边的矩阵乘积，考察其最后一列，两边相等，由上述两个式子对应得到两组完全平行且相同结构的递推式子（式子等号右边加粗字体表示递推得到的结果）：

$\tilde{a}_{1,r-1}+\tilde{a}_{1r}l_{r,r-1}+\cdots+\tilde{a}_{1n}l_{n,r-1}=\boldsymbol{h}_{1,r-1}$

$\tilde{a}_{2,r-1}+\tilde{a}_{2r}l_{r,r-1}+\cdots+\tilde{a}_{2n}l_{n,r-1}=\boldsymbol{h}_{2,r-1}$

$\tilde{a}_{3,r-1}+\tilde{a}_{3r}l_{r,r-1}+\cdots+\tilde{a}_{3n}l_{n,r-1}-l_{32}h_{2,r-1}=\boldsymbol{h}_{3,r-1}$

$\vdots$

$\tilde{a}_{r-1,r-1}+\tilde{a}_{r-1,r}l_{r,r-1}+\cdots+\tilde{a}_{r-1,n}l_{n,r-1}-l_{r-1,2}h_{2,r-1}-l_{r-1,3}h_{3,r-1}-\cdots-l_{r-1,r-2}h_{r-2,r-1}=\boldsymbol{h}_{r-1,r-1}$

$\tilde{a}_{r,r-1}+\tilde{a}_{rr}l_{r,r-1}+\cdots+\tilde{a}_{rn}l_{n,r-1}-l_{r2}h_{2,r-1}-l_{r3}h_{3,r-1}-\cdots-l_{r,r-1}h_{r-1,r-1}=\boldsymbol{h}_{r,r-1}$

$\tilde{a}_{r+1,r-1}+\tilde{a}_{r+1,r}l_{r,r-1}+\cdots+\tilde{a}_{r+1,n}l_{n,r-1}-l_{r+1,2}h_{2,r-1}-l_{r+1,3}h_{3,r-1}-\cdots-l_{r+1,r-1}h_{r-1,r-1}=\boldsymbol{l}_{r+1,r}\boldsymbol{h}_{r,r-1}$

$\vdots$

$\tilde{a}_{n,r-1}+\tilde{a}_{nr}l_{r,r-1}+\cdots+\tilde{a}_{nn}l_{n,r-1}-l_{n2}h_{2,r-1}-l_{n3}h_{3,r-1}-\cdots-l_{n,r-1}h_{r-1,r-1}=\boldsymbol{l}_{nr}\boldsymbol{h}_{r,r-1}$

$\tilde{a}_{1r}+\tilde{a}_{1,r+1}l_{r+1,r}+\cdots+\tilde{a}_{1n}l_{nr}=\boldsymbol{h}_{1r}$

$\tilde{a}_{2r}+\tilde{a}_{2,r+1}l_{r+1,r}+\cdots+\tilde{a}_{2n}l_{nr}=\boldsymbol{h}_{2r}$

$\tilde{a}_{3r}+\tilde{a}_{3,r+1}l_{r+1,r}+\cdots+\tilde{a}_{3n}l_{nr}-l_{32}h_{2r}=\boldsymbol{h}_{3r}$

$\vdots$

$\tilde{a}_{r-1,r}+\tilde{a}_{r-1,r+1}l_{r+1,r}+\cdots+\tilde{a}_{r-1,n}l_{nr}-l_{r-1,2}h_{2r}-l_{r-1,3}h_{3r}-\cdots-l_{r-1,r-2}h_{r-2,r}=\boldsymbol{h}_{r-1,r}$

$\tilde{a}_{rr}+\tilde{a}_{r,r+1}l_{r+1,r}+\cdots+\tilde{a}_{rn}l_{nr}-l_{r2}h_{2r}-l_{r3}h_{3r}-\cdots-l_{r,r-1}h_{r-1,r}=\boldsymbol{h}_{rr}$

$\tilde{a}_{r+1,r}+\tilde{a}_{r+1,r+1}l_{r+1,r}+\cdots+\tilde{a}_{r+1,n}l_{nr}-l_{r+1,2}h_{2r}-l_{r+1,3}h_{3r}-\cdots-l_{r+1,r}h_{rr}=\boldsymbol{h}_{r+1,r}$

$\tilde{a}_{r+2,r}+\tilde{a}_{r+2,r+1}l_{r+1,r}+\cdots+\tilde{a}_{r+2,n}l_{nr}-l_{r+2,2}h_{2r}-l_{r+2,3}h_{3r}-\cdots-l_{r+2,r}h_{rr}=\boldsymbol{l}_{r+2,r+1}\boldsymbol{h}_{r+1,r}$

$\vdots$

$\tilde{a}_{nr}+\tilde{a}_{n,r+1}l_{r+1,r}+\cdots+\tilde{a}_{nn}l_{nr}-l_{n2}h_{2r}-l_{n3}h_{3r}-\cdots-l_{nr}h_{rr}=\boldsymbol{l}_{n,r+1}\boldsymbol{h}_{r+1,r}$

由这两组完全平行相同结构的递推式子可以说明递推规律：假设在结合行列交换已得 $\tilde{A}_0$ 的完成基础上，在形成最后 $\tilde{N}$，H 的中间约化过程中，每一步约化（$r\leqslant n-1$）都在仅仅已知 $\tilde{N}$ 的前 r 列元素的情况下，就可顺序依次推得 H 的第 r 列元素以及 $\tilde{N}$ 的第 $r+1$ 列元素（递推式子等号右边的加粗字体表示依次得到结果）。当矩阵不分块，直接考察 $\tilde{A}_0\tilde{N}=\tilde{N}H$，式子矩阵乘积的最后一列元素如下，由左右两边相等，说明已知 $\tilde{N}$ 的前 $n-1$ 列元素的情况下，就可顺序依次递推求出 H 的第 n 列元素（递推式子等号右边加粗字体表示得到结果）：

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_{1n}\\ \vdots\\ \tilde{a}_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_{1n}\\ h_{2n}\\ l_{32}h_{2n}+h_{3n}\\ l_{42}h_{2n}+l_{43}h_{3n}+h_{4n}\\ \vdots\\ l_{n-1,2}h_{2n}+l_{n-1,3}h_{3n}+\cdots+l_{n-1,n-2}h_{n-2,n}+h_{n-1,n}\\ l_{n2}h_{2n}+l_{n3}h_{3n}+\cdots+l_{n,n-1}h_{n-1,n}+h_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tilde{a}_{1n}=h_{1n};\tilde{a}_{2n}=h_{2n}\\ \tilde{a}_{3n}-l_{32}h_{2n}=h_{3n}\\ \tilde{a}_{4n}-l_{42}h_{2n}-l_{43}h_{3n}=h_{4n}\\ \vdots\\ \tilde{a}_{n-1,n}-l_{n-1,2}h_{2n}-l_{n-1,3}h_{3n}-\cdots-l_{n-1,n-2}h_{n-2,n}=h_{n-1,n}\\ \tilde{a}_{nn}-l_{n2}h_{2n}-l_{n3}h_{3n}-\cdots-l_{n,n-1}h_{n-1,n}=h_{nn}\end{cases}$$

综合以上，由矩阵算式式①解析的结果，在假设 A_0 经过行列全部相似变换成为 $\tilde{A}_0$ 的已知前提下，相当于看作由上述递推式子运算（中间不必再需选主元素过程）可以直接得到最后的约化结果和约化矩阵 $\tilde{N}$，H。然而不可忽视的是，A_0 经过行列全部相似变换成为 $\tilde{A}_0$ 的已知前提是仅仅预期假设

不能预先满足的。事实如背景知识所述，约化实现为避免数值不稳定，约化变换中间过程约化矩阵如何行列交换，保证列主元素总是出现在正确位置上，取决于每一步中间过程一定先选出列主元素，约化结合交换技术是允许的，因此交换是本质性问题。

