计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.200400143

基于非凸低秩矩阵逼近和全变分正则化的高光谱图像去噪

陶星朋　徐宏辉　郑建炜　陈婉君
浙江工业大学计算机科学与技术学院　杭州 310023
(txpdyt@163.com)

摘　要　高光谱图像在采集过程中经常受到混合噪声的干扰,严重影响了图像后续应用的性能,因此图像去噪已成为一个极其重要的预处理过程。文中采用非凸正则项代替传统的核范数重新构造逼近问题,使稀疏正则项更贴近本质秩函数的属性,进而提出了一种将非凸代理函数、全变分正则项和 $l_{2,1}$ 范数集成于统一框架的混合噪声去除算法。所提算法旨在将退化的高光谱图像以矩阵的形式分解为低秩分量和稀疏项,并利用全变分正则化保持边缘信息,提高了高光谱图像的空间分段平滑性。最后利用非凸代理函数的特殊性质,采用一种基于增广拉格朗日乘子法的迭代算法进行变量优化求解。通过多组实验进行验证,结果表明所提算法不仅能有效地去除混合噪声,而且能较好地保持图像的结构和细节,与现有的其他高光谱去噪方法相比,其在视觉效果和定量评价结果上都明显提升。

关键词:高光谱图像;混合噪声;全变分;非凸正则项;增广拉格朗日乘子法
中图法分类号　TP391.41

Hyperspectral Image Denoising Based on Nonconvex Low Rank Matrix Approximation and Total Variation Regularization

TAO Xing-peng, XU Hong-hui, ZHENG Jian-wei and CHEN Wan-jun
School of Computer Science and Technology, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China

Abstract　Hyperspectral images (HSIs) are often interfered by hybrid noise in the acquisition process, which seriously weakens the performance of subsequent applications of HSIs. In this paper, nonconvex regularizer is used to reconstruct the approximation problem instead of the traditional nuclear norm, which guarantees a tighter approximation of the original sparsity constrained rank function. Then a hybrid noise removal model integrating nonconvex surrogate function, total variation regularization and $l_{2,1}$ norms together into a unified framework is proposed. The proposed algorithm aims to decompose the degraded HSIs into low rank components and sparse terms in the matrix mode, and uses total variation regularization to maintain edge information and improve the spatial piecewise smoothness of the HSIs. Finally, using the special properties of nonconvex surrogate function, an iterative algorithm based on augmented Lagrangian multiplier method is used for optimization. Extensive experiments on several well-known datasets are conducted for model evaluation, and the results show that the proposed algorithm can not only effectively remove hybrid noise, but also can better maintain the structure and details of the images. Compared with other existing hyperspectral denoising methods, the visual effects and quantitative evaluation results of the proposed algorithm are significantly better.

Keywords　Hyperspectral image, Hybrid noise, Total variation, Nonconvex regularizer, Augmented lagrangian multipliers

1　引言

近年来,遥感技术在理论、技术和应用上均发生了重大的变化和革新,其中高光谱图像(Hyperspectral Image, HSI)技术的出现和发展较为突出。高光谱图像数据通过高光谱分辨率传感器获取,由数百个相邻的窄光谱带图像组合而成,可以提供同一场景的数百个连续波段的光谱信息[1]。因此,高光谱图像在食品安全、生物医学成像、军事监视等领域有着广泛

到稿日期:2020-04-30　返修日期:2020-08-24
基金项目:国家重点研发计划项目(2018YFE0126100);国家自然科学基金(61602413);浙江省自然科学基金(LY19F030016);浙江省实验室开放研究项目(2019KD0AD01/007);国家卫生委员会科研基金(WKJ-ZJ-2102);浙江省教育厅项目(Y201941027)
This work was supported by the National Key R&D Program of China (2018YFE0126100), National Natural Science Foundation of China (61602413), Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (LY19F030016), Open Research Projects of Zhejiang Lab (2019KD0AD01/007), Scientific Research Fund of the National Health Commission of China (WKJ-ZJ-2102) and Program of Department of Education of Zhejiang Province (Y201941027).
通信作者:陈婉君(wanjun@zjut.edu.cn)

的应用。然而，由于光子效应、相机传感器阵列故障、硬件存储位置错误等原因，高光谱图像不可避免地受到了各种噪声的污染，包括高斯噪声、脉冲噪声、条纹等[2]。混合噪声的存在严重影响了成像质量和视觉效果，降低了数据的可靠性，更限制了后续处理工作的精度，包括图像分类[3]、目标检测[4]、压缩感知等。因此，作为高光谱图像应用的预处理步骤，去噪是一个有意义且富有挑战性的研究课题[5]。

迄今为止，许多不同去噪方法被提出用于恢复高光谱图像。高光谱数据包含数百个光谱通道，每个通道可视为一个灰度图像。传统算法利用逐波段的方式对这些灰度图像进行去噪，如基于非局部的算法[6]、K-SVD[7]、块匹配三维滤波(BM3D)[8]等。其在处理过程中忽略了不同光谱波段之间的强相关性，通常会导致去噪性能较差。此外，将空间信息与光谱信息相结合的方法也取得了显著的进展。Othman 等[9]提出了空间-光谱衍生域的混合小波收缩模型。该模型利用了信号在空间和光谱维数之间的规律性差异，但仍然存在两个问题。一方面，不同波段的噪声强度往往是不同的，某些特定波段可能被强噪声污染，在对低信噪比(Singal Noise Ratio, SNR)波段去噪的同时有效地保护高信噪比波段是一种挑战；另一方面，噪声通常是混合存在的，不同类型的噪声，包括高斯噪声、脉冲噪声和条纹等，其特性也各不相同。针对存在的问题，本文重点研究将全变分(Total Variation, TV)正则项与非凸低秩模型[10]相结合并将脉冲噪声建模为稀疏噪声的去噪方法。与传统核范数约束相比，本文提出的非凸正则项可以增强对较小奇异值的惩罚并减少对较大奇异值的惩罚，且所提约束函数仅需调整一个参数。此外，通过 TV 正则项可以有效地保持边缘信息，提高图像的空间分段平滑性。

