

基于鲁棒低秩张量恢复的高光谱图像去噪

巫勇^{1,2} 刘永坚¹ 唐璜² 王洪林² 郑建成²

1 武汉理工大学计算机科学与技术学院 武汉 430010

2 空军预警学院雷达士官学校 武汉 430010

摘要 去噪是高光谱图像进一步分析的重要预处理步骤,许多去噪方法都被用于高光谱图像数据立方体的去噪。然而,传统的去噪方法对异常值和非高斯噪声很敏感。文中利用底层干净 HSI 的张量性质数据、异常值的稀疏性质和非高斯噪声,提出一个新的基于鲁棒低秩张量修复的模型,从而在保护 HSI 的同时删除离散值的全局结构和不同类型的噪声(高斯噪声、脉冲噪声、死线等)。该模型可以用非精确增广拉格朗日法求解,仿真和真实高光谱图像实验的结果表明,该方法对 HSI 去噪是有效的。

关键词 高光谱图像去噪;脉冲噪声;高斯噪声;低秩张量;HSI 去噪

中图分类号 TP751

Hyperspectral Image Denoising Based on Robust Low Rank Tensor Restoration

WU Yong^{1,2}, LIU Yong-jian¹, TANG Tang², WANG Hong-lin² and ZHENG Jian-cheng²

1 School of Computer Science and Technology, Wuhan University of Technology, Wuhan 430010, China

2 Radar Sergeant School of Air force Early Warning Academy, Wuhan 430010, China

Abstract Denoising is an important preprocessing step to further analyze the hyperspectral image (HSI), and many denoising methods have been used for the denoising of the HSI data cube. However, the traditional denoising methods are sensitive to outliers and non-Gaussian noise. In this paper, by making use of the low-rank tensor property of the clean HSI data and the sparsity property of the outliers and non-Gaussian noise, we propose a new model based on the robust low-rank tensor recovery, which can retain the global structure of HSI and clean the outliers and mixed noise. The proposed model can be solved by the inexact augmented Lagrangian method. Experiments on simulated and real hyperspectral data show that the proposed algorithm is efficient for HSI restoration.

Keywords Hyperspectral image denoising, Impulsive noise, Gaussian noise, Low-rank tensor, HSI denoising

1 引言

近几十年来,高光谱成像(HSI)迅速发展成为遥感领域最有力的技术之一。HSI 已经被应用到诸多领域,如地形分类、矿产检测、环境监测、军事监视等^[1-3]。然而,传感器、光子效应和标定误差^[4]不可避免地在获取的 HSI 数据立方体中引入了噪声,不仅降低了 HSI 数据的视觉质量,而且限制了后续图像解译和分析的精度^[5]。因此,高光谱图像去噪是许多 HSI 应用的必要预处理步骤,如目标检测、光谱解混、目标分类和匹配^[6]。

在过去的几十年中,人们提出了各种各样的高光谱图像去噪策略^[7],但是这些方法大部分都是逐波段对高光谱图像进行二维图像去噪^[7],但由于没有同时考虑空间和光谱波段之间的相关性^[4-5],仅去除空间或光谱噪声,相应的去噪效果并不理想。因此,为了将 HSI 作为一个整体来处理,需要综合考虑空间和光谱信息来有效地去除噪声。近年来,张量分析已经被广泛应用到多维数据上,也有很多学者使用张量分解来去噪高光谱图像,最为常用的模型有 Tucker 分解^[8]和 CP 分解^[9-11]。此外,基于多维小波包变换(MWPT)的去噪

方法用于三维 HSI 的去噪^[12]。在先验知识的限制下,针对加性高斯白噪声,上述张量代数方法被隐式发展。然而,对于实际的 HSI,其主要噪声源不再由与信号无关的加性噪声决定,HSIs 中同时存在与信号无关和与信号相关的噪声成分^[13],通常存在高斯噪声、脉冲噪声、死像素或直线、条纹等多种噪声类型的组合^[4],提出了基于低秩矩阵恢复(LRMR)的方法,可以同时去除上述不同类型的噪声^[4]。基于 LRMR 的方法将 HSI 划分成斑块,将斑块重新排列成二维矩阵,并依次恢复每个斑块。然而,它可能导致维间信息的丢失。

