基于剩余格的模糊粗糙集的拓扑性质

许思雨, 秦克云

引用本文

许思雨, 秦克云. 基于剩余格的模糊粗糙集的拓扑性质[J]. 计算机科学, 2022, 49(6A): 140-143.

XU Si-yu, QIN Ke-yun. Topological Properties of Fuzzy Rough Sets Based on Residuated Lattices[J]. Computer Science, 2022, 49(6A): 140-143.

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.210200123

基于剩余格的模糊粗糙集的拓扑性质

许思雨　秦克云
西南交通大学数学学院　成都 611756

摘　要　研究了基于剩余格的 L-模糊粗糙集模型的拓扑结构,给出了由模糊蕴涵确定的下近似算子诱导的 L-模糊拓扑并讨论了它的基本性质。其中的知识为一般 L-模糊关系,无需假设其自反性及强串行性。借助 L-模糊关系的传递闭包构造了相应的 L-模糊拓扑的内部算子及闭包算子。研究了不同的 L-模糊关系确定的下近似算子诱导的 L-模糊拓扑空间之间的关系,并借助相应的拓扑提出了一种 L-模糊关系分类方法。

关键词:剩余格;模糊粗糙集;模糊拓扑;模糊关系;近似算子
中图法分类号　TP182

Topological Properties of Fuzzy Rough Sets Based on Residuated Lattices

XU Si-yu and QIN Ke-yun
College of Mathematics,Southwest Jiaotong University,Chengdu 611756,China

Abstract　This paper is devoted to the study of the topological structure of L-fuzzy rough sets based on residuated lattices. The L-fuzzy topologies induced by the lower approximation operators determined by fuzzy implication operators are presented and its basic properties being discussed. The knowledge of the L-fuzzy approximation space is a general L-fuzzy relation,and there is no need to assume its reflexivity and strong seriality. Based on the transitive closures of the L-fuzzy relations,the interior operators and closure operators of the corresponding L-fuzzy topologies are constructed. The relationships among L-fuzzy topologies induced by lower approximation operators corresponding to different L-fuzzy relations are investigated,and a classification method for L-fuzzy relations is presented by using related topologies.

Keywords　Residuated lattices,Fuzzy rough sets,Fuzzy topology,Fuzzy relation,Approximation operator

1　引言

1982 年,Pawlak 提出了粗糙集理论[1]。粗糙集理论是一种处理不确定性问题的数学工具,能够定量分析处理不精确、不一致以及不完整信息与知识。经过三十多年的发展,粗糙集理论已经在知识与数据发现、模式识别与分类、数据挖掘等领域取得了成功应用[2-5]。

粗糙集理论的核心概念是从近似空间中导出的一对近似算子,即上、下近似算子。为了拓展粗糙集理论的应用范围,许多研究者对基于等价关系的 Pawlak 粗糙集模型进行了多种形式的推广。模糊集和粗糙集理论都是刻画不完备和不确定性信息的数学工具。Dubois 和 Prade[6] 将模糊集和粗糙集相结合,建立了模糊粗糙集模型。Morsi 和 Yakout[7] 讨论了模糊粗糙集模型中近似算子的公理化方法。Radzikowska 和 Kerre[8] 通过三角模和模糊蕴涵算子建立了一般模糊粗糙集模型。Yang 和 Hu[9-10] 提出了基于模糊覆盖的粗糙集模型,研究了模型的基本性质,进一步讨论了基于覆盖的多粒度模糊粗糙集及其应用。文献[11-14]进一步研究了模糊粗糙集模型的推广及其应用。此外,变精度模糊粗糙集模型研究也受到人们的广泛关注[15-17]。基于 Ziako[15] 提出的变精度粗糙集模型,Mieszkowicz-Rolka 和 Rolka[16] 提出了变精度模糊粗糙集模型。Zhao[17] 提出了一种变精度模糊粗糙模型,用以处理噪声数据。Radzikowska 和 Kerre[18] 提出了基于完备剩余格的 L-模糊粗糙集模型,文献[19-20]研究了 L-模糊粗糙集模型中近似算子的公理化问题。

拓扑学是基础数学中的一个重要分支,在数学的诸多领域中具有广泛应用。近年来,粗糙集以及模糊粗糙集的拓扑结构成为粗糙集理论的热门研究课题。文献[21-24]研究了广义粗糙集模型中近似算子的拓扑性质,刻画了广义粗糙近似算子的拓扑结构。Wang[25] 基于[0,1]上的左(右)连续 t 模及其诱导的剩余蕴涵构造模糊粗糙近似算子,讨论了上、下近似集构成的拓扑结构。Qin[26] 讨论了模糊近似空间中基于自反、传递模糊关系的模糊近似算子诱导的模糊拓扑。Wang[27] 针对基于剩余格的 L-模糊粗糙集模型,构造了 L-模糊上、下近似算子的不动点构成的 L-模糊拓扑空间,其中的 L-模糊关系具有强串行性;讨论了拓扑空间的基本性质。Ma[28] 构造了 L-模糊近似算子诱导的 L-模糊拓扑空间,其中的 L-模糊关系具有自反性。Hao[29] 基于剩余格的 L-模糊粗糙集模型构造了 L-模糊上近似集构成的 L-模糊拓扑空间,讨论了拓扑空间的基本性质。在以上研究工作的基础上,本文针对基于剩余格的 L-模糊粗糙集模型进一步讨论 L-模糊粗糙近似算子诱导的拓扑及其基本性质,其中的知识为一般 L-