2 相关工作

高光谱图像本质上可以看作是一个三维数组，根据这一特性，Li 等[11]和 Renard 等[12]提出基于张量的多线性数据分析方法。到目前为止，以张量为基础的 HSI 去噪模型主要有两种形式：CP 分解(Canonical Polyadic, CP)和 Tucker 分解。但这类方法仍存在两点不足：一方面，计算 CP 的秩是 NP 难问题，因此张量的低秩 CP 近似值无法得到最优解；另一方面，Tucker 分解并不是唯一的，核张量和 n-模张量积的应用会导致空间细节信息的丢失。近年来，全局谱相关和非局部跨空间自相似作为先验信息被广泛应用。全局谱相关意味着图像中不同的光谱具有高度相关性，在数学上，将高光谱图像按列或行展开可以表示为矩阵模式，且相应数据矩阵具有低秩性；非局部跨空间自相似指通过给定的 patch 可以找出与之相似的 patch，利用稀疏矩阵表示非局部信息[13]。基于此，Zhang 等[14]提出了基于低秩矩阵恢复(Low-Rank Matrix Recovery, LRMR)的 HSI 去噪方法，该方法受鲁棒主成分分析[15](Robust Principal Component Analysis, RPCA)思想的启发，将 HSI 分成多个重叠 patch，按字典顺序排列成二维矩阵，再优化每个 patch，从而达到去噪的效果。针对不同波段噪声方差的不同，He 等[16]提出一种噪声调整迭代的低秩矩阵近似方法(Noise-Adjusted Iterative Low-Rank Matrix Approximation, NAILRMA)，其迭代正则化的基本思想是将每次迭代输出的去噪后的图像作为下一次迭代的输入图像。全变分正则化是一种有效的图像处理方法，He 等[17]提出了基于 TV 的高光谱图像恢复，将灰度图像中采用的 TV 正则项去噪拓展到 HSI 中的逐波段方式。Wang 等[18]在张量空间中将 Tucker 分解与 TV 结合，提出基于全变分正则项的低秩张量分解模型(Total Variation Regularized Low-Rank Tensor Decomposition, LRTDTV)对 HSI 进行去噪。进一步地，He 等[19]利用全局空间-光谱全变分正则化的图像重构策略，保证重构后图像的全局空间-光谱平滑性，提出了全局空间-光谱全变分正则化局部低秩矩阵恢复模型(Local Low-Rank Matrix Recovery and Global Spatial-Spectral Total Variation, LLRGTV)。上述算法都通过低秩性、凸函数、邻域相似性等先验条件来构建目标模型以达到去噪效果，其中低秩模型最经典的正则约束项为核范数，具备严格的理论支撑且在实际应用中已取得一定的成果。但是，核范数将所有奇异值相加，并不能像秩函数一样平等地对待不同奇异值，意味着较大的奇异值受到的惩罚较大。众所周知，较大的奇异值对应于图像的主要信息分量，而较小的奇异值则更大概率地对应于噪声分量[20]。因此，核范数的收缩效应将导致一个有偏估计量[21]。此外，低秩矩阵应满足的非相干性假设在实际场景中难以实现。随着矩阵维数的增大，凸松弛替代函数的收敛速度会逐渐变慢。因此，受传统的压缩感知理论的启发，利用非凸函数[21]代替核范数来逼近秩函数，能更准确地从退化的 HSI 中提取低秩分量，并且使得较大的奇异值受到较小的惩罚。

本文对受到混合噪声污染的高光谱图像进行去噪研究，其中混合噪声包括高斯噪声、脉冲噪声条纹等。一方面，根据 HSI 处于低秩子空间的假设，将脉冲噪声作为稀疏噪声进行建模[22]，利用非凸低秩矩阵分解可以有效地分离干净图像和稀疏噪声。但是，单纯采用低秩和稀疏约束无法针对高斯噪声获得良好的恢复性能，而且随着高斯噪声强度的增大，低秩和稀疏矩阵的可分离性会明显减弱。另一方面，HSI 的空间维数是分段光滑的，利用 TV 正则项可以有效去除高斯噪声。基于此，本文提出了一种结合非凸低秩矩阵分解和 TV 正则化的去噪算法，利用低秩模型获取光谱相关性，利用 TV 正则化获取空间分段平滑结构。本文的主要贡献如下：

(1)提出了一种新的非凸正则项，只需要调整一个参数，就可构建低秩矩阵分解模型，去除 HSI 中的混合噪声；实现了对奇异值的稀疏逼近，且自动获取固有的秩信息。

(2)在低秩矩阵分解模型中加入 TV 正则项，利用低秩矩阵分解并分离稀疏噪声中的干净光谱信号，利用 TV 正则项去除高斯噪声，有效地保持了边缘信息，提高了图像的空间分段平滑性。

(3)利用具有鲁棒性的基于增广拉格朗日乘子法(Augmented Lagrangian Multiplier, ALM)的迭代算法对目标模型进行求解。实验结果表明，本文算法易于收敛并能获得全局最优解。与现有的众多去噪方法相比，该算法在定量评价与可视化对比中都有较好的表现。

本文第 3 节详细分析了应用于 HSI 去噪的低秩模型及 TV 正则项，介绍了提出的非凸约束函数，并结合 TV 项和稀

疏范数构建高光谱图像修复算法（Nonconvex Low-Rank Matrix Approximation and Total Variation，NonLRMA-TV），再采用 ALM 方法进行优化；第 4 节进行了多组对比实验，验证了所提算法的性能；最后总结全文。

3 算法的提出与优化

3.1 LRMR 模型

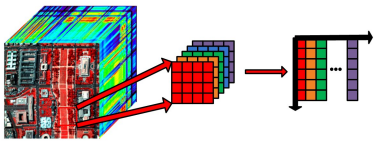
因相邻像素的谱带之间具有较为显著的相关性，根据 HSI 所构建的 Casorati 矩阵具有明显的低秩性。在低秩约束下，由光谱形成的子空间可以被很好地正则化。图 1 给出了 HSI 的低秩性，其中图 1(a)为高光谱图像 Washington DC Mall，图 1(b)是从该图像中提取的 patch，图 1(c)则是相应的 Casorati 矩阵。因相邻空间和谱带像素之间的相似性，该矩阵具备明显的低秩性。进一步考虑稀疏噪声，则 HSI 退化模型可以简单描述为：

$$y=l+s+n \tag{1}$$

其中，y 为受噪声污染的图像，l 表示具备低秩结构的干净图像，s 表示稀疏噪声，n 表示高斯噪声。y,l,s 和 n 都是大小为 $M\times N\times K$ 的三阶张量，M,N 分别代表图像的宽和高，K 代表谱带的数量。对于以像素(i,j)为中心、大小为 $q\times q\times K$ 的子立方体，按字典顺序重新排列得到具有空间模式和光谱模式的矩阵 $\boldsymbol{Y}\in\mathbb{R}^{q^2\times K}$。因此，上述退化模型可转化为以下矩阵形式：

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{N} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{L}$ 具有低秩性，矩阵 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{S},\boldsymbol{N}$ 的大小与 $\boldsymbol{Y}$ 相同。



(a) (b) (c)

图 1 高光谱图像的低秩属性

Fig. 1 Low rank property of hyperspectral image

LRMR 模型最早由 Candès 等[15]提出，是一种被称为 RPCA 的凸优化框架。该模型从自然图像的低秩性出发，采用低秩矩阵逼近（Low-Rank Matrix Approximation，LRMA）技术恢复清晰图像。目前，RPCA 已被成功应用于 HSI 去噪应用任务[23]，其目标函数可表示为：

$$\min_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{S}} rank(\boldsymbol{L})+\lambda\|\boldsymbol{S}\|_0 \quad \text{s.t. } \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S} \tag{3}$$

其中，$\lambda>0$ 为正则化参数，$rank(\cdot)$表示秩函数，$\|\boldsymbol{S}\|_0$ 表示矩阵 $\boldsymbol{S}$ 中非零元素的个数。由于秩的离散性和 l_0 范数的存在，式(3)的求解是一个 NP 难问题。通常通过核范数和 l_1 范数分别替换秩函数和 l_0 范数来解决上述问题[24]，得到如下凸优化问题：

$$\min_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{S}} \|\boldsymbol{L}\|_*+\lambda\|\boldsymbol{S}\|_1 \quad \text{s.t. } \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S} \tag{4}$$

