



计算机科学

COMPUTER SCIENCE

图着色问题禁忌搜索改进算法

汪建昌, 王硕, 李壮, 江华

引用本文

汪建昌, 王硕, 李壮, 江华. 图着色问题禁忌搜索改进算法[J]. 计算机科学, 2022, 49(11A): 211000128-5.

WANG Jian-chang, WANG Shuo, LI Zhuang, JIANG Hua. [Improved Algorithm for Tabu Search of Graph Coloring Problems](#) [J]. Computer Science, 2022, 49(11A): 211000128-5.

相似文献推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[基于U-net++ 网络的弱光图像增强方法](#)

Low-light Image Enhancement Method Based on U-net++ Network

计算机科学, 2021, 48(11A): 278-282. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210300111>

[面向机器学习系统的需求建模与决策选择](#)

Requirements Modeling and Decision-making for Machine Learning Systems

计算机科学, 2020, 47(12): 42-49. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.201200021>

[面向通用航空器运行排班及维修的策略优化](#)

Optimization of Scheduling and Maintenance Strategy for Navigation Aircraft Operation

计算机科学, 2020, 47(11A): 632-637. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.200600053>

[基于区块链技术的通证模型的设计与分析](#)

Design and Analysis of Token Model Based on Blockchain Technology

计算机科学, 2020, 47(6A): 603-608. <https://doi.org/10.11896/JsJcx.190800155>

[高分辨率SAR图像道路提取综述](#)

Review of Road Extraction for High-resolution SAR Images

计算机科学, 2020, 47(1): 124-135. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.190100033>

图着色问题禁忌搜索改进算法

汪建昌 王硕 李壮 江华

云南大学软件学院 昆明 650504

(1638131194@qq.com)

摘要 图着色问题是一个 NP-hard 问题,在现实中有广泛的应用,比如寄存器分配、机场调度等。禁忌搜索算法是一种经典的启发式搜索算法,在图着色问题的算法设计中广泛使用。禁忌搜索算法作为一个底层算子,也常被用于诸如混合进化算法(Hybrid Evolutionary Algorithm, HEA)的图染色算法设计中,对算法的性能起到了关键作用。因此,对禁忌搜索算法的改进对于促进图染色算法的研究具有现实意义。针对图着色问题,提出一种改进版禁忌搜索算法 Tabucol+以增强搜索的集中性。算法在传统禁忌搜索策略的基础上,引入新的评分策略。实验结果显示,新的算法能够显著减少迭代次数和搜索时间,在个别算例上甚至取得了颜色数改进的效果。

关键词: 禁忌搜索算法;图着色问题;同分顶点

中图法分类号 TP301

Improved Algorithm for Tabu Search of Graph Coloring Problems

WANG Jian-chang, WANG Shuo, LI Zhuang and JIANG Hua

School of Software, Yunnan University, Kunming 650504, China

Abstract The graph coloring problem is an NP-hard problem, which has a wide range of applications in reality, such as register allocation, airport scheduling and so on. Tabu search algorithm is a classic heuristic search algorithm, which is widely used in the algorithm design of graph coloring problems. As a low-level operator, the tabu search algorithm is also commonly used in the design of graph coloring algorithms such as hybrid evolutionary algorithm(HEA), which plays a key role in the performance of the algorithm. Therefore, the improvement of the tabu search algorithm has practical significance for promoting the research of graph coloring algorithm. Aiming at the problem of graph coloring, this paper proposes an improved version of Tabucol+ to enhance the concentration of search. Based on the traditional tabu search strategy, the proposed algorithm introduces a new scoring strategy. Experimental results show that the new algorithm can significantly reduce the number of iterations and search time. In some cases, even the improvement of the number of colors has been achieved.

Keywords Tabu search algorithm, Graph coloring problem, Vertices with the same score

1 引言

给定一个无向图 $G=(V, E)$, 其中 V 是顶点集合, E 是边集合。给定图 G 和整数 k , 图着色问题(Graph Coloring Problems, GCP)指的是用 k 种颜色对图 G 的顶点进行染色, 使图 G 中任意一条边上的两个顶点颜色不同。图染色的优化版本就是找到最小的颜色数 k 。GCP 问题是一个离散问题, 解决方法一般可以分为两大类: 精确算法和近似算法^[1]。图着色问题在时间表、寄存器分配、航线管理、卫星调度等领域有广泛的应用^[2]。1985年, Glover 教授首先提出禁忌搜索算法的理论, 用以解决局部搜索算法往往陷入局部最优的问题^[3]。1987年 Hertz 和 Werr 把 Tabu Search 运用到图着色问题上, 证明了它可以为图着色提供良好的启发式, 相比于模拟退火等传统优化算法使用了更短的 CPU 时间和更少的颜色数^[4]。1999年, Galinier 等提出用混合进化算法来解决图着色问题, 实验结果表明了 HEA 能够找到大多数测试图已知的最佳结果, 是有效的着色算法之一^[5]。在混合进化算法中, 作者选取了 Tabu Search 作为它的局部搜索(Local Search,