基金项目:国家自然科学基金(61976130)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61976130).
通信作者:许思雨(15225728610@163.com)

模糊关系,无需假设其自反性及强串行性。研究结果对于进一步丰富粗糙集的拓扑结构研究具有理论意义。

2 预备知识

本节主要介绍模糊粗糙集的基本概念和性质。

定义 1[29] 一个剩余格是一个代数系统 $L=(L,\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$,其中:

(1)$(L,\vee,\wedge,0,1)$是一个有界格。

(2)$\otimes:L\times L\to L$ 满足任意 $a,b,c\in L$:

1)$a\otimes b=b\otimes a$;

2)$(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$;

3)$1\otimes a=a$;

4)$a\leqslant b\Rightarrow a\otimes c\leqslant b\otimes c$。

(3)$\to:L\times L\to L$ 是关于$\otimes$的剩余运算,即对于任意 $a,b,c\in L$,有 $a\otimes b\leqslant c\Leftrightarrow a\leqslant b\to c$。

命题 1[30-31] 设 $L=(L,\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$是一个剩余格,对于任意 $a,b,c\in L$,下列性质成立:

(1)若 $a\leqslant b$,则 $c\to a\leqslant c\to b$,$a\to c\geqslant b\to c$。

(2)$a\otimes(a\to 0)=0$。

(3)$1\to a=a$。

(4)$a\leqslant b$ 当且仅当 $a\to b=1$。

(5)$a\to(b\to c)=(a\otimes b)\to c$。

(6)$a\leqslant\neg\neg a$,其中$\neg a=a\to 0$。

(7)若 L 是完备格,则

1) $(\bigvee_{i\in I}a_i)\otimes b=\bigvee_{i\in I}(a_i\otimes b)$;

2) $a\to\bigwedge_{i\in I}b_i=\bigwedge_{i\in I}(a\to b_i)$,$\bigvee_{i\in I}a_i\to b=\bigwedge_{i\in I}(a_i\to b)$。

如果对于任意 a,有$\neg\neg a=a$,则称 L 为正则剩余格。

定义 2[32] 设 L 是一个完备剩余格,U 是论域,称映射 $A:U\to L$ 为U 上的一个L-模糊集。$U\times U$ 上的L-模糊集称为 U 上的 L-模糊关系。

以下用 $F_L(U)$表示 U 上所有 L-模糊集构成的集合。对于任意 $A,B,A_i\in F_L(U)$,$i\in\Lambda$,Λ 是指标集,定义如下的运算:对于任意 $x\in U$:

$(A\otimes B)(x)=A(x)\otimes B(x)$

$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x)$

$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x)$

$(A\to B)(x)=A(x)\to B(x)$

$(\neg A)(x)=\neg A(x)$

$(\bigcup_{i\in\Lambda}A_i)(x)=\bigvee_{i\in\Lambda}A_i(x)$

$(\bigcap_{i\in\Lambda}A_i)(x)=\bigwedge_{i\in\Lambda}A_i(x)$

以下用 $\hat{a}$ 表示常值模糊集,即对于任意 $x\in U$,有 $\hat{a}(x)=a$ 成立,其中 $a\in L$;如果对于任意 $x\in U$,有 $A(x)\leqslant B(x)$成立,则称 A 是 B 的模糊子集,记为 $A\subseteq B$。

定义 3[33] 设 R 是 U 上的一个 L-模糊关系。称 R 是串行的,如果对于任意 $x\in U$,有 $\bigvee_{y\in U}R(x,y)=1$;称 R 是自反的,如果对于任意 $x\in U$,有 $R(x,x)=1$;称 R 是对称的,如果对于任意 $x,y\in U$,有 $R(x,y)=R(y,x)$;称 R 是传递的,如果对于任意 $x,y,z\in U$,有 $R(x,z)\geqslant\bigvee_{y\in U}R(x,y)\otimes R(y,z)$。如果 R 自反、对称、传递,则称 R 是等价关系。