其中，$\|\boldsymbol{L}\|_*=\sum_i\sigma_i(L)$，$\sigma_i(\boldsymbol{S})$表示矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的第 i 个奇异值，$\|\boldsymbol{S}\|_1=\sum_{i,j}|\boldsymbol{S}_{i,j}|$。核范数是对秩函数的一个凸近似，当矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的秩和 $\boldsymbol{S}$ 的稀疏分布符合一定条件时，低秩矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和稀疏矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的恢复概率很高。基于 Candès 等[25]的工作，Zhou 等[26]对 RPCA 模型进行了改进，其将优化问题表示为：

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{S}} \|\boldsymbol{L}\|_*+\lambda\|\boldsymbol{S}\|_1\\&\text{s.t. } \|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}\|_F\leqslant\delta\end{aligned} \tag{5}$$

其中，δ 是一个常数，与独立同分布的高斯噪声的标准差相关，$\|\cdot\|_F$ 为弗罗贝尼乌斯范数（F 范数）。Zhang 等[14]采用迭代硬阈值法求解式(5)的等价公式，定义如下：

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{S}} \|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}\|_F^2\\&\text{s.t. } rank(L)\leqslant r, card(\boldsymbol{S})\leqslant t\end{aligned} \tag{6}$$

其中，$card(\cdot)$表示基数；r 和 t 需要预定义，分别表示矩阵 $\boldsymbol{L}$ 秩的上界和矩阵 $\boldsymbol{S}$ 基数的上界。

以往基于低秩近似的 HSI 去噪方法虽然取得了很大的成就，但仍存在以下几个方面的问题：1)核范数将所有奇异值相加，使得较大的奇异值比较小的奇异值受到更大的惩罚，从而导致主秩分量过度收缩；2)基于核范数的优化求解算法需要更多的迭代次数，整体收敛速度较慢；3)子空间秩信息需要通过额外的算法进行预定义，在实践中并不实用；4)缺乏适当的空间约束，不能有效地去除高斯噪声；5)当所有波段的条纹噪声位于同一位置时，上述模型将无法检测到这些条纹，并会错误地将稀疏噪声归为低秩分量[27]，从而无法取得良好的去噪性能。

3.2 TV 正则项

TV 模型最早由 Rudin 等[28]提出，用于解决灰度图像的去噪问题，经验证其能够保留边缘信息并促进分段平滑性。对于大小为 $M\times N$ 的灰度图像 x，各向异性的 TV 范数的定义如下：

$$\begin{aligned}\|x\|_{TV}=&\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{N-1}\{|x_{i,j}-x_{i+1,j}|+|x_{i,j}-x_{i,j+1}|\}+\\&\sum_{i=1}^{M-1}|x_{i,N}-x_{i+1,N}|+\sum_{j=1}^{N-1}|x_{M,j}-x_{M,j+1}|\end{aligned} \tag{7}$$

将 HSI 的每个波段视为灰度图像，很容易将式(7)扩展到 HSI 中进行应用。即将 TV 范数分别应用于每个波段，然后用逐波段方式将它们相加，称为高光谱 TV 范数（Hyperspectral Total Variation，HTV），其定义如下：

$$\|\boldsymbol{X}\|_{HTV}=\sum_{j=1}^{K}\|\Phi\boldsymbol{X}_j\|_{TV} \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{X}_j$ 表示 HSI 中第 j 个波段的分量，$\Phi:\mathbb{R}^{MN}\rightarrow\mathbb{R}^{M\times N}$表示将第 j 个波段的向量重构成 $M\times N$ 的二维图像。

3.3 结合非凸正则项和 HTV 的 HSI 混合噪声去除模型

以往的非凸函数传递着两个关键信息：1)较大的奇异值通常表示想要保留的图像信息，不应过度惩罚；2)较小的奇异值通常表示想要去除的噪声信息，应予以惩罚。在实际应用中，对图像实施变换后的矩阵数据一般具备近似低秩性，而非绝对低秩，故直接对矩阵实施秩最小化操作不一定能达到所期望的效果。因此，所选的正则项应为秩极小化与核范数之间的折衷函数。已有的研究中，在信号和图像处理时采用非凸正则项往往能获得更好的性能[10,21-22,29]，受此启发，本文引入非凸低秩矩阵近似，其定义如下：

$$rank(L)\approx\|\boldsymbol{L}\|_\beta=\sum_{i=1}^{\min\{q^2,K\}}(\log(\sigma_i(\boldsymbol{L})+\beta)) \tag{9}$$

其中，$\beta>0$。式(9)称为 β 范数，图 2 给出了其一维图解分析，其中同时给出了 l_0，l_1 范数随奇异值变化（横坐标 x）时其函

数值的变化(纵坐标 y)。由图 2 可知,β 范数是位于 l_0 范数和 l_1 范数之间的松弛函数,可以同时增加对较小奇异值的惩罚并减小对较大奇异值的惩罚[30]。

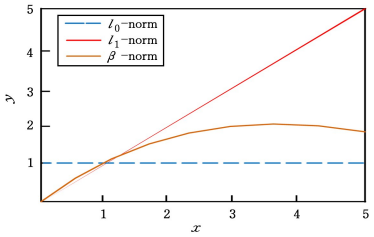


图 2 β 范数一维图解

Fig. 2 One-dimensional diagram of β-norm

本文将非凸的 β 范数作为低秩正则项,采用 $l_{2,1}$ 范数对稀疏分量进行建模[31],并加入 HTV 正则项使边缘信息得以保留。基于上述 3 个方面,提出了 NonLRMA-TV 模型,其定义如下:

$$\min_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{S}\in\mathbb{R}^{M\times N}} \|\boldsymbol{X}\|_\beta+\rho\|\boldsymbol{X}\|_{HTV}+\lambda\|\boldsymbol{S}\|_{2,1} \quad \text{s.t.}\ \|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}-\boldsymbol{S}\|_F^2\leqslant\delta \tag{10}$$

其中,$\|\boldsymbol{S}\|_{2,1}=\sum_{j=1}^{K}(\sum_{i=1}^{q^2}\boldsymbol{S}_{ij}^2)^{1/2}$。$\rho$ 为控制 β 范数和 HTV 之间的平衡参数,λ 用于限制稀疏噪声的稀疏度。当 ρ 设置为 0 时,式(10)会退化为非凸低秩矩阵正则化模型。*NonLRMA-TV* 可同时捕获 *HSI* 的空间和光谱信息。非凸低秩约束可以利用所有像素点的光谱相似性,结合稀疏约束,提供稀疏噪声信息。*TV* 正则项用于捕获空间信息,增强了各波段的分段平滑结构,进而促进了高斯噪声的去除。由于式(10)中 β 范数的非凸性,一般的梯度下降法不再适用。本文采用增广拉格朗日乘子法对目标模型式(10)进行优化,保证其每一个子问题都存在封闭解。随着迭代次数的递增,逐步将混合噪声从受损图像中分离,得到具有相似性的光谱通道和具有分段平滑空间结构的干净图像[32]。

3.4 优化 NonLRMA-TV 模型

首先将式(10)转化为如下等价问题:

$$\min_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{X},\boldsymbol{S}\in\mathbb{R}^{M\times N}} \|\boldsymbol{L}\|_\beta+\rho\|\boldsymbol{X}\|_{HTV}+\lambda\|\boldsymbol{S}\|_{2,1} \quad \text{s.t.}\ \|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}\|_F^2\leqslant\delta,\boldsymbol{L}=\boldsymbol{X} \tag{11}$$