近年来,鲁棒张量恢复与完成在非线性数据分析中发挥了重要作用,使得张量分解对异常值、粗腐败等具有鲁棒性^[14-15]。此外,鲁棒张量恢复基于张量的全局结构去除离群点,自然会导致鲁棒 Tucker 分解。与传统的高光谱图像去噪方法不同,本文方法是基于实践中的先验知识。首先,干净的 HSI 数据具有潜在的低秩张量性质,即使实际的 HSI 数据可能不是由于异常值和非高斯噪声造成的。核范数作为低秩张量的凸代理函数,应用于张量的不同展开。其次,为了更好地追求离群点和非高斯噪声,我们采用 $l_{2,1}$ -范数来施加稀疏性,与 l_1 -范数相比具有旋转不变的优点。本文基于上述两个方

基金项目:国家自然科学基金(61401504)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61401504).

通信作者:巫勇(1982182410@qq.com)

面,提出了一种基于鲁棒低秩张量恢复(Robust Low-rank Tensor Recovery, RLRTR)的新模型,能够同时去除上述不同类型的噪声。本文的贡献在于提出了RLRTR方法,与其他4种方法相比,RLRTR方法可以有效地去除异常值和不同类型的噪声。

本文第2节描述了本文针对HSI去噪问题提出的方法;第3节利用真实的高光谱图像对本文方法的性能进行了评估;最后总结全文。

2 提出的 HIS 去噪方法

根据文献[4],我们假设HSI受到不同种类噪声的腐蚀:高斯噪声、脉冲噪声、死像素、条纹等。因此,噪声的HSI数据可以看作纯净的HSI受到高斯噪声、异常值和非高斯噪声的破坏,HSI的噪声退化模型可以表示为:

$$Y = X + S + N \quad (1)$$

其中, Y 为观测到的退化HSI, X 为干净HSI, S 表示稀疏噪声,如脉冲、死线等, N 为小尺度的高斯噪声。 Y, X, S, N 均为 $I_1 \times I_2 \times I_3$ 的大小,其中 I_1 和 I_2 分别表示HSI的宽度和高度, I_3 表示谱带数。

对于观察到的退化HSI,直接应用RPCA本质上只考虑了其中一个展开中的低秩结构,这往往不足^[14]。本文基于以下两个方面将RPCA推广到张量 Y 的去噪。首先,根据文献[10]的前期工作,高维HSI数据空间大多为空,所涉及的数据结构主要存在于子空间中。也就是说,干净的HSI数据具有潜在的低秩张量性质。其次,对于真实的高光谱图像,只有极少部分波段(高达20%)被噪声严重退化,而大部分波段的质量相对较高,即HSI噪声除了极少部分低层噪声外,还具有稀疏性。因此,基于上述两个方面以及文献[16]中张量的完成,从数学上讲,本文提出的RLRTR模型可以转化为如下张量优化问题的求解:

$$\min_{X,S} \{f(\text{rank}(X)) + \lambda \|S\|_0\} \quad \text{s. t. } Y = X + S + N \quad (2)$$

其中, $f(\text{rank}(X))$ 是张量秩函数,即 $f(\text{rank}(X)) = f(\text{rank}(X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}))$ 。 λ 是一个正则化参数,其目的是为了平衡张量秩函数与范数。

然而,Eq.(2)属于高度且非凸问题,求解的难度极大。张量秩函数 $f(\text{rank}(X))$ 的选取有很多选择,因此核范数最小化一直吸引着重要的研究。为了简化,主张将核范数作为秩函数的凸代理函数,并将其应用于张量的不同展开。因此,我们将把张量秩函数 $f(\text{rank}(X))$ 替换为核范数之和 $\|X_{(n)}\|_*$ ($n=1,2,3$)。一般地, l_1 -范数用于捕获简单的离群点和非高斯噪声结构,为了更好地追求离群点并施加稀疏性,采用文献[17]提出的 $l_{2,1}$ -范数,其具有根据文献[30]进行旋转不变的优点。基于上述提及的两个方面,本文通过分裂 X 和 S 来引进辅助变量 $X_n \in R^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ 和 $S_n \in R^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ ($n=1,2,3$)。因此,我们提出的最小化问题可以转换为:

$$\begin{aligned} \text{opt. } \min_{X,S} \sum_{n=1}^3 (\|X_{(n)}\|_* + \lambda \|S_{(n)}\|_{2,1}) \\ \text{s. t. } \|Y_{(n)} - X_{(n)} - S_{(n)}\|_F \leq \delta, n=1,2,3 \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $(X_n)_{(n)}$ 表示张量 X_n 的模- n 展开矩阵; $\|X\|_* = \sum_{i=1}^I \sigma_i(X)$ 表示核范数,即矩阵 X 的奇异值之和; $\|X\|_{2,1}$ 表示矩阵 X 中每行 l_2 -范数之和; δ 是常数,其值与高斯分布噪声的标准差相关。注意到本文方法只关注行空间的恢复,并检