定义 4[18] 设 U 是论域,L 是一个完备剩余格,R 是 U 上的一个 L-模糊关系。称(U,R)是 L-模糊近似空间,且称映射 $\underline{R},\overline{R}:F_L(U)\to F_L(U)$为 L-模糊下近似算子和 L-模糊上近似算子,其中对于任意 $A\in F_L(U)$,$x\in U$,有

$$\underline{R}(A)(x)=\bigwedge_{y\in U}(R(x,y)\to A(y))$$

$$\overline{R}(A)(x)=\bigvee_{y\in U}(R(x,y)\otimes A(y))$$

命题 2[18] 设 L 是一个完备剩余格,(U,R)是 L-模糊近似空间,则以下性质成立:

(1)$\overline{R}(\varnothing)=\varnothing$,$\underline{R}(U)=U$;

(2)若 $A\subseteq B$,则 $\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(B)$,$\overline{R}(A)\subseteq\overline{R}(B)$;

(3)$\overline{R}(\bigcup_{i\in\Lambda}A_i)=\bigcup_{i\in\Lambda}\overline{R}(A_i)$,$\underline{R}(\bigcap_{i\in\Lambda}A_i)=\bigcap_{i\in\Lambda}\underline{R}(A_i)$;

(4)$\underline{R}(1_y\to\hat{a})(x)=R(x,y)\to a$,$\underline{R}(1_{U-\{y\}})(x)=\neg R(x,y)=R(x,y)\to 0$。

命题 3[18] 设 L 是一个完备剩余格,(U,R)是 L-模糊近似空间,则以下条件等价:

(1)R 是 U 上的一个自反 L-模糊关系;

(2)对于任意 $A\in F_L(U)$,有 $\underline{R}(A)\subseteq A$;

(3)对于任意 $A\in F_L(U)$,有 $A\subseteq\overline{R}(A)$。

命题 4[18] 设 L 是一个完备剩余格,(U,R)是 L-模糊近似空间,则以下条件等价:

(1)R 是 U 上的一个传递 L-模糊关系;

(2)对于任意 $A\in F_L(U)$,有 $\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(\underline{R}(A))$;

(3)对于任意 $A\in F_L(U)$,有 $\overline{R}(\overline{R}(A))\subseteq\overline{R}(A)$。

定理 1 设 L 是一个完备剩余格,(U,R_i)是 L-模糊近似空间,其中 $i\in\Lambda$,Λ 是指标集。对于任意 $A\in F_L(U)$,有:

$$\underline{\bigcup_{i\in\Lambda}R_i}(A)=\bigcap_{i\in\Lambda}\underline{R_i}(A),\ \overline{\bigcup_{i\in\Lambda}R_i}(A)=\bigcup_{i\in\Lambda}\overline{R_i}(A)$$

证明:对于任意 $x\in U$,$A\in F_L(U)$,有:

$$\begin{aligned}\underline{\bigcup_{i\in\Lambda}R_i}(A)(x)&=\bigwedge_{y\in U}(\bigcup_{i\in\Lambda}R_i(x,y)\to A(y))\\&=\bigwedge_{y\in U}(\bigvee_{i\in\Lambda}R_i(x,y)\to A(y))\\&=\bigwedge_{y\in U}\bigwedge_{i\in\Lambda}(R_i(x,y)\to A(y))\\&=\bigwedge_{i\in\Lambda}\bigwedge_{y\in U}(R_i(x,y)\to A(y))\\&=\bigwedge_{i\in\Lambda}\underline{R_i}(A)(x)\\&=(\bigcap_{i\in\Lambda}\underline{R_i}(A))(x)\end{aligned}$$

从而有$\underline{\bigcup_{i\in\Lambda}R_i}(A)=\bigcap_{i\in\Lambda}\underline{R_i}(A)$。

类似地,可以证明$\overline{\bigcup_{i\in\Lambda}R_i}(A)=\bigcup_{i\in\Lambda}\overline{R_i}(A)$。

引理 1[33] 设 L 是一个完备剩余格,(U,R)是 L-模糊近似空间,对于任意 $A\in F_L(U)$,有 $\underline{R}(A)\subseteq\neg\overline{R}(\neg A)$,$\overline{R}(A)\subseteq\neg\underline{R}(\neg A)$。

引理 2[33] 设 L 是一个完备正则剩余格,(U,R)是 L-模糊近似空间,则对于任意 $A\in F_L(U)$,有 $\underline{R}(A)=\neg\overline{R}(\neg A)$,$\overline{R}(A)=\neg\underline{R}(\neg A)$。

3 *L*-模糊近似算子和 *L*-模糊拓扑之间的关系

定义 5[29] 设 L 是一个完备剩余格,U 是论域,$J\subseteq F_L(U)$。若 J 满足条件:

(1)$\varnothing,U\in J$;

(2)对于任意 $A,B\in J$,有 $A\cap B\in J$;