为提高效率,本文采用 ALM[33] 对式(11)进行优化。由其推导出的增广拉格朗日函数为:

$$\min \ell(\boldsymbol{L},\boldsymbol{X},\boldsymbol{S},\Lambda_1,\Lambda_2)= \min_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{X},\boldsymbol{S},\Lambda_1,\Lambda_2} \|\boldsymbol{L}\|_\beta+\rho\|\boldsymbol{X}\|_{HTV}+\lambda\|\boldsymbol{S}\|_{2,1}+\langle\Lambda_1,\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}\rangle+ \langle\Lambda_2,\boldsymbol{X}-\boldsymbol{L}\rangle+\frac{\mu}{2}(\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}\|_F^2+\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{L}\|_F^2) \tag{12}$$

其中,$\mu>0$ 为惩罚参数,$\Lambda_1,\Lambda_2\in\mathbb{R}^{q^2\times K}$ 为拉格朗日乘子,$\langle\cdot\rangle$ 表示内积运算。采用对拉格朗日函数中的某一变量进行迭代优化而其余变量单步固定的方式对式(12)进行求解。在第 $k+1$ 次迭代中,按如下方式更新变量:

$$\boldsymbol{L}^{(k+1)}=\arg\min_{\boldsymbol{L}} \ell(\boldsymbol{L},\boldsymbol{X}^{(k)}\boldsymbol{S}^{(k)},\Lambda_1^{(k)},\Lambda_2^{(k)}) \tag{13a}$$

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\arg\min_{\boldsymbol{X}} \ell(\boldsymbol{L}^{(k+1)},\boldsymbol{X},\boldsymbol{S}^{(k)},\Lambda_1^{(k)},\Lambda_2^{(k)}) \tag{13b}$$

$$\boldsymbol{S}^{(k+1)}=\arg\min_{\boldsymbol{S}} \ell(\boldsymbol{L}^{(k+1)},\boldsymbol{X}^{(k+1)},\boldsymbol{S},\Lambda_1^{(k)},\Lambda_2^{(k)}) \tag{13c}$$

$$\Lambda_1^{(k+1)}=\Lambda_1^{(k)}+\mu(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{L}^{(k+1)}-\boldsymbol{S}^{(k+1)}) \tag{13d}$$

$$\Lambda_2^{(k+1)}=\Lambda_2^{(k)}+\mu(\boldsymbol{X}^{(k+1)}-\boldsymbol{L}^{(k+1)}) \tag{13e}$$

优化问题现分为式(13a)、式(13b)和式(13c),式(13a)可推导出:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^{(k+1)}&=\arg\min_{\boldsymbol{L}} \ell(\boldsymbol{L},\boldsymbol{X}^{(k)},\boldsymbol{S}^{(k)},\Lambda_1^{(k)},\Lambda_2^{(k)})\\&=\arg\min_{\boldsymbol{L}} \|\boldsymbol{L}\|_\beta+\langle\Lambda_1^{(k)},\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}^{(k)}\rangle+\langle\Lambda_2^{(k)},\\&\quad\boldsymbol{X}^{(k)}-\boldsymbol{L})\rangle+\frac{\mu}{2}(\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{S}^{(k)}\|_F^2+\|\boldsymbol{X}^{(k)}-\boldsymbol{L}\|_F^2)\\&=\arg\min_{\boldsymbol{L}} \|\boldsymbol{L}\|_\beta+\mu\|\boldsymbol{L}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}^{(k)}-\boldsymbol{S}^{(k)}+\\&\quad(\Lambda_1^{(k)}+\Lambda_2^{(k)})/\mu)\|_F^2\end{aligned} \tag{14}$$

对于求解式(14),当 $s=\min\{q^2,K\}$,用 σ_i^k 来表示 $\boldsymbol{L}^{(k)}$ 的奇异值,其中 σ_i^k 为降序排列,形式为 $\sigma_1^k\geqslant\sigma_2^k\geqslant\cdots\geqslant\sigma_s^k$,$\Delta\phi(\sigma_i^k)$ 为 ϕ 在 σ_i^k 上的梯度,令 $f(\boldsymbol{L})=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{L}-D^{(k)}\|_F^2$,$D^{(k)}=\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}^{(k)}-\boldsymbol{S}^{(k)}+(\Lambda_1^{(k)}+\Lambda_2^{(k)})/\mu$,考虑到奇异值的非升序排列特性以及非凸函数梯度的反单调性,可得出:

$$0\leqslant\Delta\phi(\sigma_1^k)\leqslant\Delta\phi(\sigma_2^k)\leqslant\cdots\leqslant\Delta\phi(\sigma_s^k) \tag{15}$$

$$\phi(\sigma_i(\boldsymbol{L}))\leqslant\phi(\sigma_i^k)+\Delta\phi(\sigma_i^k)(\sigma(L)-\sigma_i^k) \tag{16}$$

根据式(16)可以得到如下解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^{(k+1)}&=\arg\min_{\boldsymbol{L}}\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{s}\phi(\sigma_i^k)+\Delta\phi(\sigma_i^k)(\sigma_i(\boldsymbol{L})-\sigma_i^k)+f(\boldsymbol{L})\\&=\arg\min_{L}\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{s}\Delta\phi(\sigma_i^k)\sigma_i(\boldsymbol{L})+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{L}-D^{(k)}\|_F^2\end{aligned} \tag{17}$$

利用广义加权奇异值阈值法(Weight Singular Value Thresholding,WSVT)可有效地求解式(17),从而得出全局最优解:

$$\boldsymbol{L}^*=\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}_{\frac{\Delta\phi}{\mu}}(\Sigma)\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{S}_{(\Delta\phi/\mu)}(\Sigma)=Diag\{\max(\Sigma-(\sigma_i^k)/\mu),0\} \tag{19}$$

对于求解式(13b):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^{(k+1)}&=\arg\min_{X} \ell(\boldsymbol{L}^{(k+1)},\boldsymbol{X},\boldsymbol{S}^{(k)},\Lambda_1^{(k)},\Lambda_2^{(k)})\\&=\arg\min_{\boldsymbol{X}} \rho\|\boldsymbol{X}\|_{HTV}+\langle\Lambda_2^{(k)},\boldsymbol{X}-\boldsymbol{L}^{(k+1)}\rangle+\\&\quad\frac{\mu}{2}(\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{L}^{(k+1)}\|_F^2)\\&=\arg\min_{\boldsymbol{X}} \rho\|\boldsymbol{X}\|_{HTV}+\frac{\mu}{2}\left\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{L}^{(k+1)}+\frac{\Lambda_2^{(k)}}{\mu}\right\|_F^2\end{aligned} \tag{20}$$

其中,定义 $Q=\boldsymbol{L}^{(k+1)}-(\Lambda_2^{(k)}/\mu)$,并且 $Q=[Q_1,Q_2,\cdots,Q_K]\in\mathbb{R}^{MN\times K}$,式(20)可分解为 K 个子问题,采用快速梯度算法[34]进行求解,子问题的定义如下:

$$\boldsymbol{X}_j^{(k+1)}=\arg\min_{\boldsymbol{X}_j}\frac{\rho}{\mu}\|\Phi\boldsymbol{X}_j\|_{TV}+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{X}_j-Q_j\|^2 \tag{21}$$

