计算机科学
COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.210100127

关于有界 Petri 网的弱进程和弱出现网

刘　萍
甘肃民族师范学院计算机科学系　甘肃 合作 747000

摘　要　有界 Petri 网 Σ 的满进程(N,φ)利用出现网 N 和网射 φ 将 N 的 S 切对应 Σ 的可达标识,从而提供研究有界 Petri 网的可达标识的有力工具。由于出现网中限制每一个库所的后集最多一个变迁,因此,当 Σ 的库所的后集有多个变迁时,网射就会出现多次重复的现象。从而使得计算过于烦杂。文中提出弱出现网并且利用弱出现网来构造有界 Petri 网的弱进程,文中对于弱进程证明了在满进程中起重要作用的结论,表明弱进程是满进程的有意义的推广。由于弱出现网取消库所的后集元素个数的限制,在弱进程中,消除了满进程由于上述原因而产生的重复现象,提高了计算的效率。给出的例子表明了弱出现网在计算中的简便性。

关键词:满进程;弱出现网;弱 S 切;弱进程
中图法分类号　TP301

On Weakly Process of Bounded Petri Net and Weakly Occurrent Nets

LIU Ping
Department of Computer Science,Gansu Teachers College for Nationalities,Hezuo,Gansu 747000,China

Abstract　The full process (N,φ) of bounded Petri nets Σ provides a powerful tool to study the reachable remarked of bounded Petri nets Σ,mapping the S cut of occurrence net N to the reachable remarked of Σ by using occurrent net N and net map φ. Since there is no more than one transition in the back-set of any space in the occurrence network,when there are more than one transition in the back-set of some space of the Petri nets Σ,the phenomenon of multiple repeats will appear. It makes the calculation too complication. In this paper,the weakly process of bounded Petri net and weakly occurrent nets are introduced to replace full process of Petri nets Σ. The main results hold in full process are proved hold in weak processes of bounded Petri nets. Thus weak processes are a meaningful extension of full processes. Because the weak occurrence network cancels the restriction on the number of elements in the backset of the space in the weak process,the repetition phenomenon caused by the above reasons in the full process is eliminated. So that the efficiency of calculation are improved. The example given in this paper shows the simplicity of weak occurrence networks in calculation.

Keywords　Full process,Weakly occurrent net,Weakly S cuts,Weakly process

1　引言

Petri 网的满进程的概念是吴哲辉教授提出的[1]。设 $\Sigma=(S,T;F,M_0)$是 Petri 网,Σ 的满进程是指二元组合(N,φ),其中:

(1)$N=(B,E;G)$是一个出现网。

1)$(\forall b\in B)|{}^{\cdot}b|\leqslant 1\wedge|b^{\cdot}|\leqslant 1$;

2)$(\forall x,y\in B\cup E)$如果$(x,y)\in G^{+}$,则$(y,x)\notin G^{+}$,即在 N 中不存在回路;

(2)$\varphi:B\cup E\to S\cup T$ 是 N 到 Σ 的网射,满足以下条件:

1)$\varphi(B)\subseteq S$,$\varphi(E)\subseteq T$,;

2)$(\forall e\in E)\varphi({}^{\cdot}e)={}^{\cdot}\varphi(e)$,$\varphi(e^{\cdot})=\varphi(e)^{\cdot}$

3)如果 $b_1,b_2\in B(b_1\neq b_2)$,使得 $\varphi(b_1)=\varphi(b_2)$,则${}^{\cdot}b_1\neq{}^{\cdot}b_2$ 或者${}^{\cdot}b_1={}^{\cdot}b_2=\phi$,且 $b_1{}^{\cdot}\neq b_2{}^{\cdot}$ 或者 $b_1{}^{\cdot}=b_2{}^{\cdot}=\phi$。

4)$(\forall s\in S)M_0(s)=|\{b\in B:\varphi(b)=s\wedge{}^{\cdot}b=\phi\}|$。

Petri 网 Σ 的满进程(N,φ)的重要意义在于以下的性质。

(1)N 的每一个 S 切 u,对应 Σ 的一个可达标识 M,记为 $\varphi(u)$,定义为:

$(\forall s\in S)M(s)=|\{b\in B:\varphi(b)=s\wedge b\in u\}|$

(2)设 u 是出现网 N 的 S 切,$e\in E$,如果${}^{\cdot}e\subseteq u$,令 $v=(u-{}^{\cdot}e)\cup e^{\cdot}$,则 v 是 N 的 S 切,称为 u 关于 e 的转移[10],设 $t=\varphi(e)$,则 $M=\varphi(u)$在变迁 t 能够发动,且 $M[t\rangle\varphi(v)$。

(3)令 $w_0=\{b\in B:{}^{\cdot}b=\phi\}$,则 w_0 是 N 的初始 S 切,且所有 N 的 S 切都是 w_0 经过一系列 $e\in E$ 的转移所得[10]。根据(2),可以得到由初始标识 $M_0=\varphi(w_0)$可以达到的标识的一个集合,即 $R(M_0)$的子集。

由于 Petri 网的满进程的上述重要的性质,因此,满进程在有界 Petri 网的可达标识的研究中起了重要的作用[2-9]。由于在出现网中,任何库所的后集最多一个变迁,因此,当 Petri 网 Σ 中有库所的后集的元素个数大于 1 时,必然使得出现网出现多个重复段,使得计算烦杂。为了解决这个问题,本文提出弱出现网和弱进程。

基金项目:甘肃民族师范学院校长基金(GSNU-YZKY-1902)
This work was supported by the President's Fundation of Gansu Normal University for Nationalities(GSNU-YZKY-1902).
通信作者:刘萍(lwlp18@163.com)

2　弱出现网及弱 S 切

定义 1　设 $N=(B,E;G)$ 是网，如果满足下面的条件，就称 N 是弱出现网：

(1) $\forall b\in B, |{}^{\cdot}b|\leqslant 1$；即 N 的库所 b 的前集至多一个变迁；

(2) $\forall x,y\in B\cup E,(x,y)\in G^{+}\rightarrow(y,x)\notin G^{+}$，即在 N 中不存在回路。

显然出现网是弱出现网。在弱出现网中，如果 $b\in B$，$e\in{}^{\cdot}b$，因为 $|{}^{\cdot}b|\leqslant 1$，所以可以表示为 $e={}^{\cdot}b$。

在弱出现网中有与出现网类似的 S 切的概念和基本性质。

定义 2　设 $N=(B,E;G)$ 是弱出现网，$u\subseteq B,u\neq\phi$。如果对于任意 $x,y\in u,x\neq y$，都有 $(x,y)\notin G^{+}$ 且 $(y,x)\notin G^{+}$，则 u 称为 N 的弱 S 切。

引理 1　设 $N=(B,E;G)$ 是弱出现网，$b_1,b_2\in B$，如果 $(b_1,b_2)\in G^{+}$，$e={}^{\cdot}b_2$，则 $(b_1,e)\in G^{+}$。

证明：因为 $(b_1,b_2)\in G^{+}$，所以有 $\{x_0,\cdots,x_k\}\subseteq B\cup E$，使得 $b_1=x_0,x_k=b_2,(x_{i-1}x_i)\in G(i=1,\cdots,k-1),(x_{k-1},b_2)\in G$。则 $x_{k-1}\in E$ 且 $x_{k-1}\in{}^{\cdot}b_2=e$，因此 $(x_{k-2},e)\in G$，所以 $(b_1,e)\in G^{+}$。

引理 2　令 $w_0=\{b\in B:{}^{\cdot}b=\phi\}$，$w_0$ 是 N 的弱 S 切。

证明：设 $b_1,b_2\in w_0$ 使得 $(b_1,b_2)\in G^{+}$，由引理 1，$(b_1,e)\in G^{+}$。其中 $e={}^{\cdot}b_2$，因为 $b_2\in w_0$，所以 ${}^{\cdot}b_2=\phi$。矛盾。其次证明 $w_0\neq\phi$，设 $w_0=\phi$，取 $b_1\in B$，则 $b\notin w_0$，因此 ${}^{\cdot}b_1\neq\phi$。令 ${}^{\cdot}b_1=e$，因为 ${}^{\cdot}e\neq\phi$ 则有 $b_2\in{}^{\cdot}e$ 使得 ${}^{\cdot}b_2\neq\phi$ 而且 $(b_2,b_1)\in G^{+}$。因此可以得到一系列 $b_k,\cdots,b_1\in B$，使得 $(b_i,b_{i-1})\in G^{+}(i=1,\cdots,k-1)$。因此当 $j>i$ 时有 $(b_j,b_i)\in G^{+}$。因为 N 没有回路，所以得到 B 的无限子集，矛盾。因此 $w_0\neq\phi$，所以 w_0 是弱 S 切。