(3)对于任意 $\alpha\subseteq J$,有 $\bigcup_{A\in\alpha}A\in J$。

则称 J 为 U 上的一个 L-模糊拓扑,并称(U,J)为 L-模糊拓扑空间。

假设 τ 为 U 上的 L-模糊拓扑,其内部与闭包算子分别定义为:对于任意 $A\in F_L(U)$,$int(A)=\bigcup\{B\mid B\in\tau,B\subseteq A\}$,$cl(A)=\bigcap\{B\mid \sim B\in\tau,A\subseteq B\}$。

若 L 是一个正则完备剩余格,则 cl 与 int 对偶,即对于任意 $A\in F_L(U)$,有 $int(A)=\neg cl(\neg A)$,$cl(A)=\neg int(\neg A)$。

定理 2 设 L 是一个完备剩余格,(U,R)是 L-模糊近似空间,则 $\tau_R=\{A\mid A\in F_L(U),A\subseteq\underline{R}(A)\}$是一个模糊拓扑。

证明:(1)$\varnothing,U\in\tau_R$ 显然成立。

(2)对于任意 $A,B\in F_L(U)$,若 $A,B\in\tau_R$,则 $A\subseteq\underline{R}(A)$,$B\subseteq\underline{R}(B)$,从而有 $A\cap B\subseteq\underline{R}(A)\cap\underline{R}(B)=\underline{R}(A\cap B)$。即有 $A\cap B\in\tau_R$。

(3) 对于任意 $A_i\in\tau_R,i\in\Lambda$,其中 Λ 是指标集,有 $A_i\subseteq\underline{R}(A_i)$,从而由近似算子的单调性可得 $\bigcup\limits_{i\in\Lambda}A_i\subseteq\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\underline{R}(A_i)\subseteq\underline{R}(\bigcup\limits_{i\in\Lambda}A_i)$,即 $\bigcup\limits_{i\in\Lambda}A_i\in\tau_R$。故 τ_R 是一个模糊拓扑。

推论 1 若 R 串行,则对于任意 $a\in L$,有 $\hat{a}\in\tau_R$。

命题 5 设 L 是一个完备剩余格,(U,R)是 L-模糊近似空间。

(1)若 R 是自反关系,则

$\tau_R=\{A\mid A\in F_L(U),\underline{R}(A)=A\}$

(2)若 R 是自反、传递关系,则

$\tau_R=\{\underline{R}(A)\mid A\in F_L(U)\}$

由命题 5 可知,不同关系 R 所诱导的模糊拓扑不同。当 R 是自反关系,则元素 A 需要满足两个条件;当 R 是自反、关系时,元素则是 A 的下近似。

4 基于剩余格的 *L*-模糊拓扑的基本性质

设 U 为论域,L 是一个完备剩余格,以下用 I 表示 U 上的恒等关系,即 $I:U\times U\to L$ 且对于任意 $x,y\in U$,有 $I(x,x)=1$;当 $x\neq y$ 时,有 $I(x,y)=0$。设 R,S 为 U 上的 L-模糊关系,定义它们的复合 $R\circ S:U\times U\to L$ 为:对于任意 $x,y\in U$,

$R\circ S(x,z)=\bigvee\limits_{y\in U}(S(x,y)\otimes R(y,z))$

令 $R^1=R,R^{n+1}=R^n\circ R(n\geqslant1)$,$t(R)=\bigcup\limits_{n\geqslant1}R^n$,称 $t(R)$为 R 的传递闭包。

引理 3 $t(R)$是包含 R 的最小传递关系。

证明:(1)$R\subseteq t(R)$显然成立。对于任意 $x,y,z\in U$,有

$$\begin{aligned}t(R)(x,y)\otimes t(R)(y,z)&=(\bigvee_{n\geqslant1}R^n(x,y))\otimes(\bigvee_{m\geqslant1}R^m(y,z))\\&=\bigvee_{n\geqslant1}\bigvee_{m\geqslant1}R^n(x,y)\otimes R^m(y,z)\end{aligned}$$

对于任意 $n\geqslant1,m\geqslant1$,有

$$\begin{aligned}R^n(x,y)\otimes R^m(y,z)&\leqslant\bigvee_{u\in U}R^n(x,u)\otimes R^n(u,z)\\&=R^{n+m}(x,z)\leqslant t(R)(x,z)\end{aligned}$$

从而有 $t(R)(x,y)\otimes t(R)(y,z)\leqslant t(R)(x,z)$。即 $t(R)$是传递关系。

(2)设 $R\subseteq S$,S 为传递关系,则有

$R^2=R\circ R\subseteq S\circ S\subseteq S$

$R^3=R^2\circ R\subseteq S\circ S\subseteq S$

一般地,可以证明对于任意 n,有 $R^n\subseteq S$,从而有 $t(R)=\bigcup\limits_{n\geqslant1}R^n\subseteq S$。

