计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.210700036

命题逻辑中三元子句集的冗余文字

李 洁 钟小梅
1 西南交通大学数学学院 成都 610031
2 西南交通大学系统可信性自动验证国家地方联合工程实验室 成都 610031
(1767112820@qq.com)

摘 要 自动推理是人工智能领域研究的核心问题之一。由于在基于归结的自动推理过程中会产生大量的冗余文字和冗余子句,进而影响归结自动推理的效率,因此消除子句集中的冗余文字和冗余子句具有重要的意义。在命题逻辑中,依据必需文字、有用文字、无用文字的相关概念和性质,针对部分三元子句集,分类给出这些三元子句集中冗余文字的判别方法,并通过具体实例对这些判别方法进行说明。

关键词:必需文字;有用文字;无用文字;三元子句集;命题逻辑
中图法分类号 TP181

Redundant Literals of Ternary Clause Sets in Propositional Logic

LI Jie and ZHONG Xiao-mei
School of Mathematics,Southwest Jiaotong University,Chengdu 610031,China
National-Local Joint Engineering Laboratory of System Credibility Automatic Verification,Southwest Jiaotong University,Chengdu 610031,China

Abstract Automatic reasoning is one of the core issues in the field of artificial intelligence. Since a large number of redundant literals and redundant clauses are generated in the process of automatic reasoning based on resolution,the resolution efficiency will be affected. It is of great significance to eliminate redundant literals and redundant clauses in the clause set. In propositional logic,according to the related concepts and properties of necessary literals,useful literals and useless literals,this paper classifies and gives the judgment methods of redundant literals in some ternary clause sets,and explains these judgment methods through specific examples.

Keywords Necessary literals,Useful literals,Useless literals,Ternary clause sets,Propositional logic

1 引言

命题逻辑中逻辑公式的化简是计算机科学和人工智能领域的重要研究方向。随着实际问题的复杂度逐渐增大,命题逻辑中子句集的冗余文字和冗余子句也逐渐增多,利用计算机求解时会浪费大量的计算时间和存储空间,严重影响求解效率。因此,消除逻辑公式中的冗余具有十分重要的意义。首先,它可以简化一个知识库,让消除冗余后的公式既没有改变原公式的含义,又能使知识更容易理解;其次,它还可以有效地提高计算机存储空间利用效率并减少计算时间。许多学者在这方面进行了深入的研究。2005 年,Liberatore[1] 对命题逻辑中逻辑公式的子句集分类以及子句集的冗余问题进行了研究,结合不冗余等价子集,分别提出了必需子句、有用子句、无用子句的概念及其等价定义,根据这 3 类子句的定义和性质可检测并消除子句集中的冗余子句,进而提高推理效率。2007 年,Fourdrinoy 等[2] 消除了 SAT 实例中的一类冗余子句,提出了一种删除冗余子句的方法,该方法可作为 SAT 求解器的预处理方法,在一定程度上提高了可满足性证明的效率。2011 年,Heule 等[3] 基于合取范式公式的化简方法,针对一些特殊情况开发和分析了子句消除程序。2013 年,Zhai 等[4] 针对子句集中有用子句、无用子句和必需子句的概念和性质,对子句集的无冗余等价子集进行了讨论并给出了冗余文字的判别方法,这些成果为命题逻辑公式的化简奠定了一些理论基础。2014 年,Tang[5] 提出了绝对冗余、相对冗余和无冗余子句 3 类子句的概念,利用子句集的可满足性提出了子句集中冗余文字和冗余子句的判别方法,为判断子句集中的冗余奠定了理论上的基础。2015 年,Deng[6] 研究了命题逻辑的子句集中文字的分类,讨论了必需文字、有用文字、无用文字,丰富了命题逻辑中子句集分类方法,为归结自动推理提供了更多的理论基础。2017 年,Rinaldi 等[7] 展示了一个相当普遍的句法守恒定理,通过将它们减少到相应的析取消除规则来消除具有正位置分离的附加公理。2019 年,Liu[8] 研究了命题逻辑中单元子句及其负文字和冗余子句,得到了一些冗余文字和冗余子句的判别方法,为命题逻辑中逻辑公式的简化提供了一定的理论支撑。2020 年,Ning 等[9] 提出了 3 种子句消去方法对命题逻辑可满足性进行了子句集化简,从而

基金项目:教育部人文社会科学研究项目青年基金项目(20XJCZH016,19YJCZH048)
This work was supported by the Humanity and Social Science Youth Foundation of Ministry of Education(20XJCZH016,19YJCZH048).
通信作者:钟小梅(zhongxm2013@home.swjtu.edu.cn)