3 结合行列交换的递推约化过程实现完全步骤

$r=1$ 时，特别说明：从 A_0 直接得到 $A_1=A_0$；确定 $h_{11}=a_{11}$。

$r=2$ 时，1)比较 $a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1}$ 的大小，$\max\limits_{2\leqslant i\leqslant n}|a_{i1}|=|a_{2'1}|$，确定 $2'$，使 a_{21} 与 $a_{2'1}$ 二元素互相对换，得到重新排列元素 $\tilde{a}_{21}$，$\tilde{a}_{31},\cdots,\tilde{a}_{n1}$，然后确定 $l_{32}=\dfrac{\tilde{a}_{31}}{\tilde{a}_{21}},\cdots,l_{n2}=\dfrac{\tilde{a}_{n1}}{\tilde{a}_{21}}$。2)先对 A_1 交换第 2、$2'$列，然后对第 2 列进行初等列变换$\Leftrightarrow A_1I_{2,2'}N_2^{-1}$，同时写出 $\tilde{A}_0=\tilde{A}_0I_{2,2'}$，这时确定 h_{12}，$h_{12}=\tilde{a}_{12}+\tilde{a}_{13}l_{32}+\cdots+\tilde{a}_{1n}l_{n2}$，这里考察约化矩阵 $A_1I_{2,4}N_2^{-1}$ 第 2 列改变后第 2～n 行 $(2,2),(3,2),\cdots,(n,2)$ 位置上的元素内容，不难写出如下式子：

元素$(2,2)=\tilde{a}_{22}+\tilde{a}_{23}l_{32}+\cdots+\tilde{a}_{2n}l_{n2}$

元素$(3,2)=\tilde{a}_{32}+\tilde{a}_{33}l_{32}+\cdots+\tilde{a}_{3n}l_{n2}$

$\vdots$

元素$(n,2)=\tilde{a}_{n2}+\tilde{a}_{n3}l_{32}+\cdots+\tilde{a}_{nn}l_{n2}$

将该式记作※ 式

3)对 $A_1I_{2,2'}N_2^{-1}$ 交换第 2、$2'$行，同时写出 $\tilde{A}_0=I_{2,2'}\tilde{A}_0$，这时确定 h_{21},h_{22}(约化矩阵左上角二行二列的元素后面变换不再改变)，$h_{21}=\tilde{a}_{21}$，$h_{22}=$※ 式中元素$(2',2)$。

最后对约化矩阵第 3～n 行实施初等行变换$\Leftrightarrow N_2I_{2,2'}A_1I_{2,2'}N_2^{-1}=A_2$，这里考察约化矩阵 A_2 第 2 列第 3～n 行元素的改变内容：初等行变换相当于在前面※式中元素$(2,2)$与元素$(2',2)$互换基础上最后加上一项形成，写出 A_2 中$(3,2),\cdots,(n,2)$位置上的元素内容为：

元素$(3,2)=$※式中元素$(3,2)-l_{32}h_{22}$

$\vdots$

元素$(2',2)=$※式中元素$(2,2)-l_{2'2}h_{22}$

$\vdots$

元素$(n,2)=$※式中元素$(n,2)-l_{n2}h_{22}$

将其记作○式。

写出此步完成的中间约化矩阵形式如下：

$$A_2=\left[\begin{array}{cc|ccc} h_{11} & h_{12} & \tilde{a}_{13} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \tilde{a}_{23} & & \tilde{a}_{2n} \\ \hline 0 & \text{元素}(3,2) & \tilde{a}_{33}-l_{32}\tilde{a}_{23} & & \tilde{a}_{3n}-l_{32}\tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ & \text{元素}(n,2) & \tilde{a}_{n3}-l_{n2}\tilde{a}_{23} & & \tilde{a}_{nn}-l_{n2}\tilde{a}_{2n} \end{array}\right]$$

此步开始以后每步约化过程都要结合行列交换，原始矩阵 $\boldsymbol{A}_0$(假设从第 2 行第 2 列起都有交换)行列交换后统一书写为 $\tilde{A}_0$，$\tilde{A}_0$ 的矩阵元素统一记为 $\tilde{a}_{ij}$，中间约化矩阵的元素记号同时也随着 $\tilde{A}_0$ 的元素记号发生相应变化。

$r=3$ 时，上步已得中间约化矩阵 A_2，1)将其第 2 列第 3～n 行的元素(上步○式中元素)临时赋值为 $\sigma_i(i=3,\cdots,n)$，比较其绝对值大小，$\max\limits_{3\leqslant i\leqslant n}|\sigma_i|=|\sigma_3{'}|$，确定 $3'$，σ_3 与 $\sigma_3{'}$互相对换，重新排列 $\sigma_3,\sigma_4,\cdots,\sigma_n$，然后确定 $l_{43}=\dfrac{\sigma_4}{\sigma_3},\cdots,l_{n3}=\dfrac{\sigma_n}{\sigma_3}$。2)先对 A_2 交换第 3、$3'$列，然后对第 3 列施行初等列变换$\Leftrightarrow A_2I_{3,3'}N_3^{-1}$，同时写出 $\tilde{A}_0=\tilde{A}_0I_{3,3'}$，这时确定 h_{13},h_{23}，写出式子内容为：

$h_{13}=\tilde{a}_{13}+\tilde{a}_{14}l_{43}+\tilde{a}_{15}l_{53}+\cdots+\tilde{a}_{1n}l_{n3}$

$h_{23}=\tilde{a}_{23}+\tilde{a}_{24}l_{43}+\tilde{a}_{25}l_{53}+\cdots+\tilde{a}_{2n}l_{n3}$

这里特别考察中间约化矩阵第 3 列改变后第 3～n 行$(3,3)$，$(4,3),\cdots,(n,3)$位置上的元素内容，写出代数式子分别如下(记作※ 式)：

$$\begin{aligned}\text{元素}(3,3)&\Leftrightarrow(\tilde{a}_{33}-l_{32}\tilde{a}_{23})+(\tilde{a}_{34}-l_{32}\tilde{a}_{24})l_{43}+(\tilde{a}_{35}-l_{32}\tilde{a}_{25})l_{53}+\cdots+(\tilde{a}_{3n}-l_{32}\tilde{a}_{2n})l_{n3}\\&=\tilde{a}_{33}+\tilde{a}_{34}l_{43}+\cdots+\tilde{a}_{3n}l_{n3}-l_{32}\underline{(\tilde{a}_{23}+\tilde{a}_{24}l_{43}+\tilde{a}_{25}l_{53}+\cdots\tilde{a}_{2n}l_{n3})}\\&=\tilde{a}_{33}+\tilde{a}_{34}l_{43}+\cdots+\tilde{a}_{3n}l_{n3}-l_{32}h_{23}\end{aligned}$$

同理运算推得后面元素的代数式子：

元素$(4,3)\Leftrightarrow\tilde{a}_{43}+\tilde{a}_{44}l_{43}+\cdots+\tilde{a}_{4n}l_{n3}-l_{42}h_{23}$

$\vdots$

元素$(n,3)\Leftrightarrow\tilde{a}_{n3}+\tilde{a}_{n4}l_{43}+\cdots+\tilde{a}_{nn}l_{n3}-l_{n2}h_{23}$。