定义 3　弱出现网 $N=(B,E;G)$ 连同 w_0 表示为 $N=(B,E;G,w_0)$。

定理 1　设 $N=(B,E;G,w_0)$ 是弱出现网，u 是 N 的弱 S 切。如果 $e\in E$ 使得 ${}^{\cdot}e\subseteq u$，令 $v=(u-{}^{\cdot}e)\cup e^{\cdot}$，则 v 是 N 是弱 S 切，记为 $u[e]$，称 v 为 u 借助 e 的转移。

证明：设 $b_1,b_2\in v$，分以下 4 种情形证明 $(b_1,b_2)\notin G^{+}$。

(1) 如果 $b_1,b_2\in u-{}^{\cdot}e$，则 $b_1,b_2\in u$，因为 u 是 N 的弱 S 切，所以 $(b_1,b_2)\notin G^{+}$。

(2) 如果 $b_1\in u-{}^{\cdot}e,b_2\in e^{\cdot}$，则 $e={}^{\cdot}b_2$。设 $(b_1,b_2)\in G^{+}$，就有 $x_0,\cdots,x_k\in B\cup E$ 使 $b_1=x_0,(x_i,x_{i+1})\in G(i=0,\cdots,k-1),x_k=b_2$，则 $(x_{k-1},b_2)\in G$，因此 $x_{k-1}={}^{\cdot}b_2=e$。因为 $(x_{k-2},x_{k-1})\in G$，则 $(x_{k-2},e)\in G$，因此 $x_{k-2}\in{}^{\cdot}e\subseteq u$，且 $(b_1,x_{k-2})\in G^{+}$，因为 $b_1,x_{k-2}\in u$，矛盾。

(3) 如果 $b_2\in u-{}^{\cdot}e,b_1\in e^{\cdot}$，则 $(e,b_1)\in G$。设 $(b_1,b_2)\in G^{+}$，则 $(e,b_2)\in G^{+}$，取 $c\in{}^{\cdot}e$，则 $(c,b_2)\in G^{+}$，因为 $c,b_2\in u$，矛盾。

(4) 如果 $b_1\in e^{\cdot},b_2\in e^{\cdot}$，则 $e={}^{\cdot}b_2$。设 $(b_1,b_2)\in G^{+}$，则由引理 1，$(b_1,e)\in G^{+}$ 和 $(e,b_1)\in G$ 成为回路，矛盾。

定义 4　设 $R(w_0)$ 是在弱出现网 $N=(B,E;G,w_0)$ 中符合以下要求的弱 S 切子集中最小的：

(1) $w_0\in R(w_0)$；

(2) 如果 $u\in R(w_0)$，${}^{\cdot}e\subseteq u$，则 $u[e]\in R(w_0)$。

定理 2　设 u 是弱出现网 $N=(B,E;G,w_0)$ 的弱 S 切，以下条件等价：

(1) $u\in R(w_0)$；

(2) 存在弱 S 切 $u_0,\cdots,u_n$ 及 $e_1,\cdots,e_n\in E$，使得 $u_0=w_0$，$u_i=u_{i-1}[e_i](i=1,\cdots,n)$，$u_n=u$。

证明：设 R 是满足条件(2)的弱 S 切的集合，则 $w_0\in R$，如果 $u\in R,v=u[e]$，由条件(2)，$v\in R$。根据 $R(w_0)$ 的最小性，$R(w_0)\subseteq R$。反之，如果 $u\in R$，因为 $w_0\in R(w_0)$，所以根据定义 4 的条件(2)，在定理 2 的(2)中的 $u_0,\cdots,u_n$ 都在 $R(w_0)$ 中，所以 $u\in R(w_0)$，因此 $R\subseteq R(w_0)$。

定义 5　$R(w_0)$ 中的弱 S 切称为 $N=(B,E;G,w_0)$ 的 S 切。这就表明，弱出现网 $N=(B,E;G,w_0)$ 的 S 切的集合是从 w_0 经过若干次 e 转移可以得到的所有弱 S 切的集合