引理 4 $t(R)\cup I=t(R\cup I)$。

证明:(1)$t(R)\cup I$ 是传递的 L-模糊关系。事实上,对于任意 $x,y,z\in U$,若 $x=y$,则

$(t(R)\cup I)(x,y)\otimes(t(R)\cup I)(y,z)=1\otimes(t(R)\cup I)(y,z)=(t(R)\cup I)(x,z)$

若 $y=z$,则

$(t(R)\cup I)(x,y)\otimes(t(R)\cup I)(y,z)=(t(R)\cup I)(x,z)\otimes 1=(t(R)\cup I)(x,z)$

若 $x\neq y$ 且 $y\neq z$,则由 $t(R)$的传递性可得 $t(R)(x,y)\otimes t(R)(y,z)\leqslant t(R)(x,z)$,从而有

$$\begin{aligned}&(t(R)\cup I)(x,y)\otimes(t(R)\cup I)(y,z)\\&\quad=(t(R)(x,y)\vee I(x,y))\otimes(t(R)(y,z)\vee I(y,z))\\&\quad=t(R)(x,y)\otimes t(R)(y,z)\leqslant t(R)(x,z)\\&\quad\leqslant(t(R)\cup I)(x,z)\end{aligned}$$

(2)$R\cup I\subseteq t(R)\cup I$ 显然成立。若 $R\cup I\subseteq S$,S 传递,则由 $R\subseteq S$ 可得 $t(R)\subseteq S$。从而有 $t(R)\cup I\subseteq S$。

命题 6 设 R,S 为 U 上的 L-模糊关系,则对于任意 $A\in F_L(U)$,有$\underline{R\circ S}(A)=\underline{S}(\underline{R}(A))$,$\overline{R\circ S}(A)=\overline{S}(\overline{R}(A))$。

证明:对于任意 $x\in U$,有

$$\begin{aligned}\underline{S}(\underline{R}(A))(x)&=\bigwedge_{y\in U}(S(x,y)\to\underline{R}(A)(y))\\&=\bigwedge_{y\in U}(S(x,y)\to\bigwedge_{z\in U}(R(y,z)\to A(z)))\\&=\bigwedge_{y\in U}\bigwedge_{z\in U}(S(x,y)\to(R(y,z)\to A(z)))\\&=\bigwedge_{y\in U}\bigwedge_{z\in U}(S(x,y)\otimes R(y,z)\to A(z))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{R\circ S}(A)(x)&=\bigwedge_{y\in U}(R\circ S(x,y)\to A(y))\\&=\bigwedge_{y\in U}(\bigvee_{z\in U}(S(x,z)\otimes R(z,y))\to A(y))\\&=\bigwedge_{y\in U}\bigwedge_{z\in U}(S(x,z)\otimes R(z,y)\to A(y))\\&=\bigwedge_{y\in U}\bigwedge_{z\in U}(S(x,y)\otimes R(y,z)\to A(z))\end{aligned}$$

所以有$\underline{R\circ S}(A)=\underline{S}(\underline{R}(A))$,同理可证$\overline{R\circ S}(A)=\overline{S}(\overline{R}(A))$。

定理 3 设 L 是一个完备剩余格,(U,R)是 L-模糊近似空间,$t(R)$是 R 的传递闭包。对于任意 $A\in F_L(U)$,下列条件等价:

(1)$\underline{R\cup I}(A)=A$;

(2)$A\subseteq\underline{R}(A)$;

(3)$A\subseteq\underline{t(R)}(A)$;

(4)$\underline{t(R)\cup I}(A)=A$;

(5)$\underline{t(R\cup I)}(A)=A$。

证明:对于任意 $A\in F_L(U)$,$x\in U$,有

$$\begin{aligned}\underline{I}(A)(x)&=\bigwedge_{y\in U}(I(x,y)\to A(y))\\&=I(x,x)\to A(x)=A(x)\end{aligned}$$

故有 $\underline{I}(A)=A$。

(1)⇒(2):由定理 1 可得 $A=\underline{R\cup I}(A)=\underline{R}(A)\cap\underline{I}(A)=\underline{R}(A)\cap A$,故有 $A\subseteq\underline{R}(A)$。

(2)⇒(3):由 $A\subseteq\underline{R}(A)$及 $\underline{R}$ 的单调性可得 $\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(\underline{R}(A))=\underline{R^2}(A)$,从而 $A\subseteq\underline{R^2}(A)$。

假设 $A\subseteq\underline{R^n}(A)$,则 $A\subseteq\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(\underline{R^n}(A))=\underline{R^{n+1}}(A)$。

由归纳原理可得 $A\subseteq\underline{R^n}(A)$对于任意 n 成立,从而有 $\underline{t(R)}(A)=\underline{\bigcup\limits_{n\geqslant1}R^n}(A)=\bigcap\limits_{n\geqslant1}\underline{R^n}(A)\supseteq A$。

(3)⇒(4):假设 $A\subseteq\underline{t(R)}(A)$,则$\underline{t(R)\cup I}(A)=\underline{t(R)}(A)\cap\underline{I}(A)=\underline{t(R)}(A)\cap A=A$。