3)对 $A_2I_{3,3'}N_3^{-1}$ 交换第 3、$3'$行，这时确定 h_{32},h_{33}(左上角三行三列的元素在后面变换中不再改变)。

$h_{32}=$上步○式中元素$(3',2)$

$h_{33}=$这步※式中元素$(3',3)$

同时写出 $\tilde{A}_0=I_{3,3'}\tilde{A}_0$，再对约化矩阵 $I_{3,3'}A_2I_{3,3'}N_3^{-1}$ 第 4～n 行实施初等行变换$\Leftrightarrow N_3I_{3,3'}A_2I_{3,3'}N_3^{-1}=A_3$，考察约化矩阵 A_3 第 3 列第 4～n 行元素的改变内容，相当于在前面※式中元素$(3,3)$、元素$(3',3)$的互换基础上各自最后加上一项，现在写出 A_3 中$(4,3),\cdots,(n,3)$位置上的元素内容为如下式子(记作○式)：

元素$(4,3)=$※式中元素$(4,3)-l_{43}h_{33}$

$\vdots$

元素$(3',3)=$※式中元素$(3,3)-l_{3'3}h_{33}$

$\vdots$

元素$(n,3)=$※式中元素$(n,3)-l_{n3}h_{33}$

此步得到的约化矩阵 $\boldsymbol{A}_3$ 形式略写。4)单独更新，对 N_2^{-1} 进行第 2 列向量元素的$[3,3']$置换，更新得到 $\tilde{N}_2^{-1}\Leftrightarrow I_{3,3'}N_2^{-1}I_{3,3'}=\tilde{N}_2^{-1}$(此小步操作不体现在中间约化矩阵元素改变上)。注意：此步(从第 3 步)以后每步约化，都需要对 N_2^{-1} 第 2 列列向量元素进行置换，置换后更新得到稳定矩阵 $\tilde{N}_2^{-1}$，以后将 $\tilde{N}_2^{-1}$ 第 2 列列向量记作$[0,1,\tilde{l}_{32},\cdots,\tilde{l}_{n2}]^{\mathrm{T}}$，将 $\tilde{N}_2^{-1}$ 列向量运用到后面约化过程中。(其余 $N_3^{-1}\cdots N_{n-2}^{-1}$ 也是同理。后面约化过程中将 N_r^{-1} 第 r 列列向量元素进行置换，更新得到稳定矩阵 $\tilde{N}_r^{-1}(2\leqslant r\leqslant n-2)$，第 r 列列向量统一记作$[0,\cdots,1,\tilde{l}_{r+1,r},\tilde{l}_{r+2,r},\cdots,\tilde{l}_{nr}]^{\mathrm{T}}$，运用到后面约化过程中。)

$\cdots$第 r 步时，已得约化矩阵 A_{r-1}，1)将约化矩阵 A_{r-1} 第 $r-1$ 列第 r～n 行$(r,r-1),(r+1,r-1),\cdots,(n,r-1)$位置上的元素(上步○式中元素)临时赋值为 $\sigma_i(i=r,\cdots,n)$，现在分别写出其代数式子：

$$\sigma_r=\tilde{a}_{r,r-1}+\tilde{a}_{rr}l_{r,r-1}+\cdots+\tilde{a}_{rn}l_{n,r-1}-l_{r2}h_{2,r-1}-l_{r3}h_{3,r-1}-\cdots-l_{r,r-1}h_{r-1,r-1}$$

$$\sigma_{r+1}=\tilde a_{r+1,r-1}+\tilde a_{r+1,r}l_{r,r-1}+\cdots+\tilde a_{r+1,n}l_{n,r-1}-l_{r+1,2}h_{2,r-1}-l_{r+1,3}h_{3,r-1}-\cdots-l_{r+1,r-1}h_{r-1,r-1}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n=\tilde a_{n,r-1}+\tilde a_{nr}l_{r,r-1}+\cdots+\tilde a_{nn}l_{n,r-1}-l_{n2}h_{2,r-1}-l_{n3}h_{3,r-1}-\cdots-l_{n,r-1}h_{r-1,r-1}$$

由式子计算结果比较其绝对值大小，$\max\limits_{r\leqslant i\leqslant n}|\sigma_i|=|\sigma_r{'}|$，确定 r'，将 σ_r 与 $\sigma_r{'}$ 互相对换，重新排列 $\sigma_r,\sigma_{r+1},\cdots,\sigma_n$，然后确定 $l_{r+1,r}=\dfrac{\sigma_{r+1}}{\sigma_r},\cdots,l_{n,r}=\dfrac{\sigma_n}{\sigma_r}$。2）先对 A_{r-1} 交换第 r,r' 列，然后对中间约化矩阵第 r 列施行初等列变换 $\Leftrightarrow A_{r-1}I_{r,r'}N_r^{-1}$，同时写出 $\tilde A_0=\tilde A_0 I_{r,r'}$，这时可以确定 $h_{1r},h_{2r},\cdots,h_{r-1,r}$（后面不再改变），中间约化矩阵 $A_{r-1}I_{r,r'}N_r^{-1}$ 第 r 列改变后，这里特别结合约化矩阵第 r 列元素实际发生的行变换和列变换情况进行考察：

因元素 $(1,r)$、$(2,r)$ 没有参与行变换，只有一次初等列变换，确定 h_{1r}，h_{2r} 的式子：

$$h_{1r}=\tilde a_{1r}+\tilde a_{1,r+1}l_{r+1,r}+\cdots\tilde a_{1n}l_{nr}$$

$$h_{2r}=\tilde a_{2r}+\tilde a_{2,r+1}l_{r+1,r}+\cdots\tilde a_{2n}l_{nr}$$

因元素 $(3,r)$ 参与一次初等行变换，一次初等列变换，确定 h_{3r} 的式子：

$$h_{3r}=\tilde a_{3r}+\tilde a_{3,r+1}l_{r+1,r}+\cdots\tilde a_{3n}l_{nr}-\tilde l_{32}h_{2r}$$

因元素 $(4,r)$ 参与二次初等行变换，一次初等列变换，确定 h_{4r} 的式子：

$$h_{4r}=\tilde a_{4r}+\tilde a_{4,r+1}l_{r+1,r}+\cdots\tilde a_{4n}l_{nr}-\tilde l_{42}h_{2r}-\tilde l_{43}h_{3r}$$

$$\vdots$$

因元素 $(r-1,r)$ 参与 $r-3$ 次初等行变换，一次初等列变换，确定 $h_{r-1,r}$ 的式子：

$$h_{r-1,r}=\tilde a_{r-1,r}+\tilde a_{r-1,r+1}l_{r+1,r}+\cdots\tilde a_{r-1,n}l_{nr}-\tilde l_{r-1,2}h_{2r}-\tilde l_{r-1,3}h_{3r}-\cdots\tilde l_{r-1,r-2}h_{r-2,r}$$

结合行变换和列变换的情况继续考察其第 r 列第 $r\sim n$ 行的元素变化，分别写出 (r,r)，$(r+1,r)$，$\cdots$，(n,r) 位置上的元素内容为如下式子（记作※式）：