使得求解效率更高。

上述成果主要针对一般子句集中冗余文字和冗余子句的判别展开研究，本文在此基础上，针对一类特殊子句集——三元子句集的冗余文字展开研究。

2 预备知识

定义 1[10] 在命题逻辑公式中，称原子公式及其否定叫做文字，有限多个文字的析取叫做子句，子句集 S 为 S 中所有子句合取构成的公式。

定义 2[10] 有限多个子句的合取叫做合取范式，记为 $C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_n$，其中 C_i 为子句，$i=1,\cdots,n$。

定义 3[10] 设 P 是一个原子，文字 P 和 $\neg P$ 称为一个互补对。

定义 4[11] 给定两个命题公式 A 和 B，若在任意赋值 P 下，公式 A 和 B 的真值都相等，就称 A 和 B 是等值的(或称等价)，记作 $A=B$。

定义 5[12] S 是命题逻辑中的子句集，若存在一个赋值 v，使得 S 在 v 下的真值为 1，则子句集 S 是可满足的，否则子句集 S 是不可满足的。

定义 6[4] 设 $S=\{C_1,\cdots,C_m,D\}$ 是命题逻辑中的子句集，$D=x\vee D_1$，其中 x 是文字，D_1 是子句，如果 $D\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_m=D_1\wedge C_1\wedge\cdots\wedge C_m$，则称 x 是 D 中关于 S 的冗余文字。

定义 7[6] 设 $S=\{C_1,\cdots,C_n\}$ 是命题逻辑中的子句集，x 是 S 中的一个文字：

(1)称 x 是 S 中的必需文字，如果对于任意的 $C\in S$，当 C 含 x 时，x 不是 C 中关于 S 的冗余文字；

(2)称 x 是 S 中的有用文字，如果存在 $C\in S$，当 C 含 x 时，x 不是 C 中关于 S 的冗余文字；

(3)称 x 是 S 中的无用文字，如果对于任意的 $C\in S$，当 C 含 x 时，x 是 C 中关于 S 的冗余文字。

定义 8[3,13-14] 在逻辑公式中，子句 C 只包含三个文字，则称子句 C 是三元子句。若子句集 S 中的子句全是三元子句，则称 S 为三元子句集。

定理 1[6] 设 $S=\{C_1,\cdots,C_n\}$ 是命题逻辑中的子句集，则 x 是 S 中的必需文字当且仅当对于任意 $C\in S$，C 中不含互补对，当 $C=x\vee D$ 时，子句集 S_D 可满足，其中 $S_D=\{r-\{D\}\mid r\in(S-\{C\})\}\cup\{x\}$。

定理 2[6] 设 $S=\{C_1,\cdots,C_n\}$ 是命题逻辑中的子句集，则 x 是 S 中的有用文字当且仅当存在 $C\in S$，C 中不含互补对，当 $C=x\vee D$ 时，子句集 S_D 可满足，其中 $S_D=\{r-\{D\}\mid r\in(S-\{C\})\}\cup\{x\}$。

定理 3[6] 设 $S=\{C_1,\cdots,C_n\}$ 是命题逻辑中的子句集。则 x 是 S 中的无用文字当且仅当对于任意 $C\in S$，C 中不含互补对，当 $C=x\vee D$ 时，子句集 S_D 不可满足，其中 $S_D=\{r-\{D\}\mid r\in(S-\{C\})\}\cup\{x\}$。

规则 1[15](单文字规则) 设 S 是命题逻辑中的子句集，S 有一个单元子句 L，从 S 中删去含有的 L 子句，得到一子句集 S'，则：

(1)若 $S'=\varnothing$，则 S 是可满足的；

(2)若 $S'\neq\varnothing$，则从 S' 的各子句中删去 $\neg L$ 后得到另一子句集 S''，S 是不可满足的当且仅当 S'' 不可满足。

3 三元子句集中冗余文字的判定

本节依据三元子句集所含文字的特征，对三元子句集进行分类，并分类给出部分三元子句集中必需文字、有用文字、无用文字的判别方法(本文所给出的子句都不是恒真的子句)。

3.1 三元子句集中必需文字、有用文字的判定

定理 4 设 $S=\{C_1,\cdots,C_m\}$ 是命题逻辑中的三元子句集，若 S 满足下列条件：

(1)S 所含不同文字的个数等于命题变元的个数；

(2)S 中所有子句至少含有一个相同文字，则 S 中所有文字都是必需文字。

证明：设 S 的所有子句含有相同文字 x，令 $C_i=x\vee y_i\vee z_i$，$i=1,\cdots,m$。

(1)对任意的子句 $C_i\in S$，不妨令子句集 $S'_{D_i}=\{r-\{x\vee y_i\}\mid r\in(S-\{C_i\})\}\cup\{z_i\}$，由已知条件得：$S'_{D_i}=\{y_1\vee z_1,\cdots,y_{i-1}\vee z_{i-1},z_i,y_{i+1}\vee z_{i+1},\cdots,y_m\vee z_m\}$。由条件(1)可知：$S'_{D_i}$ 中所含不同文字的个数等于命题变元的个数，所以 S'_{D_i} 中一定不含互补对，则 S'_{D_i} 是可满足的。因此，z_i 是 S 中的必需文字。同理可证得 y_i 也是 S 中的必需文字。