LS)算子, 主要用于产生与初始解足够远的解来更好地保证种群的多样性。2010年 Galinier 等提出的 Macol 中的 4 个过程里面也包含了禁忌搜索过程, 这种混合启发式在大量的 DIMACS 挑战基准图上获得了高度竞争的结果^[6]。2018年 Moalic 等给出了 Macol 算法的变体 H2col, 同样将 Tabu Search 作为它的强化算子。算法在 DIMACS 中有 4 个图达到当前最好的效果(只有量子退火和多 CPU 环境下才能达到)^[7]。

禁忌搜索算法本身就是一种卓有成效的染色算法, 是非混合算法中最出色的染色算法之一, 经常作为混合算法中的一个底层算子, 它本身效果的好坏对整个混合进化算法有很大的影响^[8]。然而自 2008 年以来, 研究人员对针对图染色的纯禁忌搜索算法的研究很少, 导致这个现象的原因有两个: 对禁忌搜索的改进是极其困难的; 研究混合进化算法明显更容易取得更好的效果。然而由于其被广泛应用的事实, 对禁忌搜索算法本身改进的重要性不言而喻。本文针对传统禁忌搜索算法评分策略单一、缺乏问题相关启发式的问题, 引入了一种新的评分策略: 在最高分染色动作有多个的情况下, 在分数

相同的可染颜色中选择已经染顶点最多的颜色进行染色。实验在选取的 126 个经典的 DIMACS 基准图进行,结果显示绝大多数图都能达到当前最有竞争力的 Tabucol 所能达到的染色效果,在其中 10 个图上的效果优于当前最先进的禁忌搜索算法,比如图 DSJR500.5.col 的着色数从之前的 128 种颜色突破到 127 种颜色就能完成染色。

本文第 2 节描述经典的禁忌搜索算法;第 3 节描述一种新的评分策略和改进的算法实现;第 4 节对实验结果进行分析;最后总结全文。

2 图着色问题禁忌搜索算法

2.1 Tabu Search 算法

禁忌搜索算法是一种应用广泛且效果良好的启发式算法。它是在局部搜索算法的基础上引入禁忌表,通过接受劣解来防止陷入局部最优,以达到更好的搜索全局最优解的目的。其中的禁忌表也可以理解为是一种记忆结构,用来防止在搜索过程中很快访问最近访问的节点^[9]。禁忌搜索中的探索源于这样一种假设,即一个糟糕的搜索选择往往比一个好的随机选择产生更多的信息^[10]。禁忌搜索算法在每一步搜寻最优解的过程中会给每个对象设置禁忌,规定在禁忌周期内不能重复操作被禁忌的对象。算法维护一个候选集合来存放一趟搜索的最优解(分数最高的染色动作)并设定特赦规则,当满足特赦规则时,跳出禁忌,执行被禁忌的动作,否则就随机执行候选集合里的某个动作。此外,还需要设定一个停止准则,在满足停止准则时停止搜索,因为禁忌周期不能完全避免陷入循环搜索的情况^[11]。

2.1.1 禁忌周期

维护一个 $m \times n$ 的二维数组 *TabuList* 存储禁忌值, m 的值取顶点数, n 的值取颜色数,任意 *TabuList*[i][j] 表示顶点 i 染颜色 j 的禁忌步数。本文把禁忌值初始化为当前步数、当前冲突值及一个 $0 \sim 7$ 的随机值之和。随着不断迭代至当前迭代步数 *iterNum* 等于 *TabuList*[i][j] 时,顶点 i 染 j 颜色这个动作合法跳出禁忌,直到下一次执行此禁忌动作后再为它加入禁忌,循环执行,不断更新禁忌表。