元素 (r,r) 参与 $r-2$ 次初等行变换，一次初等列变换，元素 $(r,r)\Leftrightarrow\tilde a_{rr}+\tilde a_{r,r+1}l_{r+1,r}+\cdots+\tilde a_{rn}l_{nr}-\tilde l_{r2}h_{2r}-\tilde l_{r3}h_{3r}-\cdots-\tilde l_{r,r-2}h_{r-2,r}-l_{r,r-1}h_{r-1,r}$，元素 $(r+1,r)$ 参与 $r-2$ 次初等行变换，一次初等列变换，元素 $(r+1,r)\Leftrightarrow\tilde a_{r+1,r}+\tilde a_{r+1,r+1}l_{r+1,r}+\cdots+\tilde a_{r+1,n}l_{nr}-\tilde l_{r+1,2}h_{2r}-\tilde l_{r+1,3}h_{3r}-\cdots-\tilde l_{r+1,r-2}h_{r-2,r}-l_{r+1,r-1}h_{r-1,r}$，$\cdots$，元素 (n,r) 参与 $r-2$ 次初等行变换，一次初等列变换，元素 $(n,r)\Leftrightarrow\tilde a_{nr}+\tilde a_{n,r+1}l_{r+1,r}+\cdots+\tilde a_{nn}l_{nr}-\tilde l_{n2}h_{2r}-\tilde l_{n3}h_{3r}-\cdots-\tilde l_{n,r-2}h_{r-2,r}-l_{n,r-1}h_{r-1,r}$。3）对 $A_{r-1}I_{r,r'}N_r^{-1}$ 交换第 r,r' 行，同时写出 $\tilde A_0=I_{r,r'}\tilde A_0$，这时确定 $h_{r,r-1}$，h_{rr}（分别为上步〇式子中和这步※式子中经过 $[r,r']$ 位置互相对换后的元素）：$h_{r,r-1}=$ 上步〇式中元素 $(r',r-1)$；$h_{rr}=$ 这步※式中元素 (r',r)，然后对约化矩阵 $I_{r,r'}A_{r-1}I_{r,r'}N_r^{-1}$ 的第 $r+1\sim n$ 行实施初等行变换 $\Leftrightarrow N_rI_{r,r'}A_{r-1}I_{r,r'}N_r^{-1}=A_r$，最后考察约化矩阵 A_r 第 r 列第 $r+1\sim n$ 行的元素内容改变，相当于在（中间约化矩阵 $A_{r-1}I_{r,r'}N_r^{-1}$ 元素）这步※式中元素 (r,r) 与元素 (r',r) 互相对换基础上各自最后加上一项变化形成，可以写出 A_r 中 $(r+1,r)$，$\cdots$，(n,r) 位置上的元素内容为如下式子（记作〇式）：

元素 $(r+1,r)\Leftrightarrow$ ※式中元素 $(r+1,r)-l_{r+1,r}h_{rr}$

$$\vdots$$

元素 $(r',r)\Leftrightarrow$ ※式中元素 $(r,r)-l_{r',r}h_{rr}$

$$\vdots$$

元素 $(n,r)\Leftrightarrow$ ※式中元素 $(n,r)-l_{nr}h_{rr}$（若 $n\neq r'$）

（或）元素 $(n,r)\Leftrightarrow$ ※式中元素 $(r,r)-l_{nr}h_{rr}$（若 $n=r'$）

中间约化矩阵 $\boldsymbol{A}_r$ 形式略写。4）对 $\tilde N_2^{-1},\tilde N_3^{-1},\cdots,N_{r-1}^{-1}$ 分别执行第 2 列，第 3 列，$\cdots$，第 $r-1$ 列向量元素的 $[r,r']$ 置换，更新得到 $\tilde N_2^{-1},\cdots,\tilde N_{r-1}^{-1}\Leftrightarrow\begin{cases}I_{r,r'}\tilde N_2^{-1}I_{r,r'}=\tilde N_2^{-1}\\ \quad\vdots\\ I_{r,r'}N_{r-1}^{-1}I_{r,r'}=\tilde N_{r-1}^{-1}\end{cases}$。（在第 1）步互相对换 σ_r 与 $\sigma_r{'}$ 时，该操作本质是对约化矩阵的部分元素实施行交换，而此时约化矩阵前面 $r-1$ 列对角线以下元素已约化为零，因此约化矩阵已约化的这部分元素本该实施的行交换操作在 $\tilde N_2^{-1},\tilde N_3^{-1},\cdots,\tilde N_{r-1}^{-1}$ 中替补进行，于是列向量 $\begin{pmatrix}1\\ \tilde l_{32}\\ \vdots\\ \tilde l_{r2}\\ \vdots\\ \tilde l_{n2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \tilde l_{43}\\ \vdots\\ \vdots\\ \tilde l_{n3}\end{pmatrix};\cdots;\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ l_{r,r-1}\\ \vdots\\ l_{n,r-1}\end{pmatrix}$ 中 $\tilde l_{r2}$ 与 $\tilde l_{r',2}$；$\tilde l_{r3}$ 与 $\tilde l_{r',3}$；$\cdots$；$l_{r,r-1}$ 与 $l_{r',r-1}$ 元素互相对换，所以特别有步骤 4）。

$\cdots$，$r=n-1$ 时，已得约化矩阵 A_{n-2}，1）由上步〇式，将约化矩阵 A_{n-2} 第 $n-2$ 列第 $n-1\sim n$ 行 $(n-1,n-2)$，$(n,n-2)$ 位置上的元素临时赋值为 σ_{n-1}，σ_n，比较其绝对值大小，$\max\limits_{n-1\leqslant i\leqslant n}|\sigma_i|=|\sigma_{(n-1)'}|$，确定 $(n-1)'$，对换 σ_{n-1} 与 $\sigma_{(n-1)'}$，重新排列 σ_{n-1}，σ_n，确定 $l_{n,n-1}=\dfrac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}$。2）对 A_{n-2} 交换第 $n-1$，$(n-1)'$ 列，再对约化矩阵第 $n-1$ 列施行列变换 $\Leftrightarrow A_{n-2}I_{(n-1),(n-1)'}N_{n-1}^{-1}$，同时写出 $\tilde A_0=\tilde A_0I_{(n-1),(n-1)'}$，这时确定 $h_{1,n-1}$，$h_{2,n-1}$，$\cdots$，$h_{n-2,n-1}$，考察约化矩阵第 $n-1$ 列改变后的元素内容，写出式子：

$$h_{1,n-1}=\tilde a_{1,n-1}+\tilde a_{1n}l_{n,n-1};$$

$$h_{2,n-1}=\tilde a_{2,n-1}+\tilde a_{2n}l_{n,n-1};$$

$$h_{3,n-1}=\tilde a_{3,n-1}+\tilde a_{3n}l_{n,n-1}-\tilde l_{32}h_{2,n-1};$$

$$h_{4,n-1}=\tilde a_{4,n-1}+\tilde a_{4n}l_{n,n-1}-\tilde l_{42}h_{2,n-1}-\tilde l_{43}h_{3,n-1};$$

$$\vdots$$

$$h_{n-2,n-1}=\tilde a_{n-2,n-1}+\tilde a_{n-2,n}l_{n,n-1}-\tilde l_{n-2,2}h_{2,n-1}-\tilde l_{n-2,3}h_{3,n-1}-\cdots\tilde l_{n-2,n-3}h_{n-3,n-1}$$

继续考察约化矩阵第 $n-1$ 列第 $n-1\sim n$ 行的元素内容改变，写出式子（记作※式）为：

元素 $(n-1,n-1)\Leftrightarrow\tilde a_{n-1,n-1}+\tilde a_{n-1,n}l_{n,n-1}-\tilde l_{n-1,2}h_{2,n-1}-\tilde l_{n-1,3}h_{3,n-1}-\cdots-l_{n-1,n-2}h_{n-2,n-1}$

元素 $(n,n-1)\Leftrightarrow\tilde a_{n,n-1}+\tilde a_{nn}l_{n,n-1}-\tilde l_{n2}h_{2,n-1}-\tilde l_{n3}h_{3,n-1}-\cdots-l_{n,n-2}h_{n-2,n-1}$

3）对 $A_{n-2}I_{(n-1),(n-1)'}N_{n-1}^{-1}$ 交换第 $n-1$，$(n-1)'$ 行，同时

写出 $\widetilde{A}_0=I_{(n-1),(n-1)'}\widetilde{A}_0$，这时可以确定 $h_{n-1,n-2}$，$h_{n-1,n-1}$ 的式子为：