测出异常值,而不是整个 l_0 矩阵的“精确恢复”。因此,这也意味着本文方法具有旋转不变的优点,具体来说,对所有给定的点(即行)施加相同的旋转对其性能没有影响。

解决Eq.(3)中的优化问题。利用问题结构^[18],我们借助一个IALM,式(3)可以改写为:

$$\begin{aligned} L(X, S, W) &= \sum_{n=1}^3 \{ \|X_{(n)}\|_* + \lambda \|S_{(n)}\|_{2,1} - \\ &\quad \langle T_n)_{(n)}, Y_{(n)} - X_{(n)} - S_{(n)} \rangle + \\ &\quad \frac{\beta}{2} \|Y_{(n)} - X_{(n)} - S_{(n)}\|_F^2 \} \\ &= \sum_{n=1}^3 \{ \|X_{(n)}\|_* + \lambda \|S_{(n)}\|_{2,1} + \\ &\quad \frac{\beta}{2} \|Y_{(n)} - X_{(n)} - S_{(n)} - \Lambda_n)_{(n)}\|_F^2 \} \end{aligned} \quad (4)$$

其中, β 表示惩罚参数, $T_n \in R^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ ($n=1,2,3$)表示拉格朗日乘子, $\Lambda_n = T_n / \beta$ 。但是,用联合变量解决这个问题是困难的,我们用IALM方法来解决这个问题,即用另一个固定的变量更新一个变量。为了更新 $(X_n)_{(n)}$,我们求解如下表达式:

$$\begin{aligned} (X_n)_{(n)}^{k+1} &= \arg \min \|X_{(n)}\|_* + \frac{\beta}{2} \|Y_{(n)} - X_{(n)} - \\ &\quad S_{(n)}^k - \Lambda_n)_{(n)}\|_F^2 D_{1/\beta} (Y_{(n)} - S_{(n)}^k - \\ &\quad \Lambda_n)_{(n)} \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $D_\tau(\cdot)$ 是奇异值阈值算子,其定义如下:

$$D_\tau(X) = US_\tau(V)^T \quad (6)$$

其中, $X = USV^T$ 是奇异值分解, $S_\tau[x] = \text{sgn}(x) \max(|x| - \tau, 0)$ 为收缩算子。更新 $(S_n)_{(n)}$,可以求解如下表达式:

$$\begin{aligned} (S_n)_{(n)}^{k+1} &= \arg \min \lambda \|S_{(n)}\|_{2,1} + \frac{\beta}{2} \|Y_{(n)} - \\ &\quad S_{(n)} - X_{(n)}^{k+1} - \Lambda_n)_{(n)}\|_F^2 \end{aligned} \quad (7)$$

该优化问题可以通过向量软阈值函数求解,即 $g(b, \tau) = b \frac{\max\{\|b\|_2 - \tau, 0\}}{\max\{\|b\|_2 - \tau, 0\} + \tau}$,其中 $\tau = \lambda / \beta$ 。

综上所述,本文在算法1中列出了RLRTR用于HSI数据立方体去噪的详细过程。对于精确增广拉格朗日方法的变分IALM,当块数(即未知矩阵变量)最多为两个时,它的收敛性已经得到了很好的研究^[19]。在我们的问题中,作为Eq(3)中的目标函数,理论上没有保证收敛性。式(3)是非光滑的,因此很难从理论上证明本文算法的收敛性^[16],而且IALM在实际中一般表现良好,可以很好地预测本文提出的去噪方法具有良好的收敛性。

算法1 基于RLRTR的HIS去噪

输入: $Y, \lambda, \beta, \epsilon$

输出: X, S

1. 初始化

$$X_n^0 = S_n^0 = \Lambda_n^0 = 0, n=1,2,3, \rho=1.1$$

2. while

3. for $n=1,2,3$ do

4. 通过式(5)更新;