$l_{2,1}$ 范数是一种稀疏诱导范数,定义为稀疏噪声矩阵 S 中列的 l_1 范数,其对于处理特定样本的噪声污染至关重要。对于求解式(13c),有:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^{(k+1)}&=\arg\min_{\boldsymbol{S}} \ell(\boldsymbol{L}^{(k+1)},\boldsymbol{X}^{(k+1)},\boldsymbol{S},\Lambda_1^{(k)},\Lambda_2^{(k)})\\&=\arg\min_{\boldsymbol{S}} \lambda\|\boldsymbol{S}\|_{2,1}+(\Lambda_1^{(k)},\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{L}^{(k+1)}-\boldsymbol{S}\rangle+\\&\quad\frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{L}^{(k+1)}-\boldsymbol{S}\|_F^2\\&=\arg\min_{\boldsymbol{S}} \lambda\|S\|_{2,1}+\frac{\mu}{2}\left\|\boldsymbol{S}-\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{L}^{(k+1)}+\frac{\Lambda_1^{(k)}}{\mu}\right)\right\|_F^2\end{aligned} \tag{22}$$

令 $\boldsymbol{W}^{(k)}=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{L}^{(k+1)}+(\Lambda_1^k/\mu)$，可以得到 $\boldsymbol{S}^{(k+1)}$ 的解：

$$S^*(:,j)=\frac{\|\boldsymbol{W}^{(k)}(:,j)\|_2-\frac{\lambda}{\mu}}{\|\boldsymbol{W}^{(k)}(:,j)\|_2}\boldsymbol{W}^{(k)}(:,j),$$

$$若\frac{\lambda}{\mu}<\|\boldsymbol{W}^{(k)}(:,j)\|_2 \tag{23}$$

综上，得到 NonLRMA-TV 模型的具体优化求解步骤如算法 1 所示。

算法 1 NonLRMA-TV 模型优化

输入：含噪声 HSI $\mathbf{Y}$

输出：$\mathbf{L}^{(k+1)}$ 和 $\mathbf{S}^{(k+1)}$

初始化 $\mathbf{L}=\mathbf{X}=\mathbf{S}=0$，$\Lambda_1=\Lambda_2=0$，$\rho,\beta,\lambda,\mu$，收敛条件 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$

令 k=k+1，迭代下列步骤

1. 根据式(18)更新 $\mathbf{L}^{(k+1)}$

2. 根据式(20)更新 $\mathbf{X}^{(k+1)}$

3. 根据式(23)更新 $\mathbf{S}^{(k+1)}$

检查收敛条件

$\|\mathbf{Y}-\mathbf{L}^{(k+1)}-\mathbf{S}^{(k+1)}\|_F/\|\mathbf{Y}\|_F\leqslant\varepsilon_1$ 且

$\|\mathbf{L}^{(k+1)}-\mathbf{X}^{(k+1)}\|_\infty\leqslant\varepsilon_2$

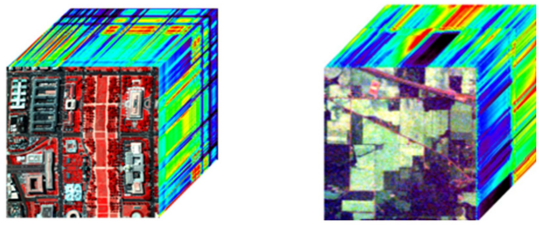
4 实验结果与分析

为全面评估所提 NonLRMA-TV 方法在 HSI 去除混合噪声应用中的性能，本文选择了 4 种最新提出的 HSI 去噪模型进行比较，即 LRMR[14]，NAILRMA[16]，LRTDTV[18] 和 LLRGTV[19]。其中 LRMR 将 HSI 分成多个重叠的 patch，并按字典顺序排列为二维矩阵，进而将噪声建模为稀疏成分，最后遵循 LRMA 思想优化每个 patch 元素，最终将所有去噪后的 patch 聚合成清晰的 HSI；NAILRMA 基于噪声水平方差的不同，对输入图像进行逐波段更新，随着迭代的进行使得噪声逐渐被去除，信号逐渐增强；LLRGTV 将 HSI 划分为局部重叠的小块，采用全局空间-光谱总变异正则化图像重建策略，进一步促进了局部低秩分量与稀疏噪声的分离；LRTDTV 使用张量 Tucker 分解来描述所有波段之间的全局相关性，并利用各向异性空间-光谱全变分(Spatial-Spectral Total Variation，SSTV)正则化来表征空间和光谱域的分段平滑结构，进而实现去噪。经验证，上述对比算法在单超谱图像去噪应用中具有较强的鲁棒性和恢复能力。在具体实验对比中，上述 4 种算法的代码均采用原作者在线公开版本[1)]，各模型超参数设置范围亦遵循原文的建议，针对不同测试数据集进行具体数据调优并选取最佳结果。

选取两组公开的高光谱图像数据进行实验对比。第一组由高光谱数字图像采集实验仪器拍摄，名为 Washington DC Mall[2)]。由于内存限制，实验选用大小为 256×256×11 的子图像，如图 3(a)所示。第二组为 Indian Pines 数据集[3)]，由机载可视红外成像光谱仪于 1992 年对美国印第安纳州一块印度松树进行成像，并从 USGS 数字光谱库中提取光谱特征，图像尺寸为 145×145×224，如图 3(b)所示。在所有实验中，HSI 的所有波段像素值都被统一规范化至[0，1]区间。为模拟超谱图像的混合噪声环境，本文将高斯噪声和脉冲噪声加入到干净 HSI 中，用于衡量各算法在不同程度混合噪声干扰下的实施效果，有如下两种情况。

情况 1 不同波段的噪声强度相同。在这种情况下，零均值的高斯噪声分布相同，脉冲噪声的百分比相同。实验 1 和实验 2 分别在 Washington DC Mall 和 Indian Pines 中加入方差为 0.075 的高斯噪声和百分比为 0.15 的脉冲噪声。

情况 2 不同波段的噪声强度不同。实验 3 和实验 4 分别在 Washington DC Mall 和 Indian Pines 图像中的每个波段加入不同方差的高斯噪声和不同百分比的脉冲噪声。方差值和脉冲噪声百分比都在 0～0.2 之间随机选取。



(a)Washington DC Mall (b)Indian Pines

图 3 实验所采用的高光谱数据样本

Fig. 3 Samples of hyperspectral data used in experiments

在实验结果对比中，采用可视化分析和数值评价指标来验证具体算法实现的有效性。评价指标包括峰值信噪比指数(Peak Signal to Noise Ratio，PSNR)和结构相似度指数(Structural Similarity Index，SSIM)[35]。在操作过程中，分别计算每一个波段的 PSNR 值和 SSIM 值，再对所有波段取均值，并表示为 MPSNR 和 MSSIM，其定义如下：

$$PSNR_i=10\times\lg\frac{255^2}{\frac{1}{MN}\sum_{x=1}^{M}\sum_{y=1}^{N}[b_i(x,y)-a_i(x,y)]^2} \tag{24}$$

$$SSIM_i=\frac{(2\mu_{a_i}\mu_{b_i}+C_1)(2\sigma_{a_ib_i}+C_2)}{(\mu_{a_i^2}+\mu_{b_i^2}+C_1)(\sigma_{a_i^2}+\sigma_{b_i^2}+C_2)} \tag{25}$$