$h_{(n-1),(n-2)}$ = 上步○式中元素 $((n-1)',n-2)$

$h_{(n-1),(n-1)}$ = 这步※式中元素 $((n-1)',n-1)$

再对约化矩阵的第 n 行实施初等行变换 $\Leftrightarrow N_{n-1}I_{(n-1),(n-1)'}A_{n-2}I_{(n-1),(n-1)'}N_{n-1}^{-1}=A_{n-1}$，最后，在考察约化矩阵 A_{n-1} 的第 $n-1$ 列第 n 行 $(n,n-1)$ 位置上的元素内容时需要注意，写出式子(记作○式)：若 $(n-1)'=n$，元素 $(n,n-1)\Leftrightarrow$ ※式中元素 $(n-1,n-1)-l_{n,n-1}h_{(n-1),(n-1)}$，若 $(n-1)'=n-1$，元素 $(n,n-1)\Leftrightarrow$ ※式中元素 $(n,n-1)-l_{n,n-1}h_{(n-1),(n-1)}$。至此约化矩阵 A_{n-1} 的前 n 行和前 $n-1$ 列元素已确定，至此约化已完成，$r=n-1$ 是约化最后一步，也即(最后约化矩阵)$A_{n-1}=H$，确定 $h_{n,n-1}$ 就是 A_{n-1} 在 $(n,n-1)$ 位置上的元素，即○式中元素 $(n,n-1)$。4)最后，分别对 $\widetilde{N}_2^{-1}\cdots N_{n-2}^{-1}$ 第 2 列，第 3 列，…，第 $n-2$ 列向量元素进行 $[(n-1),(n-1)']$ 置换，更新得到：

$$\widetilde{N}_2^{-1},\cdots,\widetilde{N}_{n-2}^{-1}\Leftrightarrow\begin{cases}I_{(n-1),(n-1)'}\widetilde{N}_2^{-1}I_{(n-1),(n-1)'}=\widetilde{N}_2^{-1}\\ \quad\vdots\\ I_{(n-1),(n-1)'}N_{n-2}^{-1}I_{(n-1),(n-1)'}=\widetilde{N}_{n-2}^{-1}\end{cases}$$

从 $r=2$ 开始到 $r=n-1$ 步递推约化已完成。当 $r=n$ 时，现在约化已结束，$A_{n-1}=H$，但还剩 A_{n-1} 的最后一列未知元素待给出。前面(从 $r=2$ 开始到 $r=n-1$ 步)第 r 步每步约化时先对约化矩阵的第 r 列元素实施初等列变换，再对约化矩阵的 $r+1\sim n$ 行元素实施初等行变换，而列变换和行变换之前先有行列交换，第 r 步约化完成已确定中间约化矩阵前 r 行 r 列的元素。现在考察 A_{n-1} 的第 n 列元素，可以看出，第 n 列未参与任一步约化的列变换，第 n 列共参与了 $n-2$ 步约化的行变换，(不妨假设约化矩阵从第 2 行起伴有行交换，从第 2 列起伴有列交换。)考察最后约化矩阵共 $n-2$ 步递推约化过程中第 n 列元素实际发生的行变换次数，结合原始矩阵经过全部行列交换后已形成 $\widetilde{A}_0$，分析(最后约化矩阵)H 的第 n 列元素应该存在有不同情形，得到如下结果：

约化矩阵第 1、2 行未发生初等行变换，有：

$h_{1n}=\widetilde{a}_{1n}$；$h_{2n}=\widetilde{a}_{2n}$

约化矩阵元素 $(3,n)$ 共参与初等行变换 1 次，有：

$h_{3n}=\widetilde{a}_{3n}-\widetilde{l}_{32}h_{2n}$

约化矩阵元素 $(4,n)$ 共参与初等行变换 2 次，有：

$h_{4n}=\widetilde{a}_{4n}-\widetilde{l}_{42}h_{2n}-\widetilde{l}_{43}h_{3n}$

约化矩阵元素 $(5,n)$ 共参与初等行变换 3 次，有：

$h_{5n}=\widetilde{a}_{5n}-\widetilde{l}_{52}h_{2n}-\widetilde{l}_{53}h_{3n}-\widetilde{l}_{54}h_{4n}$

$\vdots$

约化矩阵元素 $(n-1,n)$ 共参与初等行变换 $n-3$ 次，有：

$h_{n-1,n}=\widetilde{a}_{n-1,n}-\widetilde{l}_{n-1,2}h_{2n}-\widetilde{l}_{n-1,3}h_{3n}-\cdots-\widetilde{l}_{n-1,n-2}h_{n-2,n}$

约化矩阵元素 (n,n) 共参与初等行变换 $n-2$ 次，有：

$h_{nn}=\widetilde{a}_{nn}-\widetilde{l}_{n2}h_{2n}-\widetilde{l}_{n3}h_{3n}-\cdots-\widetilde{l}_{n,n-2}h_{n-2,n}-l_{n,n-1}h_{n-1,n}$

至此，$r=n$ 步全部步骤结束。最后约化矩阵 H 的元素及初等稳定矩阵 $\widetilde{N}_2^{-1},\cdots,\widetilde{N}_{n-2}^{-1},N_{n-1}^{-1}$ 的元素 h_{ij}，$\widetilde{l}_{ij}$ 全部结果都已得到。最后整理得：

$$\widetilde{N}_2^{-1}=I_{(n-1),(n-1)'}\cdots I_{r,r'}\cdots I_{3,3'}N_2^{-1}I_{3,3'}\cdots I_{r,r'}\cdots I_{(n-1),(n-1)'}$$

$$\vdots$$

$$\widetilde{N}_{r-1}^{-1}=I_{(n-1),(n-1)'}\cdots I_{r,r'}N_{r-1}^{-1}I_{r,r'}\cdots I_{(n-1),(n-1)'}$$

$$\vdots$$

$$\widetilde{N}_{n-2}^{-1}=I_{(n-1),(n-1)'}N_{n-2}^{-1}I_{(n-1),(n-1)'}$$

$$\widetilde{N}_{n-1}^{-1}=N_{n-1}^{-1}$$

可以看出：$I_{r,r'}$ 仅仅置换作用于 $\widetilde{N}_2^{-1},\cdots,\widetilde{N}_{r-1}^{-1}$，正如约化第 r 步 4)小步所述。由以上全部 $n-1$ 步步骤其间结合行列交换的递推约化过程清楚得出如下结论：由原始矩阵 $\boldsymbol{A}_0$ 开始的递推约化过程演变成为最后的约化矩阵 $\boldsymbol{H}$；经过全部行列交换的原始矩阵已变形成为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_0$，得到 $\widetilde{A}_0=I_{(n-1),(n-1)'}\cdots I_{2,2'}A_0I_{2,2'}\cdots I_{(n-1),(n-1)'}$；共 $n-2$ 步的递推约化过程中间生成一组初等稳定矩阵 $\widetilde{N}_2^{-1},\cdots,\widetilde{N}_{n-2}^{-1},N_{n-1}^{-1}$，进而得到单位下三角阵 $\widetilde{N}=\widetilde{N}_2^{-1}\widetilde{N}_3^{-1}\cdots\widetilde{N}_{n-2}^{-1}N_{n-1}^{-1}$，不难验证，以上递推约化方法的逻辑实现结果与第 1 部分①式矩阵运算 $\widetilde{A}_0\widetilde{N}=\widetilde{N}H$ 的准确计算结果是显然一致的。下面通过实例进行验证。

4 数值例子

给出一个 5 阶矩阵，采用带内积累加的四位十进位定点运算，用初等矩阵结合交换技术，

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}0.3200 & 0.2700 & 0.2300 & 0.3200 & 0.4000\\ 0.2500 & 0.0300 & 0.7100 & 0.2100 & 0.1700\\ 0.4300 & 0.7300 & 0.1300 & 0.3700 & 0.8500\\ 0.5300 & 0.2500 & 0.5100 & 0.6200 & 0.1600\\ 0.1600 & 0.6500 & 0.4600 & 0.5600 & 0.3200\end{bmatrix}$$