5. 通过式(7)更新;

6. 更新拉格朗日乘子:

$$(\Lambda_n)_{(n)}^{k+1} = (\Lambda_n)_{(n)}^k - \beta(Y_{(n)} - X_{(n)}^{k+1} - S_{(n)}^{k+1})$$

7. End for

8. 更新惩罚参数:

$$\beta = \min(\beta_{\max}, \rho\beta)$$

9. 更新 X 和 S

$$X = \sum_{n=1}^3 X_n^{k+1}/3$$

$$S = \sum_{n=1}^3 S_n^{k+1}/3$$

10. 判断收敛条件是否成立:

$$\|Y - X - S\|^2 / \|Y\|^2 < \epsilon$$

11. End while

3 实验

3.1 模拟实验

本节使用 Washington DC Mall 公开提供的 HYDICE 图像的一部分来验证本文算法的性能,选取的图像大小为 $300 \times 300 \times 191$ 。本文在定量评估方面主要借助 3 种指标,即峰值信噪比 PSNR、结构相似索引 SSIM、特征相似索引 FSIM。PSNR 是从灰度相似性的角度对去噪后的图像进行评估,后两个指标是根据人眼的视觉特性来衡量修复后的数据与干净的数据之间的相似性。高光谱图像存在多个光谱,本文对比这 3 个图像质量评价指标上采用的是这些波段的均值,记为 MPSNR, MSSIM 和 MFSIM。

在仿真过程中,在 Washington DC 图像中加入了 3 种噪声,具体如下:

(1)我们在 HSI 的所有波段都加入零均值高斯噪声。各频段信噪比值在 $10 \sim 20$ dB 范围内随机变化,所有频段的平均信噪比为 15.28 dB。

(2)添加 20% 的脉冲噪声在波段 30~40 上。

(3)我们在 80 到 90 波段的 11 个选定波段中加入死线,死线的宽度从一行到三行不等。

为了评价本文方法的性能,我们选择 VBM3D^[21], LR-TA^[10], PARAFAC^[11], LRM^[4] 这 4 种不同的去噪方法进行比较,在模拟实验中,我们对本文方法和其他 4 种比较方法的参数进行了调整。LRTA 是一种无参数的低秩张量近似去噪方法。VBM3D 方法的噪声变化量设置为 15。对于 PARAFAC 方法,我们将残差协方差矩阵中对角元素恒常性和非对角元素能量有限性的阈值分别设定为 10^{-7} 和 10^{-6} 。对于本文方法,两个参数设定为: $\lambda=0.5$ 和 $\beta=10^{-2}$ 。

由于一个 HSI 中的波段太多,我们只选取其中的 6 个典型波段进行视觉效果呈现。去噪后的第 6 个和第 131 个波段的效果如图 1 与图 2 所示,它们只受到信噪比分别为 10.78 dB 和 19.88 dB 的零均值高斯噪声的污染。