下面的例 1 表明，弱出现网的弱 S 切未必是 S 切。

例 1　在图 1 中，N 是弱出现网。因为 $|b_1^{\cdot}|=2$，所以 N 不是出现网。$w_0=\{b_1\},u_1=\{b_2\},u_2=\{b_3\}$ 是 3 个弱 S 切。因为 $w_0[e_1]=\{b_2\}=u_1,w_0[e_2]\neq\{b_3\},u_1[e_2]\neq\{b_3\}$，所以 w_0,u_1 是 S 切，u_2 不是 S 切。

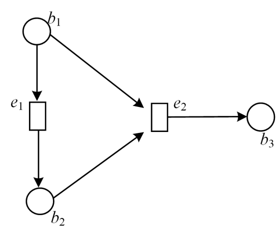

图 1　弱出现网 N

Fig. 1　Weakly emerging network N

3　Petri 网的弱进程

定义 6　设 $\Sigma=(S,T;F,M_0)$ 是 Petri 网，Σ 的弱进程是指二元组合 (N,φ)，其中：

(1) $N=(B,E;G,w_0)$ 是弱出现网，

(2) 网射 $\varphi:B\cup E\rightarrow S\cup T$ 满足以下条件：

1) $\varphi(B)\subseteq S,\varphi(E)\subseteq T$；

2) $(\forall e\in E),\varphi({}^{\cdot}e)={}^{\cdot}\varphi(e),\varphi(e^{\cdot})=\varphi(e)^{\cdot}$；

3) 如果 $b_1,b_2\in B,b_1\neq b_2$ 使得 $\varphi(b_1)=\varphi(b_2)$，则 ${}^{\cdot}b_1\neq{}^{\cdot}b_2$ 或者 ${}^{\cdot}b_1={}^{\cdot}b_2=\phi$，并且 $b_1^{\cdot}\cap b_2^{\cdot}=\phi$；

4) $(\forall s\in S)M_0(s)=|\{b\in B:\varphi(b)=s\wedge{}^{\cdot}b=\phi\}|$。

因为弱出现网允许 $|b^{\cdot}|>1$，因此弱进程中的网射不会出现满进程中可能出现的重复现象。

以下是本文的主要结论。

定理 3　设 $N=(B,E;G,w_0)$ 是弱出现网，(N,φ) 是 Petri 网 $\Sigma=(S,T;F,M_0)$ 的弱进程。

(1) 对于每一个 S 切 $u\in R(w_0)$，令 $\varphi(u)=M$ 是定义在 S 上的函数：

$M(s)=|\{b\in B:\varphi(b)=s\wedge b\in u\}|$

设 $e\in E$，如果 ${}^{\cdot}e\subseteq u$，令 $v=(u-{}^{\cdot}e)\cup e^{\cdot}$。$M=\varphi(u)$，$M_1=\varphi(v)$。设 $\varphi(e)=t$，则 $M[t>M_1$。

(2) 设 S 切 $u\in R(w_0)$，$\varphi(u)=M$，则 $M\in R(M_0)$。

证明：(1) 设 $(\forall s\in S)$：

$K_1(s)=\{b\in B:\varphi(b)=s\wedge b\in{}^{\cdot}e\}$

$K_2(s)=\{b\in B:\phi(b)=s\wedge b\in e^{\cdot}\}$

$K_0(s)=\{b\in B:\phi(b)=s\wedge b\in u-{}^\cdot e\}$

因此 $M(s)=|K_1(s)|+|K_0(s)|$，$M_1(s)=|K_2(s)|+|K_0(s)|$。因为 ${}^\cdot e\cap e^\cdot=\phi$，所以 $K_1(s)\cap K_2(s)=\phi$。

1)设 $s\in{}^\cdot t-t^\cdot$，$s\in{}^\cdot t={}^\cdot\varphi(e)=\varphi({}^\cdot e)$，因此有 $b\in{}^\cdot e$ 使得 $b\in K_1(s)$，因此 $|K_1(s)|>0$，所以 $M(s)>0$，因此 $M[t>$ 成立。如果有 $b_1,b_2\in K_1(s)(b_1\neq b_2)$，则 $e\in b_1^\cdot$，$e\in b_2^\cdot$。所以 $e\in b_1^\cdot\cap b_2^\cdot$，根据定义 6 中映射 φ 的条件(3)，矛盾。所以 $|K_1(s)|=1$。如果 $K_2(s)\neq\phi$，则有 $b_1\in e^\cdot$，$\varphi(b_1)=s$，因此 $s\in\phi(e^\cdot)=\phi(e)^\cdot=t^\cdot$，矛盾。因 $K_2(s)=\phi$，所以 $|K_2(s)|=0$。所以当 $s\in{}^\cdot t\cap t^\cdot$ 时 $M_1(s)=M(s)-1$。