将 A_0 约化为上 *Hessenberg* 型。

解：$r=1$ 时，特别说明：从 A_0 直接得到 $A_1=A_0$；$h_{11}=a_{11}=0.3200$。

$r=2$ 时，1)比较 $a_{21},a_{31},a_{41},a_{51}$ 绝对值的大小，$\max\limits_{2\leqslant i\leqslant 5}|a_{i1}|=|a_{41}|$，确定 $2'=4$，并且 a_{21} 与 a_{41} 二元素互相对换，得到重新排列元素 $\widetilde{a}_{21},\widetilde{a}_{31},\widetilde{a}_{41},\widetilde{a}_{51}$，然后确定 $l_{32}=\dfrac{\widetilde{a}_{31}}{\widetilde{a}_{21}}=\dfrac{0.4300}{0.5300}=0.8113$；$l_{42}=\dfrac{\widetilde{a}_{41}}{\widetilde{a}_{21}}=\dfrac{0.2500}{0.5300}=0.4717$；$l_{52}=\dfrac{\widetilde{a}_{51}}{\widetilde{a}_{21}}=\dfrac{0.1600}{0.5300}=0.3019$。2)先对 A_1 交换第 2、4 列，然后对第 2 列进行初等列变换 $\Leftrightarrow A_1I_{2,4}N_2^{-1}$，同时写出：

$$\widetilde{A}_0=A_0I_{24}=\begin{bmatrix}0.3200 & 0.3200 & 0.2300 & 0.2700 & 0.4000\\ 0.2500 & 0.2100 & 0.7100 & 0.0300 & 0.1700\\ 0.4300 & 0.3700 & 0.1300 & 0.7300 & 0.8500\\ 0.5300 & 0.6200 & 0.5100 & 0.2500 & 0.1600\\ 0.1600 & 0.5600 & 0.4600 & 0.6500 & 0.3200\end{bmatrix}$$

这时可以确定 $h_{12}=\widetilde{a}_{12}+\widetilde{a}_{13}l_{32}+\widetilde{a}_{14}l_{42}+\widetilde{a}_{15}l_{52}=0.7547$，并得到约化矩阵 $A_1I_{2,4}N_2^{-1}$ 的 $(2,2)$，$(3,2)$，$(4,2)$，$(5,2)$ 位置上的元素，写出如下式子(记作※式)并分别算出：

元素 $(2,2)=\widetilde{a}_{22}+\widetilde{a}_{23}l_{32}+\widetilde{a}_{24}l_{42}+\widetilde{a}_{25}l_{52}=0.8515$

元素 $(3,2)=\widetilde{a}_{32}+\widetilde{a}_{33}l_{32}+\widetilde{a}_{34}l_{42}+\widetilde{a}_{35}l_{52}=1.0764$

元素 $(4,2)=\widetilde{a}_{42}+\widetilde{a}_{43}l_{32}+\widetilde{a}_{44}l_{42}+\widetilde{a}_{45}l_{52}=1.2000$

元素 $(5,2)=\widetilde{a}_{52}+\widetilde{a}_{53}l_{32}+\widetilde{a}_{54}l_{42}+\widetilde{a}_{55}l_{52}=1.3364$

3)对 $A_1 I_{2,4} N_2^{-1}$ 交换第 2、4 行,同时写出:

$$\tilde{A}_0 = I_{24}\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 0.3200 & 0.3200 & 0.2300 & 0.2700 & 0.4000 \\ 0.5300 & 0.6200 & 0.5100 & 0.2500 & 0.1600 \\ 0.4300 & 0.3700 & 0.1300 & 0.7300 & 0.8500 \\ 0.2500 & 0.2100 & 0.7100 & 0.0300 & 0.1700 \\ 0.1600 & 0.5600 & 0.4600 & 0.6500 & 0.3200 \end{bmatrix}$$

这时可以确定 $h_{21}=\tilde{a}_{21}=0.5300$,$h_{22}=$※ 式中元素(4,2)=1.2000,再对约化矩阵的第 3－5 行实施初等行变换⇔$N_2 I_{2,4} A_1 I_{2,4} N_2^{-1}=A_2$,现在考察约化矩阵 A_2 第 2 列第 3～5 行元素的改变内容,相当于在前面※式中元素(2,2)与元素(4,2)互换基础上最后加上一项形成,写出 A_2 中(3,2),(4,2),(5,2) 位置上的元素内容为如下式子(记作〇 式):

元素(3,2)=※式中元素(3,2)$-l_{32}h_{22}=1.0764-0.8113*1.2000=0.1028$

元素(4,2)=※式中元素(2,2)$-l_{42}h_{22}=0.8515-0.4717*1.2000=0.2855$

元素(5,2)=※式中元素(5,2)$-l_{52}h_{22}=1.3364-0.3019*1.2000=0.9741$

此步完成的中间约化矩阵 $\boldsymbol{A}_2$,写出为如下内容:

$$A_2=\begin{bmatrix} 0.3200 & 0.7547 & 0.2300 & 0.2700 & 0.4000 \\ 0.5300 & 1.2000 & 0.5100 & 0.2500 & 0.1600 \\ 0 & 0.1028 & -0.2838 & 0.5272 & 0.7202 \\ 0 & 0.2855 & 0.4694 & -0.0879 & 0.0945 \\ 0 & 0.9741 & 0.3060 & 0.5745 & 0.2717 \end{bmatrix}$$

$r=3$ 时,1)已得约化矩阵 A_2,其第 2 列的第 3－5 行元素进行临时赋值为 $\sigma_i(i=3,\cdots,5)$,比较绝对值大小,$\max\limits_{3\leqslant i\leqslant 5}|\sigma_i|=|\sigma_5|$,确定 $3'=5$,将 σ_3 与 σ_5 互相对换,重新排列 $\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5$,然后确定 $l_{43}=\frac{\sigma_4}{\sigma_3}=\frac{0.2855}{0.9741}=0.2930$;$l_{53}=\frac{\sigma_5}{\sigma_3}=\frac{0.1028}{0.9741}=0.1056$。2)先对 A_2 交换第 3、5 列,同时写出:

$$\tilde{A}_0 = \tilde{A}_0 I_{35} = \begin{bmatrix} 0.3200 & 0.3200 & 0.4000 & 0.2700 & 0.2300 \\ 0.5300 & 0.6200 & 0.1600 & 0.2500 & 0.5100 \\ 0.4300 & 0.3700 & 0.8500 & 0.7300 & 0.1300 \\ 0.2500 & 0.2100 & 0.1700 & 0.0300 & 0.7100 \\ 0.1600 & 0.5600 & 0.3200 & 0.6500 & 0.4600 \end{bmatrix}$$

再对约化矩阵第 3 列施行初等列变换⇔$A_2 I_{35} N_3^{-1}$,这时可以确定 h_{13},h_{23}元素内容,写出式子并算出:

$$\begin{aligned} h_{13} &= \tilde{a}_{13}+\tilde{a}_{14}l_{43}+\tilde{a}_{15}l_{53} \\ &= 0.4000+0.2700*0.2930+0.2300*0.1056 \\ &= 0.5034 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{23} &= \tilde{a}_{23}+\tilde{a}_{24}l_{43}+\tilde{a}_{25}l_{53} \\ &= 0.1600+0.2500*0.2930+0.5100*0.1056 \\ &= 0.2871 \end{aligned}$$

现在考察中间约化矩阵 $A_2 I_{35} N_3^{-1}$(3,3),(4,3),(5,3)位置上的元素内容,写出式子(记作※ 式)并算出:

元素(3,3)$=\tilde{a}_{33}+\tilde{a}_{34}l_{43}+\tilde{a}_{35}l_{53}-l_{32}h_{23}$
$=0.8500+0.7300*0.2930+0.1300*0.1056-0.8113*0.2871$
$=0.8447$

元素(4,3)$=\tilde{a}_{43}+\tilde{a}_{44}l_{43}+\tilde{a}_{45}l_{53}-l_{42}h_{23}$
$=0.1700+0.0300*0.2930+0.7100*0.1056-0.4717*0.2871$
$=0.1183$

元素(5,3)$=\tilde{a}_{53}+\tilde{a}_{54}l_{43}+\tilde{a}_{55}l_{53}-l_{52}h_{23}$
$=0.3200+0.6500*0.2930+0.4600*0.1056-0.3019*0.2871$
$=0.4724$

3)对 $A_2 I_{35} N_3^{-1}$ 交换第 3、5 行,同时写出:

$$\tilde{A}_0 = I_{35}\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 0.3200 & 0.3200 & 0.4000 & 0.2700 & 0.2300 \\ 0.5300 & 0.6200 & 0.1600 & 0.2500 & 0.5100 \\ 0.1600 & 0.5600 & 0.3200 & 0.6500 & 0.4600 \\ 0.2500 & 0.2100 & 0.1700 & 0.0300 & 0.7100 \\ 0.4300 & 0.3700 & 0.8500 & 0.7300 & 0.1300 \end{bmatrix}$$

这时可以确定 h_{32},h_{33}:

h_{32}=上步〇式中元素(5,2)=0.9741

h_{33}=这步※式中元素(5,3)=0.4724

再对约化矩阵 $I_{35}A_2 I_{35}N_3^{-1}$ 的第 4、5 行实施初等行变换⇔$N_3 I_{35} A_2 I_{35} N_3^{-1}=A_3$,现在考察约化矩阵 $\boldsymbol{A}_3$ 第 3 列第 4－5 行元素的改变内容,相当于在前面※式中元素(3,3),元素(5,3)互换基础上各自最后加上一项,写出 A_3 中(4,3),(5,3)位置上的元素内容为如下式子并算出(记作〇式):

元素(4,3)=※式中元素(4,3)$-l_{43}h_{33}=0.1183-0.2930*0.4724=-0.0201$

元素(5,3)=※式中元素(3,3)$-l_{53}h_{33}=0.8447-0.1056*0.4724=0.7948$

4)单独更新,对 N_2^{-1} 执行第 2 列向量元素的[3,5]置换,更新得到:

$$\tilde{N}_2^{-1} \Leftrightarrow I_{35}N_2^{-1}I_{35}=\tilde{N}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3019 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4717 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.8113 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$r=4$ 时,1)已得约化矩阵 $\boldsymbol{A}_3$,由上步〇式 ,将约化矩阵 A_3 第 3 列第 4－5 行元素临时赋值为 $\sigma_4=-0.0201$,$\sigma_5=0.7948$,比较其绝对值大小,$\max\limits_{4\leqslant i\leqslant 5}|\sigma_i|=|\sigma_5|$,确定 $4'=5$,将 σ_4 与 σ_5 互相对换,重新排列 σ_4,σ_5,然后确定 $l_{54}=\frac{\sigma_5}{\sigma_4}=\frac{-0.0201}{0.7948}=-0.0253$。2)先对 A_3 交换第 4、5 列,再对中间约化矩阵第 4 列施行初等列变换⇔$A_3 I_{45} N_4^{-1}$,同时写出:

$$\tilde{A}_0 = \tilde{A}_0 I_{45} = \begin{bmatrix} 0.3200 & 0.3200 & 0.4000 & 0.2300 & 0.2700 \\ 0.5300 & 0.6200 & 0.1600 & 0.5100 & 0.2500 \\ 0.1600 & 0.5600 & 0.3200 & 0.4600 & 0.6500 \\ 0.2500 & 0.2100 & 0.1700 & 0.7100 & 0.0300 \\ 0.4300 & 0.3700 & 0.8500 & 0.1300 & 0.7300 \end{bmatrix}$$

这时确定 h_{14},h_{24},h_{34},对中间约化矩阵第 4 列施行初等

列变换后考察第4列元素改变内容，写出式子为：

$$h_{14}=\tilde{a}_{14}+\tilde{a}_{15}l_{54}=0.2300+0.2700*(-0.0253)$$
$$=0.2232$$

$$h_{24}=\tilde{a}_{24}+\tilde{a}_{25}l_{54}=0.5100+0.2500*(-0.0253)$$
$$=0.5037$$

$$h_{34}=\tilde{a}_{34}+\tilde{a}_{35}l_{54}-\tilde{l}_{32}h_{24}$$
$$=0.4600+0.6500*(-0.0253)-0.3019*0.5037$$
$$=0.2915$$

继续考察第4列第4、5行的元素改变内容，写出如下式子并算出(※式)：

$$\text{元素}(4,4)=\tilde{a}_{44}+\tilde{a}_{45}l_{54}-\tilde{l}_{42}h_{24}-l_{43}h_{34}$$
$$=0.7100+0.0300*(-0.0253)-0.4717*0.5037-0.2930*0.2915$$
$$=0.3862$$

$$\text{元素}(5,4)=\tilde{a}_{54}+\tilde{a}_{55}l_{54}-\tilde{l}_{52}h_{24}-l_{53}h_{34}$$
$$=0.1300+0.7300*(-0.0253)-0.8113*0.5037-0.1056*0.2915$$
$$=-0.3279$$

3)先对约化矩阵 $A_3I_{45}N_4^{-1}$ 交换第4、5行，同时写出：

$$\tilde{A}_0=I_{45}\tilde{A}_0$$
$$=\begin{bmatrix}0.3200&0.3200&0.4000&0.2300&0.2700\\0.5300&0.6200&0.1600&0.5100&0.2500\\0.1600&0.5600&0.3200&0.4600&0.6500\\0.4300&0.3700&0.8500&0.1300&0.7300\\0.2500&0.2100&0.1700&0.7100&0.0300\end{bmatrix}$$

这时确定 h_{43}，h_{44} 的式子：

h_{43} = 上步○式中元素(5,3) = 0.7948

h_{44} = 这步※式中元素(5,4) = −0.3279

再对约化矩阵 $I_{45}A_3I_{45}N_4^{-1}$ 第5行实施初等行变换 $\Leftrightarrow N_4I_{45}A_3I_{45}N_4^{-1}=A_4$，最后考察约化矩阵 $A_4(5,4)$ 位置的元素内容需注意，因 $5=4'$，则元素(5,4)⇔※式中元素$(4,4)-l_{54}h_{44}=0.3862-(-0.0253)*(-0.3279)=0.3779$。($r=4$ 是约化最后一步)至此约化已完成，$A_4=H$，这时确定 $h_{54}=0.3779$。

4)更新矩阵，对 $\tilde{N}_2^{-1}$，N_3^{-1} 分别执行第2列，第3列列向量元素的[4,5]置换，更新得到：

$$\tilde{N}_2^{-1},\tilde{N}_3^{-1}\Leftrightarrow I_{45}\tilde{N}_2^{-1}I_{45}=\tilde{N}_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0.3019&1&0&0\\0&0.8113&0&1&0\\0&0.4717&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$I_{45}N_3^{-1}I_{45}=\tilde{N}_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0.1056&1&0\\0&0&0.2930&0&1\end{bmatrix}$$

N_4^{-1} 没有置换不用更新。

$$N_4^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-0.0253&1\end{bmatrix}$$