(2)对任意的子句 $C_i\in S$，不妨令子句集 $T_{D_i}=\{r-\{y_i\vee z_i\}\mid r\in(S-\{C_i\})\}\cup\{x\}$，$i=1,\cdots,m$；$T'_{D_i}=\{x\vee y_1\vee z_1,\cdots,x\vee y_{i-1}\vee z_{i-1},x,x\vee y_{i+1}\vee z_{i+1},\cdots,x\vee y_m\vee z_m\}$。由于 T'_{D_i} 中所有子句都含有文字 x，因此由单文字规则知：子句集 T'_{D_i} 可满足，即 x 是 S 中的必需文字。

综上可知：S 中的所有文字都是必需文字。

例 1 设 $S=\{x_1\vee x_2\vee x_3,x_1\vee x_4\vee x_5,x_1\vee x_6\vee x_7\}$ 是命题逻辑中的三元子句集，其中 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7$ 为命题变元，判断 S 中文字的类别。

由上述定理可知，每一个子句均含有相同文字 x_1。因为 S 所含不同文字的个数 7 等于命题变元的个数 7，则 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7$ 为 S 中的必需文字。

下面利用定义进行验证：令 $C_1=x_1\vee x_2\vee x_3$，$C_2=x_1\vee x_4\vee x_5$，$C_3=x_1\vee x_6\vee x_7$。

(1)对子句 C_1 中的文字 x_1，由于存在赋值 $v_1(x_1)=1$，$v_1(x_2)=v_1(x_3)=0$，$v_1(x_4)$，$v_1(x_5)$，$v_1(x_6)$，$v_1(x_7)$ 取任意真值得 $v_1(C_1\wedge C_2\wedge C_3)=1$，$v_1((x_2\vee x_3)\wedge C_2\wedge C_3)=0$，因此 $(C_1\wedge C_2\wedge C_3)\neq(x_2\vee x_3)\wedge C_2\wedge C_3$，即 x_1 不是 C_1 中关于 S 的冗余文字。同理也可证得 x_1 不是 C_2，C_3 中关于 S 的冗余文字，即对任意子句 $C\in S$，当 C 含 x 时，x 不是 C 中关于 S 的冗余文字。利用定义可知：x_1 是 S 中的必需文字。

(2)对 C_1 中的 x_2 而言：存在赋值 $v_1(x_1)=v_1(x_3)=0$，$v_1(x_2)=v_1(x_4)=v_1(x_6)=1$，得 $v_1(C_1\wedge C_2\wedge C_3)=1$，$v_1((x_1\vee x_3)\wedge C_2\wedge C_3)=0$。

因此 $C_1\wedge C_2\wedge C_3\neq(x_1\vee x_3)\wedge C_2\wedge C_3$，即 x_2 不是 C_1 中关于 S 的冗余文字，且存在 $C_1\in S$，$C_1=x_1\vee x_2\vee x_3$。对任意子句 $C\in S$，当 C 含 x 时，x 不是 C 中关于 S 的冗余文字。因此由定义得：x_2 是 S 中的必需文字。同理也可证得 x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 是 S 中的必需文字。

定理 5 设 $S=\{C_1,\cdots,C_m\}$ 是命题逻辑中的三元子句集，若 S 满足下列条件：

(1)S 中有且仅有 $m-1$ 个子句含有两个相同文字 x 和

y,令 $C_i=x\vee y\vee z_i(i=1,\cdots,m-1)$ 且 C_m 中不同时含文字 x 和 y;

(2)存在 $j\in\{1,\cdots,m-1\}$ 使得子句 $C_m=\neg x\vee y\vee z_j$(或 $C_m=x\vee\neg y\vee z_j$)。

则 x(或 y)是 S 中的有用文字。

证明:当子句 $C_m=\neg x\vee y\vee z_j$ 时,设子句 $C_1=x\vee y\vee z_1$。令 $S_{D_1}=\{r-\{y\vee z_1\}\mid r\in(S-\{C_1\})\}\cup\{x\}$,即 $S_{D_1}=\{x,x\vee z_2,\cdots,x\vee z_j,\cdots,x\vee z_{m-1},\neg x\vee z_j\}$。因为存在赋值 v_1 满足 $v_1(x)=1,v_1(z_j)=1$,使得 $v_1(S_{D_1})=1$,所以 S_{D_1} 是可满足的。