(4)⇒(1):假设$\underline{t(R)\cup I}(A)=A$,则 $A\subseteq\underline{t(R)}(A)$。由 $R\subseteq t(R)$可得$\underline{t(R)}\subseteq\underline{R}$,从而有 $A\subseteq\underline{R}(A)$,$\underline{R\cup I}(A)=\underline{R}(A)\cap A=A$。

(4)与(5)的等价性显然成立。

定理 4 设 L 是完备剩余格,(U,R)是 L-模糊近似空间,

R 是自反传递关系。

(1)$\underline{R}$ 是 τ_R 的内部算子；

(2)若 L 正则，则 $\overline{R}$ 是 τ_R 的闭包算子。

证明：(1)需要证明对于任意 $A\in F_L(U)$，有 $\underline{R}(A)=\bigcup\{B|B\in\tau_R,B\subseteq A\}$。设 $B\in\tau_R,B\subseteq A$，则有 $B\subseteq\underline{R}(B)$。再有 $\underline{R}(B)\subseteq\underline{R}(A)$ 可得 $B\subseteq\underline{R}(A)$，从而有 $\bigcup\{B|B\in\tau_R,B\subseteq A\}\subseteq\underline{R}(A)$。另一方面，因为 R 传递，故有 $\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(\underline{R}(A))$，即 $\underline{R}(A)\in\tau_R$；再由 R 的自反性可得 $\underline{R}(A)\subseteq A$，从而有 $\underline{R}(A)\in\{B|B\in\tau_R,B\subseteq A\}$，于是可得 $\underline{R}(A)\subseteq\bigcup\{B|B\in\tau_R,B\subseteq A\}$。故 $\underline{R}(A)=\bigcup\{B|B\in\tau_R,B\subseteq A\}$，即 $\underline{R}(A)$ 是 A 的内部算子。

(2)由于 L 正则，因此对于任意 $A\in F_L(U)$，有 $\overline{R}(A)=\neg\underline{R}(\neg A)=\neg\mathrm{int}(\neg A)=cl(A)$。即 $\overline{R}$ 是 τ_R 的闭包算子。

命题 7 设 L 是完备剩余格，R,S 为 U 上的 L-模糊关系，则 $\overline{R}=\overline{S}\Leftrightarrow R=S$；若 L 正则，则 $\underline{R}=\underline{S}\Leftrightarrow R=S$。

定理 5 设 L 是完备剩余格，R,S,R_i 为 U 上的 L-模糊关系，其中 $i\in\Lambda$，Λ 是指标集。则下列各式成立：

(1)$\tau_R=\tau_{R\cup I}=\tau_{t(R)}=\tau_{t(R\cup I)}=\tau_{t(R)\cup I}$；

(2)$\bigcap\limits_{i\in\Lambda}\tau_{R_i}=\tau_{(\bigcup\limits_{i\in\Lambda}R_i)}$；

(3)$R\subseteq S$，则 $\tau_S\subseteq\tau_R$；

(4)如果 $R\subseteq S\subseteq t(R\cup I)$，则 $\tau_S=\tau_R$；

(5)$\tau_R\cup\tau_S\subseteq\tau_{R\cap S}$。

证明：(1)因为$\underline{R\cup I}(A)=\underline{R}(A)\cap A$，故有 $A\subseteq\underline{R\cup I}(A)$ 当且仅当 $A=\underline{R\cup I}(A)$。由定理 3 可得结论成立。

(2)设 $A\in\bigcap\limits_{i\in\Lambda}\tau_{R_i}$，则对于任意 $i\in\Lambda$，有 $A\in\tau_{R_i}$，即 $A\subseteq\underline{R_i}(A)$。于是由定理 1 可得 $A\subseteq\bigcap\limits_{i\in\Lambda}\underline{R_i}(A)=\underline{\bigcup\limits_{i\in\Lambda}R_i}(A)$，即 $A\in\tau_{(\bigcup\limits_{i\in\Lambda}R_i)}$。反之，假设 $A\in\tau_{(\bigcup\limits_{i\in\Lambda}R_i)}$，则 $A\subseteq\underline{\bigcup\limits_{i\in\Lambda}R_i}(A)$。从而对于任意 $i\in\Lambda$，有 $A\subseteq\underline{\bigcup\limits_{i\in\Lambda}R_i}(A)\subseteq\underline{R_i}(A)$，即 $A\in\tau_{R_i}$。于是可得$A\in\bigcap\limits_{i\in\Lambda}\tau_{R_i}$。

(3)由(2)直接可得。

(4)假设 $R\subseteq S\subseteq t(R\cup I)$，则由(3)可得 $\tau_{t(R\cup I)}\subseteq\tau_S\subseteq\tau_R$。于是由 $\tau_{t(R\cup I)}=\tau_R$ 可得 $\tau_S=\tau_R$。