$$MPSNR=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}PSNR_i \tag{26}$$

$$MSSIM=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}SSIM_i \tag{27}$$

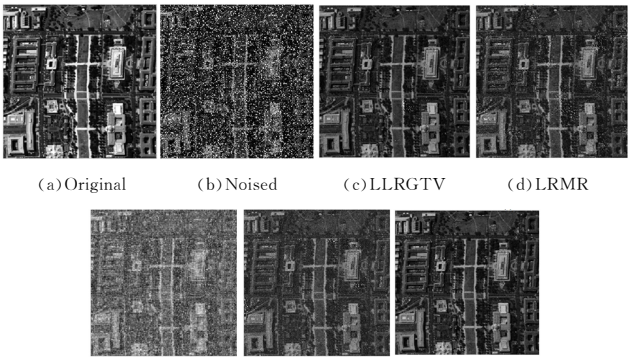
其中，a_i 和 b_i 分别表示原始图像和去噪后图像的第 i 个波段，$PSNR_i$ 和 $SSIM_i$ 是第 i 波段对应的 PSNR 值和 SSIM 值，μ_{a_i} 和 μ_{b_i} 是图像第 i 波段像素值的平均值，$\sigma_{a_i}^2$ 和 $\sigma_{b_i}^2$ 为方差，$\sigma_{a_ib_i}$ 为 a_i 和 b_i 的协方差。很明显，MPSNR 值和 MSSIM 值越大，去噪效果就越好。

实验 1：在方差值为 0.075 的高斯噪声和百分比为 0.15 的脉冲噪声干扰下的 Washington DC Mall 图像修复。图 4 和表 1 分别展现了本实验的可视化对比和数值评价结果。图 5 给出了不同波段下的 PSNR 值和 SSIM 值。

1) LRMR，NAILRMA，LLRGTV：https://sites.google.com/site/rshewei/home
LRTDTV：http://gr.xjtu.edu.cn/web/dymeng/2

2) https://engineering.purdue.edu/～biehl/MultiSpec/hyperspectral.html

3) http://www.ehu.eus/ccwintco/index.php/Hyperspectral_Remote_Sensing_Scenes



(a)Original (b)Noised (c)LLRGTV (d)LRMR

(e)LRTDTV (f)NAILRMA (g)NonLRMA-TV

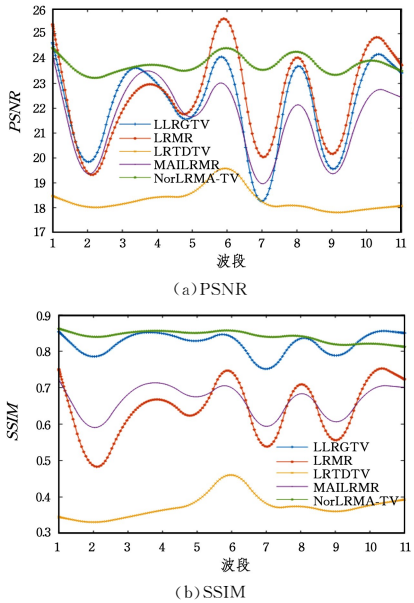
图 4 实验 1 中的去噪效果可视化对比

Fig. 4 Visualization comparison of denoising effects in experiment 1

表 1 实验 1 中的定量数值评价结果

Table 1 Numerical results in experiment 1

Algorithm	MPSNR	MSSIM
LLRGTV	22.1962	0.8234
LRMR	22.6255	0.6467
LRTDTV	18.3001	0.3745
NAILRMA	21.6730	0.6670
NonLRMA-TV	**23.6712**	**0.8407**



(a)PSNR

(b)SSIM

图 5 实验 1 中不同波段的 PSNR 值和 SSIM 值

Fig. 5 PSNR and SSIM values under different bands in experiment 1

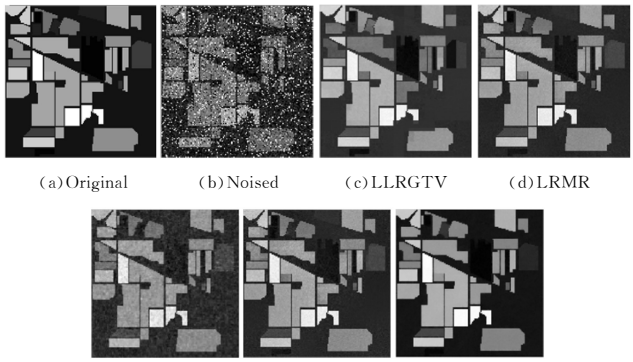
由图 4 可知，在所有修复结果中，LRMR，LRTDTV 和 NAILRMR 的重构图像均有噪声残留，其中 LRTDTV 出现了明显的混沌现象。从直观的视觉角度来看，本文算法能够得到最接近于原图的恢复结果，且能保持更多的局部细节与纹理信息。表 1 所列的实验结果从客观数值的角度验证了所提 NonLRMA-TV 模型的优越性，其 MPSNR 值和 MSSIM 值均明显高于其余 4 种对比方法。图 5 中，NonLRMA-TV 虽然在个别波段上的 PSNR 值和 SSIM 值分别低于 LRMR 和 GTV，但其整体结果仍呈现出了明显的优势。

实验 2：在方差值为 0.075 的高斯噪声和百分比为 0.15 的脉冲噪声干扰下的 Indian Pines 图像修复。图 6 和表 2 分别展现了本实验的可视化对比和数值评价结果。图 7 给出了不同波段下的 PSNR 值和 SSIM 值。

表 2 实验 2 中的定量数值评价结果

Table 2 Numerical results in experiment 2

Algorithm	MPSNR	MSSIM
LLRGTV	26.4097	0.9034
LRMR	31.1906	0.9488
LRTDTV	27.9018	0.8394
NAILRMA	30.8610	0.9034
NonLRMA-TV	**31.5576**	**0.9765**



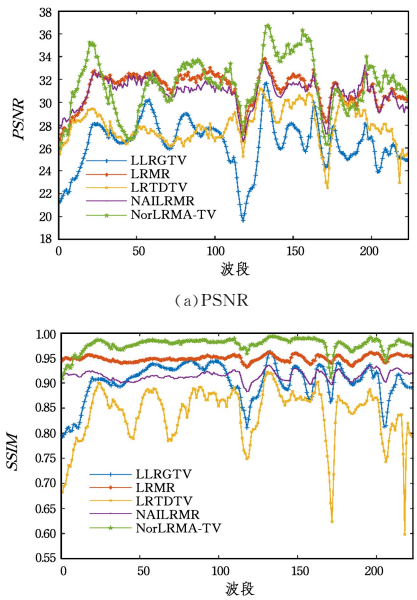
(a)Original (b)Noised (c)LLRGTV (d)LRMR

(e)LRTDTV (f)NAILRMA (g)NonLRMA-TV

图 6 实验 2 中的去噪效果可视化对比

Fig. 6 Visualization comparison of denoising effects in experiment 2

从图 6 可知，LRTDTV 的重构图像存在明显的噪声残留，LLRGTV 的修复结果则丢失了部分像素细节。其余几种对比算法都可将噪声有效去除，但本文算法所得到的去噪效果图在视觉上与原始图像更为一致，且能够保留更多的细节信息。表 2 所列的结果验证了 NonLRMA-TV 的优越性，其中 MSSIM 较次优的 LRMR 领先了 0.0277，MPSNR 则高出 0.376 dB。图 7 中，NonLRMA-TV 的 SSIM 实验结果几乎在所有波段中都优于对比算法，其 PSNR 值虽然在部分波段上低于部分对比算法，但整体上仍呈现出了较大的优势。