又令 $S_{D_j}=\{r-\{y\vee z_j\}\mid r\in(S-\{C_j\})\}\cup\{x\}$,$S_{D_j}=\{x\vee z_1,\cdots,x\vee z_{j-1},x,x\vee z_{j+1}\cdots,x\vee z_{m-1},\neg x\}$。因为 S_{D_j} 有互补对 $x,\neg x$,所以对 S_{D_j} 的任意赋值 v_2 都有 $v_2(S_{D_j})=0$,故 S_{D_j} 是不可满足的。

综上可知:x 是 S 中的有用文字。同理可证:当 $C_m=x\vee\neg y\vee z_j$ 时,y 是 S 中的有用文字。

定理 6　设 $S=\{C_1,\cdots,C_m\}$ 是命题逻辑中的三元子句集,若 S 满足下列条件:

(1)S 中有且仅有 $m-1$ 个子句含有相同文字 x;

(2)不含文字 x 的子句中也不含文字 $\neg x$,则 x 是 S 中的必需文字。

证明:设子句 $C_1,\cdots,C_{m-1}$ 含有相同文字 x,令 $C_i=x\vee y_i\vee z_i$,$C_m=l\vee p\vee q$,文字 $l,p,q\neq x$ 或 $\neg x$。对任意的子句 $C_i\in S$,不妨令子句集 $S_{D_i}=\{r-\{y_i\vee z_i\}\mid r\in(S-\{C_i\})\}\cup\{x\}$,$i=1,\cdots,m-1$,则存在如下 4 种情况。

(1)当 C_m 与 $C_1,\cdots,C_{m-1}$ 不含相同文字时,对任意的 $i=1,\cdots,m-1$,不妨记 $S_{D_i}=\{E_1,\cdots,E_{i-1},x,E_{i+1},\cdots,E_m\}$。

存在 S 的赋值 v:$v(x)=v(p)=1$,使得 $v(S_{D_1})=\cdots=v(S_{D_{m-1}})=1$,即 $S_{D_1},\cdots,S_{D_{m-1}}$ 都是可满足的,所以 x 是 S 中的必需文字。

(2)当 C_m 与 $C_k(k\in\{1,\cdots,m-1\})$ 含有一个相同文字时,不妨设 $l=y_k$。

$S_{D_1}=\{x,E_2,\cdots,E_m\}$

…

$S_{D_{k-1}}=\{E_1,E_2,\cdots,E_{k-2},x,E_k,\cdots,E_m\}$

$S_{D_k}=\{E_1,E_2,\cdots,E_{k-1},x,E_{k+1},\cdots,E_{m-1},p\vee q\}$

…

$S_{D_{m-1}}=\{E_1,E_2,\cdots,E_{m-2},x,E_m\}$

根据条件(2)可知:$p\neq q\neq\neg x$。因为存在 S 的赋值:$v(x)=v(p)=1$,得 $v(S_{D_1})=\cdots=v(S_{D_{m-1}})=1$,即 $S_{D_1},\cdots,S_{D_{m-1}}$ 都是可满足的,所以 x 是 S 中的必需文字。

(3)当 C_m 分别与 $C_k,C_j(k,j\in\{1,\cdots,m-1\})$ 含有一个相同文字时,设 $l=y_k,p=y_j$。

$S_{D_1}=\{x,E_2,\cdots,E_m\}$

…

$S_{D_{k-1}}=\{E_1,E_2,\cdots,E_{k-2},x,E_k,\cdots,E_m\}$

$S_{D_k}=\{E_1,E_2,\cdots,E_{k-1},x,E_{k+1},\cdots,p\vee q\}$

…

$S_{D_{j-1}}=\{E_1,\cdots,E_{j-2},x,E_j,\cdots,E_m\}$

$S_{D_j}=\{E_1,\cdots,E_{j-1},x,E_{j+1}\cdots,E_{m-1},l\vee q\}$

…

$S_{D_{m-1}}=\{E_1,\cdots,E_{m-2},x,E_m\}$

根据条件(2)可知:$l\neq p\neq q\neq\neg x$,因为存在 S 的赋值 v:$v(x)=v(l)=v(p)=1$,使得 $v(S_{D_1})=\cdots=v(S_{D_{m-1}})=1$,即 $S_{D_1},\cdots,S_{D_{m-1}}$ 都是可满足的,所以 x 是 S 中的必需文字。

(4)当 C_m 分别与 $C_k,C_j,C_l(k,j,l\in\{1,\cdots,m-1\})$ 含有一个相同文字时,不妨设 $l=y_k,p=y_j,q=y_l$。