(5) 由(3)可得 $\tau_R\subseteq\tau_{R\cap S}$，$\tau_S\subseteq\tau_{R\cap S}$，从而有 $\tau_R\cup\tau_S\subseteq\tau_{R\cap S}$。

定理 6 设 L 是完备正则剩余格，R 为 U 上的 L-模糊关系，则$\underline{t(R\cup I)}$和$\overline{t(R\cup I)}$分别是 τ_R 的内部和闭包算子。

证明：由于 $t(R\cup I)$是自反传递模糊关系，由定理 4 可知$\underline{t(R\cup I)}$和$\overline{t(R\cup I)}$分别是 $\tau_{t(R\cup I)}$ 的内部和闭包算子，再由定理 5 可知结论成立。

定理 7 设 L 是完备正则剩余格，R,S 为 U 上的自反传递 L-模糊关系，则 $\tau_R=\tau_S\Leftrightarrow R=S$。

证明：充分性显然成立。

必要性：假设 $\tau_R=\tau_S$。由于 $\underline{R},\underline{S}$ 分别为 τ_R 与 τ_S 的内部算子，故有 $\underline{R}=\underline{S}$。再由命题 7 可得 $S=R$。

推论 2 设 L 是完备正则剩余格，R,S 为 U 上的 L-模糊关系，则 $\tau_R=\tau_S$ 当且仅当 $t(R\cup I)=t(S\cup I)$。

令 J 为 $F_L(U\times U)$上的一个二元关系，且$(R,S)\in J$ 当且仅当 $\tau_R=\tau_S$。显然 J 是 $F_L(U\times U)$上的等价关系，R 关于 J 的等价类记为$[R]_J$，即：

$$[R]_J=\{S|S\in F_L(U\times U),(R,S)\in J\}$$

推论 3 设 L 是完备正则剩余格。

(1)$t(R)\cup I$ 是$[R]_J$ 中最大元。

(2)对于任意 $S\in[R]_J$，有 $\tau_{t(R)\cup I}=\tau_R=\tau_S=\tau_{t(S)\cup I}$。

结束语 本文讨论了基于完备剩余格的 L-模糊粗糙集模型的拓扑结构；给出了由模糊蕴涵确定的下近似算子诱导的 L-模糊拓扑并讨论了它的基本性质，刻画了相应的 L-模糊拓扑的内部算子及闭包算子；借助相应的拓扑提出了一种 L-模糊关系分类方法。在后续研究中，我们将进一步讨论相应的 L-拓扑的基底及其紧性、可数性、可分性等拓扑性质。

参考文献

[1] PAWLAK Z. Rough Sets [J]. Journal of Computer and Information Science，1982，11(5)：341-356.

[2] PAWLAK Z. Rough Sets Theoretical Aspects of Reasoning About Data [M]. Kluwer Academic Publishers，Dordrecht & Boston，1991.

[3] ZHANG W X. Rough Set Theory and Method [M]. Beijing：Science Press，2001.

[4] WANG C Y，QI Y，SHAO M，et al. A fitting model for feature selection with fuzzy rough sets [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems，2017，25(4)：741-753.

[5] ZHAN J，MASOOD MALIK H，AKRAM M. Novel decision-making algorithms based on intuitionistic fuzzy rough environment [J]. International Journal of Machine Learning & Cybernetics，2018，8(6)：1459-1485.

[6] DUBOIS D，PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal of General Systems，1990，17(2/3)：191-209.

[7] MORSI N N，YAKOUT M M. Axiomatics for fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems，1998，100(1)：327-342.

[8] RADZIKOWSKA A M，KERRE E E. A comparative study of fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems，2002，126(2)：137-155.

[9] YANG B，HU B Q. A fuzzy covering-based rough set model and its generalization over fuzzy lattice [J]. Information Sciences，2016，367-368：463-486.

[10] YANG B，HU B Q. On some types of fuzzy covering-based rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems，2017，312：36-65.

[11] ZHAN J M，ZHANG X H，YAO Y Y. Covering based multi-granulation fuzzy rough sets and corresponding applications [J]. Artificial Intelligence Review，2020，53(2)：1093-1126.

[12] ZHANG X H，WANG J Q. Fuzzy β-covering approximation spaces [J]. International Journal of Approximate Reasoning，2020，126：27-47.

[13] WANG C，WANG Y，SHAO M，et al. Fuzzy rough attribute reduction for categorical data [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2020，28(5)：818-830.

[14] LIU G L，ZHENG H，ZOU J Y. Relations arising from coverings and their topological structures [J]. International Journal Approximate Reasoning，2017，80：348-358.

[15] ZIARKO W. Variable precision rough set model [J]. Journal of Computer and System Sciences，1993，46：39-59.