2.1.2 停止准则

设最大迭代次数为 *maxIter*,如果当前的迭代次数 *iterNum* 等于 *maxIter*,就停止搜索。

2.1.3 分数表

维护一个 $m \times n$ 的二维数组 *ScoreList*, m 的值取顶点数, n 的值取颜色数,任意 *ScoreList*[i][j] 表示顶点 i 染 j 颜色减少的冲突边个数,减少冲突边越多则评分越高。

2.1.4 特赦规则

如果染色动作被禁忌且能够减少图 G 的冲突边数量,就突破禁忌执行这个染色动作。

2.2 Tabucol

给定一个无向图 $G(V, E)$,用 *Dsatur* 算法为每一个顶点进行初始化染色。然后遍历每一个顶点,在所有染色动作中找出可以减少冲突边最多的动作执行染色。定位每一轮要执行的染色动作有两种可能的情况:1)存在满足禁忌搜索特赦规则的染色动作被禁忌,那么突破禁忌执行这个染色动作;2)最高分染色动作未被禁忌,那么随机选择一个最高分染色动作执行染色。给定 k 种颜色对图 G 染色,如果图 G 任意

一条边两端顶点的颜色不同, k 就是一个合法解。我们的目的是找到最小的颜色数 k 值。TS 是一种著名优化算法,在解决 GCP 问题上产生良好的效果^[12]。

算法 1 是目前解决图着色问题效果最好的禁忌搜索算法 Tabucol 的实现步骤^[13]。算法的搜索策略为:首先在每一轮搜索过程中记录分数最高的染色动作,如果发现了被禁忌且能够减少历史冲突边的染色动作,就突破禁忌执行这次染色动作,否则随机执行分数最高的染色动作。如果分数最高的染色动作存在多个,随机选择一个染色动作执行染色。算法 1 的搜索策略只是将染色动作的分数高低作为选择标准,没有充分考虑到其他影响因素,存在标准单一的缺点。

算法 1 图染色禁忌搜索算法 Tabucol

```

Input:  $G=(V, E), k, \maxIter$ 
Output:  $c, \text{if } f(c)=0 \ \&\& \ f(c-1) \neq 0;$ 
1. begin
2.  $k \leftarrow$  initialized color number
3.  $T \leftarrow$  initialized current step +  $f(c)$  + an random number
4.  $S \leftarrow$  initialized number of vertex neighbors to dye vertex colors minus number of colors to be dyed in vertex neighbors
5.  $i \leftarrow 0$ 
6. while  $f(c) > 0$  and  $i < \maxIter$  do
7.   updateTabuList( $T, i$ ) // update value of TabuList
8.   updateScoreList( $T, i, k$ ) // update value of ScoreList
9.   if  $\text{TabuList}[i][j] > \text{iterNum}$  and  $\exists \text{ScoreList}[i][j] > 0$  Then
       jump out of the tabu and dye vertex with the color
10.  else if  $\text{TabuList}[i][j] \leq \text{iterNum}$ 
11.   if  $\exists \text{ScoreList}[i][j] > \text{best\_score}$  Then dye vertex with this
       color and update best_score
12.   else if  $\exists \text{ScoreList}[i][j] = \text{best\_score}$  Then select a color
       with the highest score to dye randomly
13.  $i \leftarrow i + 1$ 

```

2.3 Tabucol 图解

图 1 是模拟 Tabucol 染色 DIMACS 基准图的示例图,其是一个由 9 个顶点、17 条边构成的无向图。给定 4 种颜色对图 1 染色,顶点 A, C, H, I 染成红色,顶点 E, F, G, B 染成蓝色,顶点 D 染成绿色,顶点 J 染成黄色。设图 1 是图着色过程中随机选取的一种着色状态,遍历所有的染色动作存在 3 个分数最高的染色动作,它们分别是将顶点 F 染色为红色、黄色或者绿色,分数均为 2。假设以上 3 个染色动作都未被禁忌,传统 Tabucol 会随机选择一个染色动作执行,每个动作被选中的概率为 $1/3$,推广到存在 n 个最高分染色动作,每个染色动作被选中的概率为 $1/n$ 。图 2 是模拟随机选中顶点 F 染成黄色的示例图。

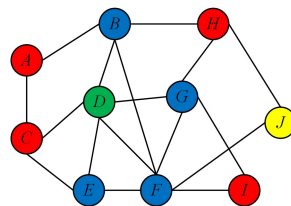


图 1 原图(电子版为彩图)

Fig. 1 Original drawing

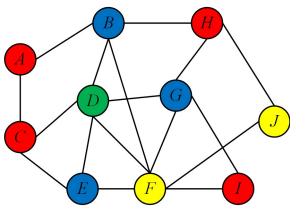


图2 传统评分策略图例(电子版为彩图)