$S_{D_1}=\{x,E_2,\cdots,E_m\}$

…

$S_{D_k}=\{E_1,E_2,\cdots,E_{k-1},x,E_{k+1},\cdots,E_{m-1},p\vee q\}$

…

$S_{D_j}=\{E_1,E_2,\cdots,E_{j-1},x,E_{j+1},\cdots,E_{m-1},l\vee q\}$

…

$S_{D_l}=\{E_1,E_2,\cdots,E_{l-1},x,E_{1+1},\cdots,E_{m-1},l\vee p\}$

…

$S_{D_{m-1}}=\{E_1,E_2,\cdots,E_{m-2},x,E_m\}$

根据条件(2)可知:$l\neq p\neq q\neq\neg x$。因为存在 S 的赋值 v:$v(S_{D_1})=\cdots=v(S_{D_{m-1}})=1$,使得 $v(S_{D_1})=\cdots=v(S_{D_{m-1}})=1$,即 $S_{D_1},\cdots,S_{D_{m-1}}$ 都是可满足的,所以 x 是 S 中的必需文字。

例 2　设 $S=\{x_1\vee x_2\vee x_3,x_1\vee x_2\vee x_4,x_3\vee x_4\vee x_5\}$ 是命题逻辑中的三元子句集,其中 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 为命题变元,判断 S 中文字的类别。

由上述定理可知:由于 S 中有 3 个子句,其中只有 2 个子句含有相同文字 x_1,且不含 x_1 的子句中也不含文字 $\neg x_1$,故 x_1 是 S 中的必需文字。

下面利用定义进行验证:令 $C_1=x_1\vee x_2\vee x_3$,$C_2=x_1\vee x_2\vee x_4$,$C_3=x_3\vee x_4\vee x_5$。

对于子句 C_1 中的文字 x_1,由于存在赋值 v_1:$v_1(x_1)=1$,$v_1(x_2)=v_1(x_3)=0$,$v_1(x_4)$ 和 $v_1(x_5)$ 取任意真值,得 $v_1(C_1\wedge C_2\wedge C_3)=1$,$v_1((x_2\vee x_3)\wedge C_2\wedge C_3)=0$,故 $C_1\wedge C_2\wedge C_3\neq(x_2\vee x_3)\wedge C_2\wedge C_3$,所以 x_1 不是 C_1 中关于 S 的冗余文字。同理可证 x_1 不是 C_2 中关于 S 的冗余文字,即 x_1 是 C 中关于 S 的必需文字。

3.2　三元子句集中无用文字的判定

定理 7　设 $S=\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$ 是命题逻辑中的三元子句集,若 S 满足下列条件:

(1)S 所含不同文字的个数大于命题变元的个数;

(2)S 中的所有子句含有两个相同文字 x,y,令 $C_i=x\vee y\vee z_i(i=1,2,\cdots,m)$,则 x 和 y 是 S 中的必需文字,z_i 是 S 中的无用文字。

证明:(1)x,y 是必需文字的证明类似上述定理 4 的证明。

(2)对任意子句 $C_i\in S$,$C_i=x\vee y\vee z_i$,令子句集 $S_{D_i}=\{r-\{x\vee y\}\mid r\in(S-\{C_i\})\}\cup\{z_i\}$,其中 $i=1,\cdots,m$。

由条件(2)可得:$S_{D_i}=\{z_1,\cdots,z_m\}$。又由条件(1)$S$ 所含不同文字的个数大于命题变元的个数可知:S_{D_i} 一定含有互补对,即 $z_1,\cdots,z_m$ 中含有互补对,故子句集 S_{D_i} 是不可满足的,所以 z_i 是 S 中的无用文字。

例 3　设 $S=\{x_1\vee x_2\vee x_3,x_1\vee x_2\vee x_4,x_1\vee x_2\vee\neg x_3\}$ 是命题逻辑中的三元子句集,其中 x_1,x_2,x_3,x_4 为命题变元,判断 S 中文字的类别。

由上述定理可知,由于每个子句均含有相同文字 x_1,x_2,且所含不同文字的个数 5 大于命题变元的个数 4,故 x_1,x_2 为必需文字,x_3,x_4 为无用文字。

下面利用定义进行验证:令 $C_1=x_1\vee x_2\vee x_3$,$C_2=x_1\vee

$x_2 \vee x_4, C_3 = x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$。

(1)对于子句 C_1 中的文字 x_1，由于存在赋值：$v_1(x_1)=1, v_1(x_2)=v_1(x_3)=0, v_1(x_4)$ 取任意真值，使得 $v_1(C_1 \wedge C_2 \wedge C_3)=1, v_1((x_2 \vee x_3) \wedge C_2 \wedge C_3)=0$，因此有 $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \neq (x_2 \vee x_3) \wedge C_2 \wedge C_3$，即 x_1 不是子句 C_1 中关于 S 的冗余文字。同理也可证得 x_1 不是子句 C_2, C_3 中关于 S 的冗余文字。对任意子句 $C \in S$，当 C 含 x 时，x 不是 C 中关于 S 的冗余文字。利用定义知：x_1 是 S 中的必需文字。同理可证得 x_2 是 S 中的必需文字。