当 $r=5$ 时最后一步，经过前面共3步的递推约化过程已完成，原始矩阵经过全部行列交换形成的 $\tilde{A}_0$ 已经得到，(最后约化矩阵)$A_4=H$ 现在还剩最后一列未知元素待给出，根据最后约化矩阵第5列元素实际发生的行变换次数考察，有如下结果：

$$h_{15}=\tilde{a}_{15}=0.2700$$

$$h_{25}=\tilde{a}_{25}=0.2500$$

$$h_{35}=\tilde{a}_{35}-\tilde{l}_{32}h_{25}=0.6500-0.3019*0.2500=0.5745$$

$$h_{45}=\tilde{a}_{45}-\tilde{l}_{42}h_{25}-\tilde{l}_{43}h_{35}$$
$$=0.7300-0.8113*0.2500-0.1056*0.5745$$
$$=0.4665$$

$$h_{55}=\tilde{a}_{55}-\tilde{l}_{52}h_{25}-\tilde{l}_{53}h_{35}-l_{54}h_{45}$$
$$=0.0300-0.4717*0.2500-0.2930*0.5745-(-0.0253)*0.4665$$
$$=-0.2445$$

至此上 Hessenberg 型的最后约化矩阵 $\boldsymbol{H}$ 及初等稳定矩阵 $\tilde{N}_2^{-1}$，$\tilde{N}_3^{-1}$，N_4^{-1} 都已得到，全部元素结果 h_{ij}，$\tilde{l}_{ij}$ 都已给出，前面 $\tilde{A}_0$ 也已给出，写出全部4个步骤的递推约化过程，计算得到的最后约化矩阵和约化结果 H，$\tilde{N}$：

$$H=\begin{bmatrix}0.3200&0.7547&0.5034&0.2232&0.2700\\0.5300&1.2000&0.2871&0.5037&0.2500\\0&0.9741&0.4724&0.2915&0.5745\\0&0&0.7948&-0.3279&0.4665\\0&0&0&0.3779&-0.2445\end{bmatrix}$$

$$\tilde{N}=\tilde{N}_2^{-1}\tilde{N}_3^{-1}N_4^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0.3019&1&0&0\\0&0.8113&0&1&0\\0&0.4717&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0.1056&1&0\\0&0&0.2930&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-0.0253&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0.3019&1&0&0\\0&0.8113&0.1056&1&0\\0&0.4717&0.2930&-0.0253&1\end{bmatrix}$$

矩阵结果进行运算：计算的 $\tilde{N}$ 和 H 的准确乘积以及计算的 $\tilde{A}_0$ 和 $\tilde{N}$ 的准确乘积，如果不考虑舍入误差，它们应该是相等的。下面算式结果得出结论：递推约化实现方法不仅基于矩阵理论满足依据又是实际计算可行的。

$$\tilde{A}_0\tilde{N}=\begin{bmatrix}0.3200&0.754718&0.503398&0.223169&0.2700\\0.5300&1.199992&0.287106&0.503675&0.2500\\0.1600&1.336411&0.559026&0.443555&0.6500\\0.4300&1.076425&1.077618&0.111531&0.7300\\0.2500&0.851497&0.253766&0.709241&0.0300\end{bmatrix}$$

$$\tilde{N}H=\begin{bmatrix} 0.3200 & 0.7547 & 0.5034 & 0.2232 & 0.2700 \\ 0.5300 & 1.2000 & 0.2871 & 0.5037 & 0.2500 \\ 0.160007 & 1.336380 & 0.55907549 & 0.44356703 & 0.64997500 \\ 0.429989 & 1.07642496 & 1.07760967 & 0.11153421 & 0.72999220 \\ 0.250001 & 0.85145130 & 0.25372983 & 0.70920066 & 0.02995105 \end{bmatrix}$$

对于约化为 Hesserberg 矩阵,使用初等稳定矩阵的约化变换方法通常比 Householder 方法更精确,如果可以利用计算机内积累加的运算优点,这个方法显得十分紧凑。它比三角形化方法[3]也要减少乘法量,若用初等相似变换把矩阵约化为 Hessenberg 型的三角形化方法,那么第 r 列中($n-r-1$)个零元素需要用($n-r-1$)个稳定的初等矩阵 $M_{j,r+1}$ 逐个引进,而不是一个稳定矩阵 $\tilde{N}_{r+1}$,这种情况下第 $r+1$ 步细分为($n-r-1$)小步,每一小步引进一个零(矩阵 $\boldsymbol{M}_{ij}$,除了(i,j)元素为乘子外,它等于单位矩阵)。

参 考 文 献

[1] GOLUB G H,VAN LOAN C F. MATRIX COMPUTATIONS[M]. Dalian:Dalian University of Technology Press,1988:54-57.

[2] WILKINSON J H. The algebraic eigenvalue problem[M]. Beijing:Science Press,1987:368-378,427.

[3] SU E. Matrix Triangular Decomposition Improvement of Pre Order Principal Sub Determinant[J]. Computer Science,2017,11(44):148-154.

SU Er,born in 1969,postgraduate,lecturer. Her main research interests include matrix algebra and so on.

(上接第 622 页)

[9] ALKINANI H H,AL-HAMEEDI A T,DUNN-NORMAN S,et al. Dynamic Neural Network Model to Predict the Rate of Penetration Prior to Drilling[C] // The 53rd U. S. Rock Mechanics/Geomechanics Symposium. New York City,New York,2019.

[10] BING Z,WEINAN L,ZHEN W,et al. Identification Strategy of Driving Style Based on Random Forest[J]. Automotive Engineering,2019,41(2):213-218,224.

[11] JIANJUN H,SHAOWEI N,JIANPING L,et al. Research on Prediction and Control of Mechanical Ventilation Temperature of Grain Pile Based on Random Forest Algorithm[J]. Journal of Henan University of Technology (Natural Science Edition),2019,40(5):107-113.

[12] LIU Y,CHENG H,KONG X,et al. Intelligent wind turbine blade icing detection using supervisory control and data acquisition data and ensemble deep learning[J]. Energy Science & Engineering,2019,7(6):2633-2645

[13] LIU Z,WEI M,ZHANG P,et al. Drilling Localization and Error Analysis of Radial Horizontal Jet Drilling Based on Magnetic Gradient Tensor[J]. Energies,2020,13:4989.

[14] NAN L,WENCHUN Z,YING L,et al. Prediction of Deep Foundation Pit Horizontal Displacement Based on Random Forest Model in Seasonal Frozen Region[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering,2018,14(S1):357-362.

[15] ARABJAMALOEI R,EDALATKHAH S,JAMSHIDI E. A New Approach to Well Trajectory Optimization Based on Rate of Penetration and Wellbore Stability[J]. Liquid Fuels Technology,2011,29(6):588-600.

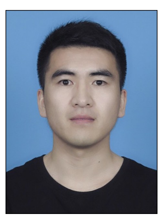
[16] YUANHUA L,YUYU Z,ZHENG L,et al. The Developments of ROP Prediction for Oil Drilling[J]. Petroleum Drilling Techniques,2004,1:10-13.

[17] DENG Y,CHEN M,JIN Y,et al. Theoretical and experimental study on the penetration rate for roller cone bits based on the rock dynamic strength and drilling parameters[J]. Journal of Natural Gas Science and Engineering,2016,36:117-123.

[18] YAN T,JINGLIN D. Temperature prediction using long short term memory network based on random forest[J]. Computer Engineering and Design,2019,40(3):737-743.

[19] WANG Z,LAI C,CHEN X,et al. Flood hazard risk assessment model based on random forest[J]. Journal of Hydrology,2015,527:1130-1141.

[20] 刘胜娃,孙俊明,高翔,等. 基于人工神经网络的钻井机械钻速预测模型的分析与建立[J]. 计算机科学,2019(Z6):605-608.



XU Ming-ze,born in 1996. His main research interests include ROP and big data processing.

WEI Ming-hui,born in 1988,Ph.D,associate professor. His main research interests include downhole acceleration and downhole instrument cooling.