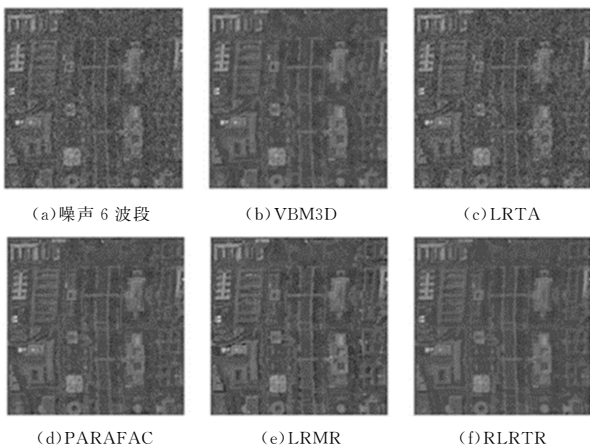


图 1 WDC 数据集上波段 6 对应的去噪效果

Fig. 1 WDC denoising effect of band 6 on data set

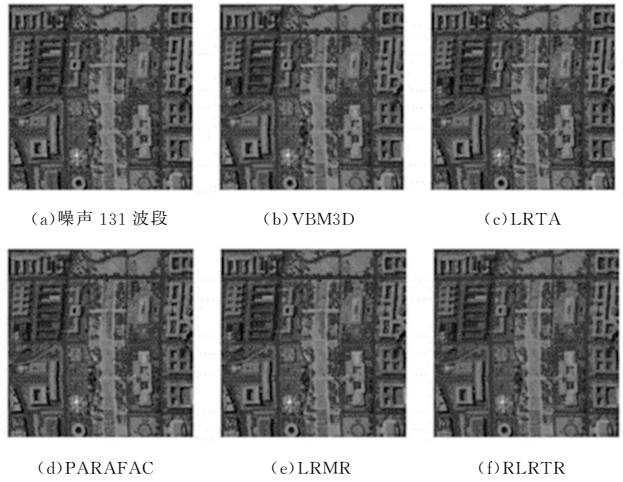


图 2 WDC 数据集上波段 131 对应的去噪效果

Fig. 2 WDC denoising effect of band 131 on data set

图 3 和图 4 给出了 32 和 35 波段的去噪结果,它们分别被高斯噪声和脉冲噪声破坏。

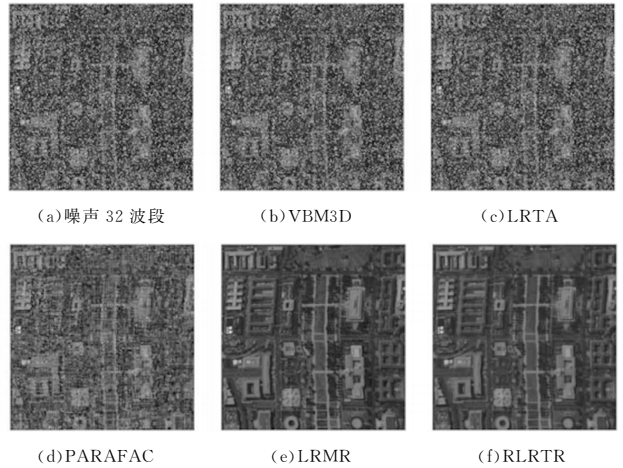


图 3 WDC 数据集上波段 32 对应的去噪效果

Fig. 3 WDC denoising effect of band 32 on data set

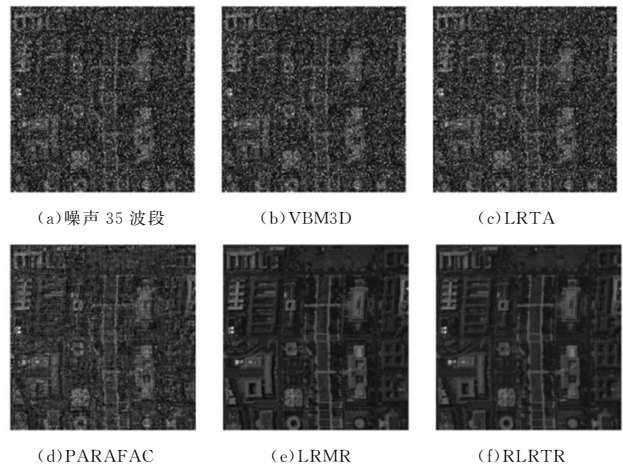


图 4 WDC 数据集上波段 35 对应的去噪效果

Fig. 4 WDC denoising effect of band 35 on data set

图 5 和图 6 给出了 85 和 88 波段的去噪结果,这些波段被高斯噪声和死线污染。图 7—图 9 给出了不同去噪方法随波段变化的 PSNR, SSIM 和 FSIM 值。采用 MPSNR, MSSIM 和 MFSIM 对去噪性能进行整体分析,结果如表 1 所列。