(a)PSNR

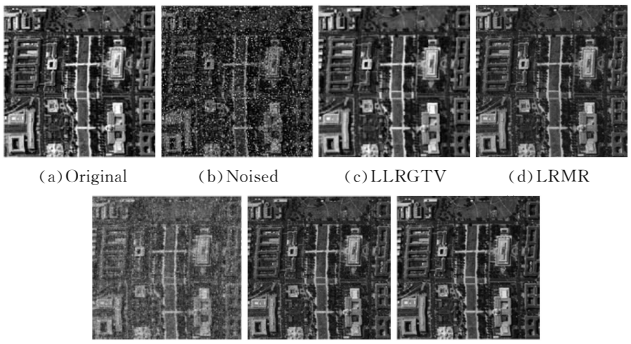
(b)SSIM

图 7 实验 2 中不同波段的 PSNR 值和 SSIM 值

Fig. 7 PSNR and SSIM values under different bands in experiment 2

实验 3：在从 0～0.2 之间随机选取方差值的高斯噪声和

从 0～0.2 之间随机选取百分比的脉冲噪声干扰下的 Washington DC Mall 图像修复。图 8 和表 3 分别展现了本实验可视化对比和数值评价结果。图 9 给出了不同波段下的 PSNR 值和 SSIM 值。



(a)Original (b)Noised (c)LLRGTV (d)LRMR

(e)LRTDTV (f)NAILRMA (g)NonLRMA-TV

图 8 实验 3 中的去噪效果可视化对比

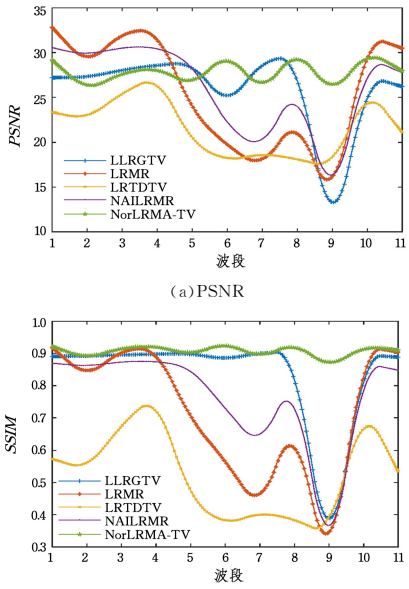
Fig. 8 Visualization comparison of denoising effects in experiment 3

表 3 实验 3 中的定量数值评价结果

Table 3 Numerical results in experiment 3

Algorithm	MPSNR	MSSIM
LLRGTV	25.8526	0.8333
LRMR	25.8350	0.7244
LRTDTV	21.6197	0.5262
NAILRMA	26.1389	0.7666
NonLRMA-TV	**26.8623**	**0.9075**

在图 8 所示的可视化效果中，LRTDTV 的视觉恢复效果仍然表现最差，其中存在大量的噪声残留；通过 LLRGTV 算法修复的图像过于平滑，导致图像的部分细节丢失；LRMR 以及 NAILRMA 所恢复的图像存在少许混沌现象；本文算法在图像的细节保留和真实度还原方面都表现更优；结合图 9 和表 3 中的结果可以看出，所提算法的 SSIM 值在各个波段上都优于对比算法，其平均 SSIM 较次优的 NAILRMA 算法高出 0.0742。



(a)PSNR

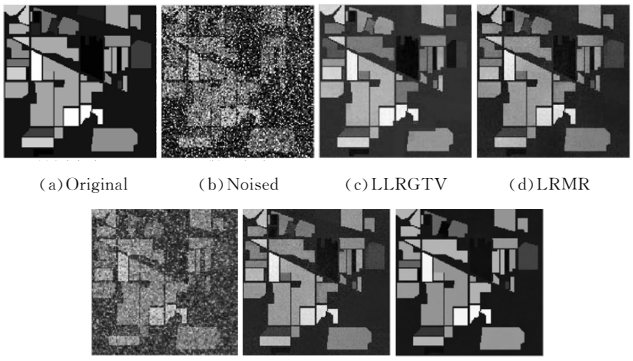
(b)SSIM

图 9 实验 3 中不同波段的 PSNR 值和 SSIM 值

Fig. 9 PSNR and SSIM results under different bands in experiment 3

就 PSNR 值而言，虽然 NonLRMA-TV 在大约一半的波段中的结果低于部分对比算法，但其平均 PSNR 值达到 26.8623，较次优的 NAILRMA 模型高出 0.7234 dB。并且，如图 9 所示，所提 NonLRMA-TV 算法在不同波段上的结果明显较其他算法更为平衡，表明了非凸 β 范数较核范数具有更好的低秩逼近能力。

实验 4：在从 0～0.2 之间随机选取方差值的高斯噪声和从 0～0.2 之间随机选取百分比的脉冲噪声干扰下的 Indian Pines 图像修复对比。图 10 和表 4 分别展现了本实验的可视化对比和数值评价结果。图 11 给出了不同波段下的 PSNR 值和 SSIM 值。



(a)Original (b)Noised (c)LLRGTV (d)LRMR

(e)LRTDTV (f)NAILRMA (g)NonLRMA-TV

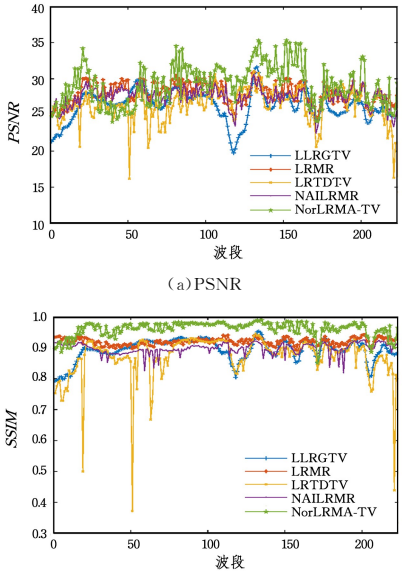
图 10 实验 4 中的去噪效果可视化对比

Fig. 10 Visualization comparison of denoising effects in experiment 4

表 4 实验 4 中的定量数值评价结果

Table 4 Numerical results of experiment 4

Algorithm	MPSNR	MSSIM
LLRGTV	26.3301	0.8933
LRMR	28.0150	0.9201
LRTDTV	26.3849	0.8687
NAILRMA	27.4783	0.8975
NonLRMA-TV	**29.1495**	**0.9605**



(a)PSNR

(b)SSIM

图 11 实验 4 中不同波段的 PSNR 值和 SSIM 值

Fig. 11 PSNR and SSIM results under different bands in experiment 4

与之前的实验结果类似，如图 10 所示，本文提出的 NonLRMA-TV 算法在图像的细节恢复方面依然优于其他算法。表 4 所列的数值结果进一步验证了所提算法的 MPSNR 值和 MSSIM 值均优于其他算法，其中 MPSNR 值较次优结果高出 1.134 dB，MSSIM 值较次优值高出 0.040 4，表明所提算法的整体去噪性能较其他对比算法更为稳定，且对图像细节的处理效果更佳。由图 11 可知，NonLRMA-TV 仅在个别波段的 SSIM 值低于 LRMR，但整体更为平稳且高于其他对比算法。整体而言，NonLRMA-TV 的定量恢复结果较所有对比算法都有较大的优势。