(2)对于子句 C_1 中的文字 x_3，对 S 的任意赋值 v_1：当 $v_1(x_1)=v_1(x_2)=0, v_1(x_3), v_1(x_4)$ 取任意真值时，$v_1(C_1 \wedge C_2 \wedge C_3)=v_1((x_1 \vee x_2) \wedge C_2 \wedge C_3)=0$。

当 $v_1(x_1)=v_1(x_2)=1, v_1(x_3), v_1(x_4)$ 取任意真值时，$v_1(C_1 \wedge C_2 \wedge C_3)=v_1((x_1 \vee x_2) \wedge C_2 \wedge C_3)=1$。

综上知：$C_1 \wedge C_2 \wedge C_3=(x_1 \vee x_2) \wedge C_2 \wedge C_3$，即 x_3 是 C_1 中关于 S 的冗余文字。因为 S 中只有子句 C_1 含有文字 x_3，所以利用定义得 x_3 是 C_1 中关于 S 的无用文字。同理可证 $x_4, \neg x_3$ 也为 S 中的无用文字。

定理 8 设 $S=\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ 是命题逻辑中的三元子句集，若 S 满足下列条件：

(1)S 所含不同文字的个数大于命题变元的个数；

(2)S 中所有子句只含有一个相同文字 x，令 $C_i = x \vee y_i \vee z_i (i=1, \cdots, m)$，存在子句 $C_j, C_k \in S$，满足 $C_j = x \vee y_r \vee \neg z_r, C_k = x \vee \neg y_r \vee z_r$，其中 $r, j, k \in \{1, \cdots, m\}$ 且 $j, k \neq r$。则 x 是 S 中的必需文字，$\neg y_r$ 和 $\neg z_r$ 是 S 中的无用文字。

证明：(1)对任意子句 $C_i \in S, C_i = x \vee y_i \vee z_i$，不妨令子句集 $S_{D_i}=\{r-\{x \vee z_i\} \mid r \in (S-\{C_i\})\} \cup \{y_i\}, i=1,2,\cdots,m, i \neq j \neq k$，由条件(2)可得：

$$S_{D_k}=\{y_1 \vee z_1, \cdots, y_{k-1} \vee z_{k-1}, \neg y_r, y_{k+1} \vee z_{k+1}, \cdots, y_{r-1} \vee z_{r-1}, y_r, y_{r+1} \vee z_{r+1}, \cdots, y_m \vee z_m\}$$

可知 S_{D_k} 中含有互补对 $y_r, \neg y_r$，故子句集 S_{D_k} 不可满足，所以 $\neg y_r$ 是 S 中的无用文字。同理可证得 $\neg z_r$ 也是 S 中的无用文字。

(2)又令 $T_{D_i}=\{r-\{y_i \vee z_i\} \mid r \in (S-\{C_i\})\} \cup \{x\}$，记 $T_{D_i}=\{E_1, \cdots, E_{i-1}, x, E_{i+1}, \cdots, E_m\}$。

因为 S 中所有子句含有一个相同文字 x，所以存在赋值 $v(x)=1$ 得 $v(T_{D_1})=\cdots=v(T_{D_m})=1$，故 $T_{D_1}, \cdots, T_{D_m}$ 都是可满足的，所以 x 是 S 中的必需文字。

定理 9 设 $S=\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ 是命题逻辑中的三元子句集，若 S 满足下列条件：

(1)S 中有且仅有 $m-1$ 个子句含有两个相同文字 x, y，令 $C_i = x \vee y \vee z_i (i=1,2,\cdots,m-1)$；

(2)存在子句 $C_j \in S$，满足 $C_j = x \vee y \vee \neg z_k, j, k \in \{1, \cdots, m-1\}$ 且子句 C_m 不含文字 z_k，则 z_k 和 $\neg z_k$ 是 S 中的无用文字。

证明：对任意子句 $C_i \in S, C_i = x \vee y \vee z_i$，令子句集 $S_{D_i}=\{r-\{x \vee y\} \mid r \in (S-\{C_i\})\} \cup \{z_i\}$。

由(2)得 $S_{D_k}=\{z_1, \cdots, z_k, \cdots, z_{j-1}, \neg z_k, z_{j+1}, \cdots, z_{m-1}, E_m\}$，可知 S_{D_k} 中含有互补对 $z_k, \neg z_k$，故子句集 S_{D_k} 是不可满足的，所以 z_k 是 S 中的无用文字。同理可证得 $\neg z_k$ 是 S 中的无用文字。