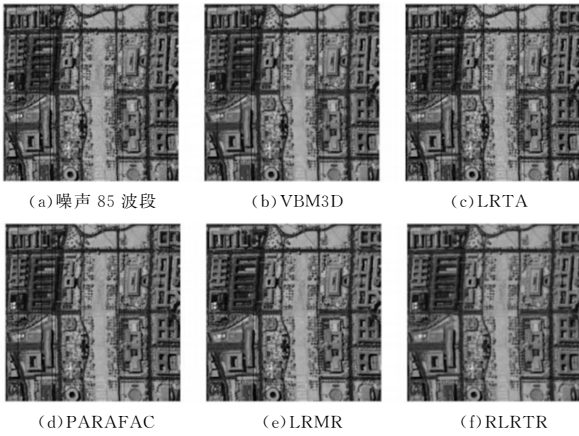


图5 WDC数据集上波段85对应的去噪效果

Fig. 5 WDC denoising effect of band 85 on data set

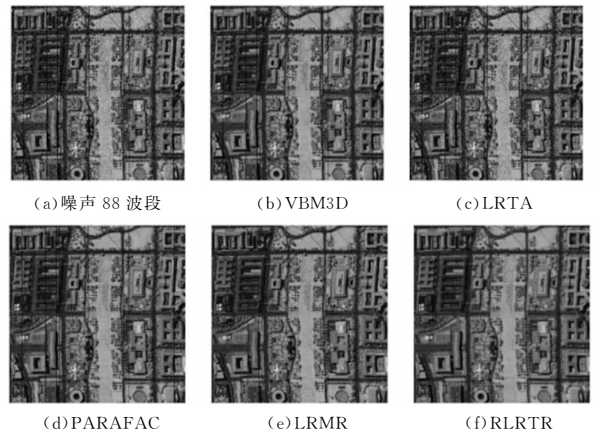


图6 WDC数据集上波段88对应的去噪效果

Fig. 6 WDC denoising effect of band 88 on data set

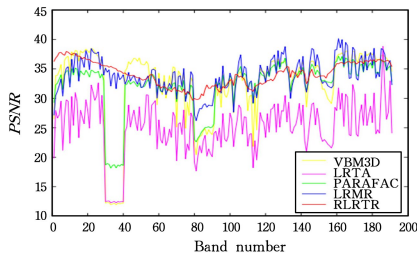


图7 模拟实验中各波段的PSNR值

Fig. 7 PSNR value of each band in simulation experiment

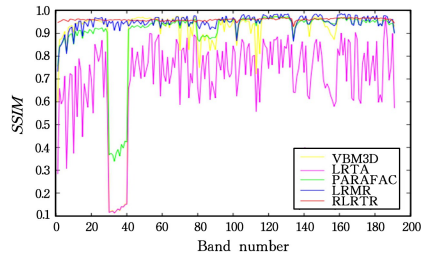


图8 模拟实验中各波段的SSIM值

Fig. 8 SSIM value of each band in simulation experiment

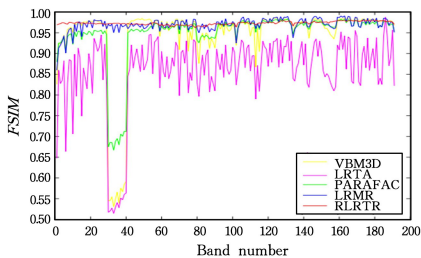


图9 模拟实验中各波段的FSIM值

Fig. 9 FSIM value of each band in simulation experiment

表1 仿真实验中去噪结果的MPSNR, MSSIM和MFSIM值

Table 1 MPSNR, MSSIM and MFSIM values of denoising results in simulation experiments

	VBM3D	LRTR	PARAFAC	LRMR	RLTR
MPSNR	31.125	24.624	32.012	33.564	34.005
MSSIM	0.8896	0.7026	0.9012	0.9486	0.9578
MFSIM	0.9432	0.8601	0.9487	0.9703	0.9765

由图1和图2可以看出,本文方法和LRMR方法能够有效地对高斯噪声进行去噪,同时保留边缘和细节信息。然而,LRTR在低信噪比下无法去除高斯噪声。虽然VBM3D和

PARAFAC的去噪结果在高信噪比下都有很好的表现,但是这两种方法仍然不能有效地保留图像细节。由图3和4可以看出,本文方法和LRMR方法都具有良好的性能,能够同时有效地去除高斯噪声和脉冲噪声。VBM3D和LRTR去噪方法无法去除混合高斯和脉冲噪声,PARAFAC只能去除部分噪声,细节信息模糊且过平滑。由图5和图6可以清楚地看到,本文提出的RLTR算法在某种程度上可以降低噪声与死线,而且还能减轻图像细节与纹理的丢失。另外,LRMR算法对死线移除是无效的,去噪后的图像中仍存在部分死线。