结束语 为解决经典核范数存在的问题，即对不同奇异值进行相同的惩罚，本文利用特定的非凸代理函数来逼近本质秩函数，并将其应用于退化高光谱图像重构任务。所提模型旨在恢复代表原始干净图像的低秩矩阵，同时去除含高斯噪声、脉冲噪声、条纹等在内的混合噪声。该模型结合非凸低秩约束和 TV 正则化，采用增广拉格朗日乘子法进行模型优化求解。首先，根据高光谱图像的谱带相似性，提出非凸低秩约束来有效去除稀疏噪声。其次，利用空间结构的光滑性，采用 TV 正则化保留边缘信息和局部细节，进一步去除高斯噪声。最后，通过增广拉格朗日乘子法对模型的未知变量进行迭代求解。多组实验证明，所提模型对混合噪声具有较强的鲁棒性，且相比现有的高光谱去噪模型在可视化效果和定量评价指标上都表现更优。考虑到 HSI 本质上为三阶张量，在后续工作中将重点针对张量层面的稀疏性进行拓展，设计出更多快速精准的 HSI 去噪方法。

参 考 文 献

[1] XIE T, LI S, SUN B. Hyperspectral images denoising via nonconvex regularized low-rank and sparse matrix decomposition [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2019, 29: 44-56.

[2] LEE S, NEGISHI M, URAKUBO H, et al. Mu-net: Multi-scale U-net for two-photon microscopy image denoising and restoration[J]. Neural Networks, 2020, 125: 92-103.

[3] ZHANG L, WANG J, AN Z. Classification method of CO2 hyperspectral remote sensing data based on neural network[J]. Computer Communications, 2020, 156: 124-130.

[4] LI Y, XU J, XIA R, et al. A two-stage framework of target detection in high-resolution hyperspectral images[J]. Signal, Image and Video Processing, 2019, 13(7): 1339-1346.

[5] FAN H, LI J, YUAN Q, et al. Hyperspectral image denoising with bilinear low rank matrix factorization[J]. Signal Processing, 2019, 163: 132-152.

[6] XING L, CHANG Q, QIAO T. The algorithms about fast nonlocalmeans based image denoising[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2012, 28(2): 247-254.

[7] BALOCH G, OZKARAMANLI H. Image denoising via correlation-based sparse representation[J]. Signal, Image and Video Processing, 2017, 11(8): 1501-1508.

[8] DABOV K, FOI A, KATKOVNIK V, et al. Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(8): 2080-2095.

[9] OTHMAN H, QIAN S E. Noise reduction of hyperspectral imagery using hybrid spatial-spectral derivative-domain wavelet shrinkage[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2006, 44(2): 397-408.

[10] LU C, TANG J, YAN S, et al. Nonconvex nonsmooth low rank minimization via iteratively reweighted nuclear norm[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2015, 25(2): 829-839.

[11] LI C, MA Y, HUANG J, et al. Hyperspectral image denoising using the robust low-rank tensor recovery[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2015, 32(9): 1604-1612.

[12] RENARD N, BOURENNANE S, BLANC-TALON J. Denoising and dimensionality reduction using multilinear tools for hyperspectral images[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2008, 5(2): 138-142.

[13] KONG X, ZHAO Y, XUE J, et al. Hyperspectral Image Denoising Using Global Weighted Tensor Norm Minimum and Nonlocal Low-Rank Approximation[J]. Remote Sensing, 2019, 11(19): 2281-2303.

[14] ZHANG H, HE W, ZHANG L, et al. Hyperspectral image restoration using low-rank matrix recovery[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2013, 52(8): 4729-4743.

[15] CANDÉS E J, LI X, MA Y, et al. Robust principal component analysis? [J]. Journal of the ACM, 2011, 58(3): 1-37.

[16] HE W, ZHANG H, ZHANG L, et al. Hyperspectral image denoising via noise-adjusted iterative low-rank matrix approximation[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2015, 8(6): 3050-3061.

[17] HE W, ZHANG H, ZHANG L, et al. Total-variation-regularized low-rank matrix factorization for hyperspectral image restoration[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2015, 54(1): 178-188.

[18] WANG Y, PENG J, ZHAO Q, et al. Hyperspectral image restoration via total variation regularized low-rank tensor decomposition[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2017, 11(4): 1227-1243.

[19] HE W, ZHANG H, SHEN H, et al. Hyperspectral image denoising using local low-rank matrix recovery and global spatial-spectral total variation[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2018, 11(3): 713-729.

[20] ZHENG J, QIN M, ZHOU X, et al. Efficient Implementation of Truncated Reweighting Low-Rank Matrix Approximation[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019, 16(1): 488-500.

[21] ZHENG J, LOU K, YANG X, et al. Weighted mixed-norm regularized regression for robust face identification[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019, 30(12): 3788-3802.

[22] YANG Y, ZHENG J, CHEN S, et al. Hyperspectral image restoration via local low-rank matrix recovery and Moreau-enhanced total variation[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2019, 17(6): 1037-1041.

[23] XIE Y, QU Y, TAO D, et al. Hyperspectral image restoration via iteratively regularized weighted schatten p-norm minimization[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing,

2016,54(8):4642-4659.

[24] REHCT B,FAZEL M,PARRILO P A. Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization[J]. SIAM Review,2010,52(3):471-501.

[25] CANDÉS E J,PLAN Y. Matrix completion with noise[J]. Proceedings of the IEEE,2010,98(6):925-936.

[26] ZHOU Z,LI X,WRIGHT J,et al. Stable principal component pursuit[C]//2010 IEEE International Symposium on Information Theory. IEEE,2010:1518-1522.

[27] CHEN Y,GUO Y,WANG Y,et al. Denoising of hyperspectral images using nonconvex low rank matrix approximation[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing,2017,55(9):5366-5380.

[28] RUDIN L I,OSHER S,FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D:Nonlinear Phenomena,1992,60(1/2/3/4):259-268.

[29] YAN J,PENG H,YU Y,et al. Compressive sensing of wind speed based on non-convex ℓp-norm sparse regularization optimization for structural health monitoring[J]. Engineering Structures,2019,194:346-356.

[30] MA R,MIAO J,NIU L,et al. Transformed ℓ1 regularization for learning sparse deep neural networks[J]. Neural Networks,2019,119:286-298.

[31] LIU G,LIN Z,YAN S,et al. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,2012,35(1):171-184.

[32] XIE T,LI S,SUN B. Hyperspectral images denoising via non-convex regularized low-rank and sparse matrix decomposition[J]. IEEE Transactions on Image Processing,2019,29:44-56.

[33] CHENG D,YANG J,WANG J,et al. Double-noise-dual-problem approach to the augmented Lagrange multiplier method for robust principal component analysis[J]. Soft Computing,2017,21(10):2723-2732.

[34] BECK A,TEBOULLE M. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems[J]. IEEE Transactions on Image Processing,2009,18(11):2419-2434.

[35] WANG Z,BOVIK A C,SHEIKH H R,et al. Image quality assessment:from error visibility to structural similarity[J]. IEEE Transactions on Image Processing,2004,13(4):600-612.

TAO Xing-peng, born in 1996, postgraduate. His main research interests include visual analysis and image processing.

CHEN Wan-jun, born in 1982, lecturer. Her main research interests include model optimization and image processing.