例 4 设在命题逻辑的三元子句集 S 中，令 $S=\{x_1 \vee x_2 \vee x_3, x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_4, x_4 \vee x_5 \vee x_6\}$，其中 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 为命题变元，判断 S 中文字的类别。

由定理可知，由于 S 中有 4 个子句，其中只有 3 个子句含有相同文字 x_1，存在子句 $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ 和子句 $x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$，故 x_3 是 S 中的无用文字。

下面利用定义进行验证：令 $C_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3, C_2 = x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3, C_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_4, C_4 = x_4 \vee x_5 \vee x_6$。

对子句 C_1 中的文字 x_3，由于存在赋值 v_1：当 $v_1(x_1)=v_1(x_2)=0, v_1(x_3), v_1(x_4), v_1(x_5), v_1(x_6)$ 取任意真值时，得 $v_1(C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4)=v_1((x_1 \vee x_2) \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4)=0$。

当 $v_1(x_1)=v_1(x_2)=1, v_1(x_3), v_1(x_4), v_1(x_5), v_1(x_6)$ 取任意真值时，得 $v_1(C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4)=v_1((x_1 \vee x_2) \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4)=1$。

综上知：$C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4=(x_1 \vee x_2) \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$，即 x_3 是 C_1 中关于 S 的冗余文字。因为 S 中只有子句 C_1 含有文字 x_3，所以利用定义知：x_3 是 C_1 中关于 S 的无用文字。

定理 10 设 $S=\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ 是命题逻辑中的三元子句集，若 S 满足下列条件：

(1)S 中有且仅有 $m-1$ 个子句含有一个相同文字 x，令 $C_i = x \vee y_i \vee z_i (i=1,2,\cdots,m-1)$；

(2)存在子句 $C_j, C_k \in S$，满足 $C_j = x \vee y_r \vee \neg z_r, C_k = x \vee z_r \vee \neg y_r, r, j, k \in \{1, \cdots, m-1\}$ 且 $j \neq k \neq r$，则 x 是 S 中的必需文字，$\neg y_r$ 和 $\neg z_r$ 是 S 中的无用文字。

证明：(1)x 是必需文字的证明类似于定理 4 中的证明。

(2)对任意子句 $C_i \in S, C_i = x \vee y_i \vee z_i$，令子句集 $S_{D_i}=\{r-\{x \vee y_i\} \mid r \in (S-\{C_i\})\} \cup \{z_i\}, i=1,2,\cdots,m-1$。

由已知条件(2)可以得到：子句集 $S_{D_j}=\{E_1, \cdots, E_{r-1}, z_r, E_{r+1}, \cdots, E_{j-1}, \neg z_r, E_{j+1}, \cdots, E_m\}$，所以可知 S_{D_j} 中有互补对 $z_r, \neg z_r$，即子句集 S_{D_j} 是不可满足的，故 $\neg z_r$ 是 S 中的无用文字。同理也可证得：$\neg y_r$ 是 S 中的无用文字。

定理 11 设 $S=\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ 是命题逻辑中的三元子句集，若 S 满足下列条件：

(1)S 中有且仅有一个子句含有文字 x，不妨令 $C_1 = x \vee y_1 \vee z_1$；

(2)存在 $k \in \{2, \cdots, m\}$，子句 $C_k = \neg x \vee y_1 \vee z_1$，则 x 是 S 中的无用文字。

证明：令 $S_{D_1}=\{r-\{y_1 \vee z_1\} \mid r \in (S-\{C_1\})\} \cup \{x\}$，记 $S_{D_1}=\{x, E_2, \cdots, E_{k-1}, \neg x, E_{k+1}, \cdots, E_m\}$。因为子句集 S_{D_1} 中含有互补对 $x, \neg x$，所以对 S 的任意赋值 v 都有 $v(S_{D_1})=0$，即 S_{D_1} 不可满足，所以 x 是 S 中的无用文字。

结束语 本文主要研究了命题逻辑中三元子句集中冗余文字的判别方法，运用必需文字、有用文字、无用文字的定义和性质，根据三元子句集的特点给出了部分三元子句集中必需文字、有用文字、无用文字的判别方法。在此基础上，下一步的工作将会研究三元子句集中冗余子句的判别方法，进而将这些判别方法拓展到 k 元子句集中并对这些判别方法设计相应的算法。

参考文献

[1] LIBERATORE P. Redundancy in logic I:CN propositional formulae[J]. Artificial Intelligence, 2005, 163(2): 203-232.

(下转第 118 页)

Advances in Neural Information Processing Systems,2018,31:1087-1098.