图7—图9中的PSNR, SSIM和FSIM也说明了该方法的有效性。显然,本文方法得到的大部分波段的PSNR, SSIM和FSIM值均高于其他4种比较方法。此外,在表1中,本文方法的MPSNR, MSSIM和MFSIM均最高,这与图1—图6所示的可视化表示结果一致。

3.2 真实数据实验

本节选取印度Pines数据集,比较了本文方法和其他4种比较方法的去噪性能。该数据有220个波段,其波长分布范围大致为 $0.4\sim 2.5\mu\text{m}$ 。通过少数部分具有吸水区域的波段移除,将条带数减少到200条,图像大小为 145×145 。

由于第1波段和第219波段的原始图像受到了噪声的严重腐蚀,没有去噪就几乎无有用的信息。图10和图11分别显示了本文方法和4种对比方法在原始波段1和219的去噪结果。

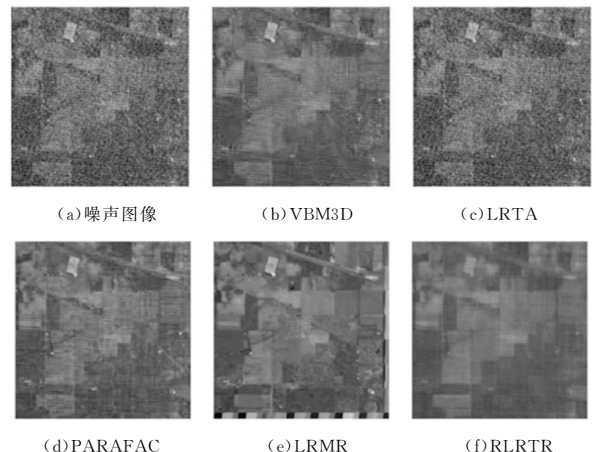


图10 Indian Pines数据集上原始波段1的去噪结果

Fig. 10 Original band 1 denoising results of Indian Pines dataset

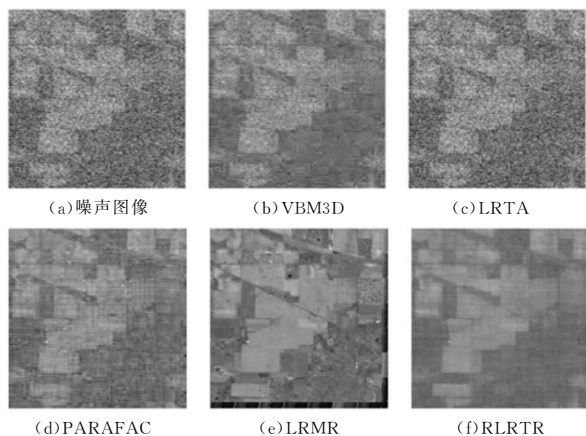


图 11 Indian Pines 数据集上原始波段 219 的去噪结果

Fig. 11 Original band 219 denoising results of Indian Pines dataset

在真实的 Indian Pines 数据集上的实验中,我们对本文方法和其他 4 种比较方法的参数进行了调整。对于 LRMR 方法,主要参数设置如下: $q=20, r=4, k=4000$ 。对于本文算法而言,两个主要参数设置如下: $\lambda=0.5, \beta=10^{-2}$ 。由图 10 和图 11 可以看出,VBM3D 方法在强噪声情况下的性能不是很好,这是因为分组块之间的相似度依赖于噪声水平。LR-TA 方法的性能较差,与原始噪声图像相比无法去除噪声,PARAFAC 方法仍然存在一些条纹噪声。由于 LRMR 是一种基于块的去噪方法,可能会丢失维间信息和详细信息,因此除边缘区域外,LRMR 方法的性能很好。此外,通过该方法恢复的图像去除了噪声,很好地保留了图像的边缘和纹理信息。

结束语 本文基于煤清洁 HSI 的张量性质数据和异常值的稀疏性质和非高斯噪声,提出了一个新的模型,命名为 RLR-TR,可以在保存 HSI 的同时删除离散值的全局结构和高斯脉冲混合噪声。仿真与真实的数据实验表明,本文算法在高光谱噪声移除上更先进,但仍有进一步的改进空间。我们未来的工作将集中在鲁棒 l_1 范数下的鲁棒低秩逼近,用于 HSI 的去噪。