[16] MIESZKOWICZ-ROLKA A，ROLKA L. Variable precision fuzzy rough sets [J]. Lecture Notes in Computer Sciences，2004，3100：144-160.

(下转第 183 页)

[11] MADRY A,MAKELOV A,SCHMIDT L,et al. Towards deep learning models resistant to adversarial attacks[J]. arXiv:1706.06083,2017.

[12] CARLINI N,WAGNER D. Towards evaluating the robustness of neural networks[C]//2017 IEEE Symposium on Security and Privacy(sp). IEEE,2017:39-57.

[13] NIELSEN M A. Neural networks and deep learning(Vol. 25)[M]. San Francisco,CA:Determination Press,2015.

[14] POLYAK B T. Some methods of speeding up the convergence of iteration methods[J]. Ussr Computational Mathematics and Mathematical Physics,1964,4(5):1-17.

[15] RUDER S. An overview of gradient descent optimization algorithms[J]. arXiv:1609.04747,2016.

[16] DONG Y,LIAO F,PANG T,et al. Boosting adversarial attacks with momentum[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018:9185-9193.

[17] CROCE F,HEIN M. Reliable evaluation of adversarial robustness with an ensemble of diverse parameter-free attacks[C]//International Conference on Machine Learning. PMLR,2020:2206-2216.

[18] CROCE F,ANDRIUSHCHENKO M,SEHWAG V,et al. RobustBench:a standardized adversa- rial robustness benchmark[J]. arXiv:2010.09670,2020.

[19] CROCE F,ANDRIUSHCHENKO M,SEHWAG V,et al. RobustBench/robustbench:RobustBench:a standardized adversarial robustness benchmark[EB/OL]. https://github.com/RobustBench/robustbench.

WU Zi-bin, born in 1998. His main research interests include machine learning and so on.

YAN Qiao, born in 1972, Ph.D, professor, Ph.D supervisor, is a member of China Computer Federation. Her main research interests include network security, software-defined networking and machine learning.

(上接第 143 页)

[17] ZHAO S,TSANG E C C,CHEN D. The model of fuzzy variable precision rough sets[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems,2009,17(2):451-467.

[18] RADZIKOWSKA A M,KERRE E E. Fuzzy rough sets based on residuated lattices[J]. Lecture Notes in Computer Sciences,2004,3135:278-296.

[19] WANG C Y,ZHANG X G,WU Y H. New results on single axioms for *L*-fuzzy rough approximation operators[J]. Fuzzy Sets and Systems,2020,380:131-149.

[20] SHE Y H,WANG G J. An axiomatic approach of fuzzy rough sets based on residuated lattices[J]. Computers and Mathematics with Applications,2009,58(1):189-201.

[21] YU H,ZHAN W. On the topological properties of generalized rough sets[J]. Information Sciences,2014,263:141-152.

[22] WU H S,LIU G L. The relationships between topologies and generalized rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2020,119:313-324.

[23] YANG L Y,XU L S. Topological properties of generalized approximation spaces[J]. Information Sciences,2011,181:3570-3580.

[24] QIN K Y,YANG J L,PEI Z. Generalized rough sets based on transitive and reflexive relations[J]. Information Sciences,2008,178:4138-4141.

[25] WANG C Y. Topological characterizations of generalized fuzzy rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,2017,312:109-125.

[26] QIN K Y,ZHENG P. On the topological properties of fuzzy rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,2004,151(3):601-613.

[27] WANG C Y. Topological structures of *L*-fuzzy rough sets and similarity sets of *L*-fuzzy relations[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2017,83:160-175.

[28] MA Z M,HU B Q. Topological and lattices structures of *L* - fuzzy rough sets determined by lower and upper sets[J]. Information Sciences,2013,218:194-204.

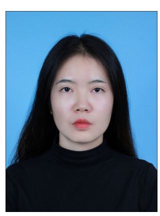
[29] HAO J,LI Q G. The relationship between *L*-fuzzy rough set and *L*-topology[J]. Fuzzy Sets Systems,2011,178(1):74-83.

[30] BĚLOHLÁVEK R. Some properties of residuated lattices[J]. Czechoslovak Mathematical Journal,2003,53(1):161-171.

[31] PEI D W. The characterization of residuated lattices and regular residuated lattices[J]. Acta-Mathematica Sinica,2002,45:271-278.

[32] GOGUEN J A. *L*-fuzzy sets[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1967,18:145-174.

[33] WANG Z D,WANG Y,TANG K M. Some properties of *L*-fuzzy approximation spaces based on bounded integral residuated lattices[J]. Information Sciences,2014,278:110-126.



XU Si-yu, born in 1996, postgraduate. Her main research interests include rough set theory and formal concept analysis.

QIN Ke-yun, born in 1962, Ph.D, professor, Ph.D supervisor. His main research interests include rough set theory, formal concept analysis and fuzzy logic.