[5] CHOI J,MIN C,LEE B. Mathematical Analysis on Information-Theoretic Metric Learning With Application to Supervised Learning[J]. IEEE Access,2019,7:121998-122005.

[6] WU W,TAO D,LI H,et al. Deep features for person re-identification on metric learning[J]. Pattern Recognition, 2021, 110:107424.

[7] WANG F,ZUO W,ZHANG L,et al. A kernel classification framework for metric learning[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2014,26(9):1950-1962.

[8] PASOLLI E,YANG H L,CRAWFORD M M. Active-metric learning for classification of remotely sensed hyperspectral images[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing,2015,54(4):1925-1939.

[9] KUMARI P,GORU R,CHAUDHURI S,et al. Batch Decorrelation for Active Metric Learning[C]// IJCAI. 2020.

[10] ZHOU Z H. A brief introduction to weakly supervised learning [J]. National science review,2018,5(1):44-53.

[11] AGGARWAL C C,KONG X,GU Q,et al. Active learning:A survey[M]// Data Classification: Algorithms and Applications. CRC Press,2014:571-605.

[12] SHARMA M,BILGIC M. Evidence-based uncertainty sampling for active learning[J]. Data Mining and Knowledge Discovery,2017,31(1):164-202.

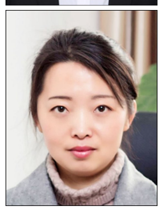
[13] YE Y,LI T,ADJEROH D,et al. A survey on malware detection using data mining techniques[J]. ACM Computing Surveys (CSUR),2017,50(3):1-40.

[14] GRAVES A,BELLEMARE M G,MENICK J,et al. Automated Curriculum Learning for Neural Networks[C]// International Conference on Machine Learning. PMLR,2017:1311-1320.

[15] YANG Y,LOOG M. A benchmark and comparison of active learning for logistic regression[J]. Pattern Recognition, 2018,83:401-415.

[16] KAO C C,LEE T Y,SEN P,et al. Localization-aware active learning for object detection[C]// Asian Conference on Computer Vision. Cham:Springer,2018:506-522.

HOU Xia-ye, born in 1996,postgraduate. His main research interests include machine learning and artificial intelligence.



CHEN Hai-yan, born in 1979, Ph.D, lecturer,is a member of China Computer Federation. Her main research interests include machine learning and artificial intelligence.

(上接第 112 页)

[2] FOURDRINO Y O,ÉRIC G,MAZURE B. Eliminating Redundant Clauses in SAT Instances[C]// Proceedings of International Conference on Integration of Ai and Or Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems. DBLP,2007:71-83.

[3] HEULE M,M JARVISALO,BIERE A. Efficient CNF simplification based on binary implication graphs[C]// Proceedings of the 14th International Conference on Theory and Application of Satisfiability Testing. Springer Berlin Heidelberg,2011.

[4] ZHAI C H,QIN K Y. Redundancy clause and redundancy literal of propositional logic[J]. Computer Science,2013,40(5):48-50.

[5] TANG SH H. Research redundancy of set of clauses in propositional logic[D]. Chengdu:Southwest Jiaotong University,2014.

[6] DENG P. The classification of set of clauses in propositional logic[D]. Chengdu:Southwest Jiaotong University,2015.

[7] RINALDI D,SCHUSTER P,WESSEL D. Eliminating disjunctions by disjunction elimination[J]. Bulletin of Symbolic Logic,2017,23(2):181-200.

[8] LIU T. Research on redundant clauses and redundant literals in propositional logic[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University,2019.

[9] ING X R,XU Y,CHEN Z S. Novel preprocessing clause elimination methods for propositional SAT solvers[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems,2020,26(8):2133-2142.

[10] LIU X H. Automatic reasoning based on resolution method [M]. Science Press,1994.

[11] SHI CH Y,WANG J X. Mathematical logic and set theory[M]. Beijing:Tsinghua University Press,2000.

[12] HEULE M,RVISALO M,LONSING F. Clause elimination for SAT and QSAT[J]. Journal of Artificial Intelligence Research,2015,53(1):127-168.

[13] HEULE M,JRVISALO M,BIERE A. Clause Elimination Procedures for CNF Formulas[C]// Logic for Programming, Artificial Intelligence, & Reasoning-international Conference, Lpar-17. DBLP,2010:357-371.

[14] LIU J,ZHOU H H. New algebraic logic reduction method for boolean formula[J]. Computer Science,2020,47(5):32-37.

[15] WANG G J. Introduction to mathematical logic and resolution principle[M]. Science Press,2003:17-22.

LI Jie, born in 1996, postgraduate. Her main research interests include intelligent information processing and automatic reasoning.

ZHONG Xiao-mei, born in 1984, Ph.D, lecturer. Her main research interests include logic-based automatic reasoning and so on.