参 考 文 献

- [1] ZHAO Y Q, YANG J X. Hyperspectral Image Denoising via Sparse Representation and Low-Rank Constraint [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2015, 53(1): 296-308.
- [2] WANG Z P, TYO J S, HAYAT M M. Generalized Signal-to-Noise Ratio for Spectral Sensors with Correlated Bands [J]. Journal of The Optical Society of America A, 2008, 25(10): 2528-2534.
- [3] ZHANG L F, ZHANG L P, TAO D C, et al. Compression of Hyperspectral Remote Sensing Images by Tensor Approach [J]. Neurocomputing, 2015, 147: 358-363.
- [4] ZHANG H Y, HE W, ZHANG L P, et al. Hyperspectral Image Restoration Using Low-Rank Matrix Recovery [J]. IEEE transactions on geoscience and remote sensing, 2013, 52(8): 4729-4743.
- [5] GUO X, HUANG X, ZHANG L P, et al. Hyperspectral Image Noise Reduction Based on Rank-1 Tensor Decomposition [J]. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 2013, 83: 50-63.
- [6] MA J Y, ZHAO J, TIAN J W, et al. Robust Point Matching via Vector Field Consensus [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2014, 23(4): 1706-1721.
- [7] YUAN Q Q, ZHANG L P, SHEN H F. Hyperspectral Image Denoising with A Spatial-Spectral View Fusion Strategy [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2014, 52(5): 2314-2325.
- [8] LIN T, BOURENNANE S. Survey of Hyperspectral Image Denoising Methods Based on Tensor Decompositions [J]. EURASIP journal on Advances in Signal Processing, 2013, 186(1): 1-11.
- [9] MUTI D, BOURENNANE S, MAROT J. Lower-Rank Tensor Approximation and Multiway Filtering [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2008, 30(3): 1172-1204.
- [10] RENARD N, BOURENNANE S, BLANC-TALON J. Denoising and Dimensionality Reduction Using Multilinear Tools for Hyperspectral Images [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2008, 5(2): 138-142.
- [11] LIU X F, BOURENNANE S, FOSSATI C. Denoising of Hyperspectral Images Using the PARAFAC Model and Statistical Performance Analysis [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2012, 50(10): 3717-3724.
- [12] LIN T, BOURENNANE S. Hyperspectral Image Processing by Jointly Filtering Wavelet Component Tensor [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2013, 51(6): 3529-3541.
- [13] LI Q, LI H Q, LU Z B, et al. Denoising of Hyperspectral Images Employing Two-Phase Matrix Decomposition [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2014, 7(9): 3742-3754.
- [14] GOLDFARB D, QIN Z W. Robust Low-Rank Tensor Recovery: Models and Algorithms [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2014, 35(1): 225-253.
- [15] WRIGHT J, GANESH A, RAO S, et al. Robust Principal Component Analysis: Exact Recovery of Corrupted Low-Rank Matrices via Convex Optimization [R]. Coordinated Science Laboratory Report no. UILU-ENG-09-2210, DC-243, 2009.
- [16] GANDY S, RECHT B, YAMADA I. Tensor Completion and Low-rank Tensor Recovery via Convex Optimization [J]. Inverse Problems, 2011, 27(2): 1-19.
- [17] LIU G, LIN Z, YAN S, et al. Robust Recovery of Subspace Structures by Low-Rank Representation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(1): 171-184.
- [18] LIN Z C, CHEN M M, WU L, et al. The Augmented Lagrange Multiplier Method for Exact recovery of Corrupted Low-Rank Matrices [R]. UIUC Tech. Rep. UILU-ENG-09-2215 (University Illinois at Urbana Champaign, Champaign, Illinois, 2009).
- [19] ZHANG Y. Recent advances in alternating direction methods: practice and theory [R]. Presented at IPAM Workshop: Numerical Methods for Continuous Optimization. Los Angeles, California, 2010.
- [20] ZHANG L, ZHANG L, MOU X Q, et al. FSIM: A Feature Similarity Index for Image Quality Assessment [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(8): 2378-2386.
- [21] DABOV K, FOI A, EGIAZARIAN K. Video Denoising by Sparse 3D Transform-Domain Collaborative Filtering [C] // Proceedings of 15th European Signal Processing Conference. Poznań, Poland, 2007.



WU Yong, born in 1982, postgraduate, master candidate, intermediate title. His research interests include image processing and object recognition, etc.