2)设 $s\in t^\cdot-{}^\cdot t$，$s\in t^\cdot=\varphi(e)^\cdot=\varphi(e^\cdot)$，因此有 $b\in e^\cdot$ 使得 $b\in K_2(s)$，因 $|K_2(s)|>0$，所以 $M_1(s)>0$。如果 $b_1,b_2\in K_2(s)(b_1\neq b_2)$，则 $e\in{}^\cdot b_1$，$e\in{}^\cdot b_2$，所以 $e\in{}^\cdot b_1={}^\cdot b_2$。根据定义 6 中的映射 φ 的条件(3)，矛盾。所以 $|K_2(s)|=1$。如果 $K_1(s)\neq\phi$，则有 $b_1\in{}^\cdot e$，$\varphi(b_1)=s$，所以 $s\in\phi({}^\cdot e)={}^\cdot\phi(e)={}^\cdot t$，矛盾。所以 $K_1(s)=\phi$，则 $|K_1(s)|=0$。所以当 $s\in t^\cdot\cap{}^\cdot t$ 时 $M_1(s)=M(s)+1$。

3)设 $s\in{}^\cdot t\cap t^\cdot$，则由上述可得 $|K_1(s)|=1$，并且 $|K_2(s)|=1$，所以 $M_1(s)=M(s)$。

这就表明 $M[t>M_1$。

(2) 设 $u\in R(w_0)$，根据定理 2，则 u 是从 w_0 经过一系列 $e\in E$ 的转移而得，因为 $w_0=\{b\in B:{}^\cdot b=\phi\}$，所以 $M_0(s)=|\{b\in B:\varphi(b)=s\notin\wedge b\in w_0\}|$，由证明(1)，$M=\varphi(u)$ 必为从 M_0 经过一系列 $t\in T$ 的发动而得，因此 $M\in R(M_0)$。

例 2　图 2 是有界 Petri net Σ。库所 s_2 有令牌 1。图 3 是弱出现网 N，$|b_1^\cdot|=2$，$|b_3^\cdot|=2$，所以 N 不是出现网。

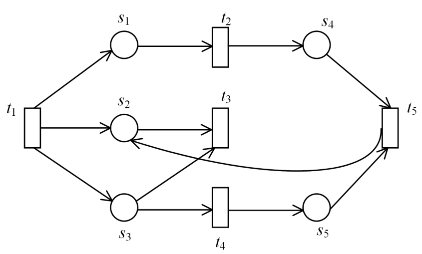

图 2　Petri 网 Σ

Fig. 2　Petri net Σ

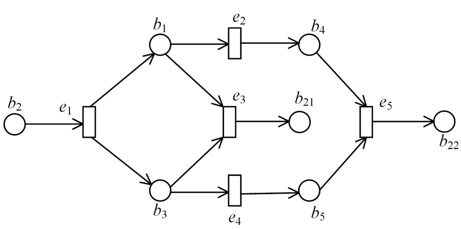

图 3　Σ 的弱进程 $s(N,\Psi)$ 中的弱出现网

Fig. 3　Emergence nets N in weak processe $s(N,\Psi)$ of Σ

网射 $\varphi:\Sigma\to N$ 的对应关系为 $\varphi(e_i)=t_i(i=1,2,3,4,5)$，$\varphi(b_i)=s_i(i=1,3,4,5)$，$\varphi(b_2)=\varphi(b_{21})=\varphi(b_{22})=s_2$。$(N,\varphi)$ 是 Σ 的弱进程。证明略。

例如 $w_0=\{b_2\}$，$M_0(s_2)=|\{b\in B:\varphi(b)=s_2\wedge b\in w_0\}|=1$，$M_0(s_i)=0(i=1,3,4,5)$。

N 的 S 切：$w_0=\{b_2\}$，$w_0[e_1]=(w_0-{}^\cdot e_1)\cup e_1^\cdot=\{b_1,b_3\}=u_1$，$u_1[e_2]=(u_1-{}^\cdot e_2)\cup e_2^\cdot=\{b_4,b_3\}=u_2$，$u_2[e_4]=(u_2-{}^\cdot e_4)\cup e_4^\cdot=\{b_4,b_5\}=u_3$，$u_3[e_5]=(u_3-{}^\cdot e_5)\cup e_5^\cdot=\{b_{22}\}=u_4$，$u_1[e_3]=(u_1-{}^\cdot e_3)\cup e_3^\cdot=\{b_{21}\}=u_5$。

S 切对应 $\varphi(u_i)=M_i(i=0,1,2,3,4,5)(u_0=w_0)$。

计算可得：

$M_0=(0,1,0,0,0)$，$M_1=(1,0,1,0,0)$，$M_2=(0,0,1,1,0)$，$M_3=(0,0,0,1,1)$，$M_4=(0,1,0,0,0)=M_0$，$M_5=(0,1,0,0,0)=M_0$。

计算过程省略。例如：$M_1(s_1)=|\{b\in B:\varphi(b)=s_1\wedge b\in u_1\}|=|\{b_1\}|=1$。计算可得：$M_0[t_1\rangle M_1$，$M_1[t_2\rangle M_2$，$M_2[t_4\rangle M_3$，$M_3[t_5\rangle M_4$，$M_1[t_3\rangle M_5$。其可以根据定理 3 计算，也可根据图 2 直接计算。

需要注意的是：

(1)在图 1 的 Petri 网 Σ 中，如果利用出现网 N_1 做网射，则从 s_1 和 s_2 起就需要分别建立两条路径，因此计算比较烦杂。

(2)本文中的弱进程和满进程比较有较大的不足。在满进程中，出现网 $N=(B,E;G)$ 有起始 S 切 $w_0=\{b:{}^\cdot b=\phi\}$ 和结束 S 切 $w_1=\{b\in B:b^\cdot=\phi\}$，分别对应标识 $\varphi(w_0)=M_0$ 和 $\varphi(w_1)=M_1$。从 M_0 起，经过所有 $t=\varphi(e)(e\in B)$ 发动到 M_1([2])。而在弱出现网中，如例 1，$w_1=\{b_3\}$ 是弱 S 切，不是 S 切。因此，不存在 w_1 对应的标识。这就要求对弱进程的定义中的条件加以适当补充。这个问题留待今后的研究。

参 考 文 献

[1] WU Z H. Theory of Petri Net[M]. Beijing: China Machine Press, 2006.

[2] WU Z H. Process expression of bounded Petri net[J]. Science in China album A, 1995, 25(12): 1332-1340.

[3] ZENG Q T, WU Z H. Process net system of Petrinet[J]. Chinese Journal of Computers, 2002, 25(12): 1308-1315.

[4] ZENG Q T, WU Z H. Process expression of un-bounded Petri net[J]. Chinese Journal of Computers, 2003, 26(12): 1629-1636.

[5] WANG M X, LIU G J, YAN C G. Process Expression of Stable Bounded Petri Nets[J]. Computers Science, 2011, 38(2): 55-58.

[6] 徐关怀. 对一个 Petri 网进程表达式的探讨[J]. 安徽理工大学学报, 2014(3): 57-59.

[7] ZHOU J Y, YU J, LIU H Y, et al. Deadlock Avoidance Policies of Concurrent Process for Petri Net[J]. Computer Technology and Development, 2016, 26(11): 5-9.

[8] ZENG Q T. A construction method for the process ex-pression of a Petri net based on synchronization composition[J]. Chinese Journal of Computers, 2008, 31(3): 381-390.

[9] ZENG Q T, WU Z H. Analgorithm for establishing the set of basic proxess sections for petri net[J]. Computer Science, 2001, 28(7): 5-11.

[10] HUANG B. Transformation of Petri Net to Process Algebra[J]. Computer Products and Circulation, 2017(11): 1-15.

[11] LIU P. The S-cut of currentnets [J]. Modern Computer (Professional Edition), 2014(9).

LIU Ping, born in 1978, postgraduate. Her main research interests include Petri net and its application, database theory.