Fig. 2 Legend of traditional scoring strategy

3 改进算法 Tabucol+

3.1 新的评分策略

针对传统禁忌搜索算法以单一分数作为搜索动作评分的不足,本文引入了新的评分策略来指导算法进行染色。相比于 Tabucol,本策略在找到多个分数最高的染色动作后,选择已染顶点最多的那个颜色进行染色,如果存在多个颜色已染顶点数相同,再随机选择一个染色动作执行染色。具体实现是:在算法程序中维护一个 $best_size$ 一维数组,数组长度取值为颜色数 n ,用来存储每种颜色已染顶点的数量。当存在多个最高分染色动作时,再比较这些颜色在 $best_size$ 数组中的取值,选出最大值对应的染色动作执行着色。

3.2 Tabucol 引入新策略

算法 2 在算法 1 的基础上引入改进策略。给定一个图 $G(V, E)$ 和整数 k , 设置最大迭代次数 $maxIter$ 为 5×10^7 。结果输出整数 c , 代表成功着色的最小颜色数。首先用 Dsaturn 算法对图 G 初始化着色, Dsaturn 算法是一种图着色贪婪算法,效果优于随机着色。然后为每一个染色动作维护一个禁忌周期 T , 本算法取 T 值为当前迭代步数 $IterNum$ 、当前冲突值 $f(c)$ 及一个随机禁忌值 $randomNum$ 之和, 随机禁忌值取 $1 \sim 7$ 内的随机值。另外维护一个分数表 $ScoreList$, 存储值为每个顶点当前冲突边数量减去染成其他颜色的冲突边数量。如果冲突边 $f(c) \neq 0$ 或者当前迭代次数 $currentIter$ 没有达到最大次数 $maxIter$, 就不断搜索着色。相比传统禁忌搜索算法只是单一地选取分数最高的染色动作执行染色, 算法 2 在每一轮对所有染色动作搜索过程中, 如果定位到被禁忌但是能减少历史冲突边的染色动作, 就突破禁忌执行这次动作, 否则就选择评分最高且已染顶点最多的那种颜色所在的染色动作执行。如果符合条件的染色动作不是唯一的, 就随机选取一个染色动作执行染色。算法 2 丰富了搜索策略, 能够选择出更优的染色动作执行染色。

算法 2 图染色禁忌搜索算法 Tabucol 引入新策略

Input: $G=(V, E), k, maxIter$

Output: $c, if f(c)=0 \&\& f(c-1) \neq 0;$

1. begin
2. $k \leftarrow$ initialized color number
3. $T \leftarrow$ initialized current step + $f(c)$ + an random number
4. $S \leftarrow$ initialized number of vertex neighbors to dye vertex colors minus number of colors to be dyed in vertex neighbors
5. $i \leftarrow 0$
6. while $f(c) > 0$ and $i < maxIter$ do
7. updateTabuList(T, i) // update value of TabuList
8. updateScoreList(T, i, k) // update value of ScoreList
9. if $TabuList[i][j] > iterNum$ and $ScoreList[i][j] > 0$ Then jump out of the tabu and dye vertex with the color
10. else if $TabuList[i][j] \leq iterNum$

11. if $\exists ScoreList[i][j] > best_score$ Then dye vertex with this color
12. else if $\exists ScoreList[i][j] = best_score$ Then select the color with the most vertices to dye($best_size$)
13. else if $\exists ScoreList[i][j] = best_score$ and exists some $best_size$ Then select an color randomly
14. $i \leftarrow i + 1$

3.3 Tabucol+

Tabucol+是算法 1 和算法 2 的组合算法,我们取算法 1 的比例为 90%, 算法 2 的比例为 10%。Tabucol 是在分数最大的几个染色动作中随机选一个执行。Tabucol+中 10%的染色动作是在分数最高且已染顶点最多的颜色所在的染色动作中随机选择一个动作执行, 剩下 90%的染色动作根据传统 Tabucol 搜索策略得到。在搜索染色动作方面既保证疏散性又增加了集中性, 目的是留下更多使用次数少的颜色以期减少染色数。算法 3 给出了 Tabucol+的伪代码。

算法 3 图染色禁忌搜索算法 Tabucol+

1. while $f(c) > 0$ and $i < maxIter$ do
2. generate random numbers $1 \sim 100$
3. If random number ≥ 10 Then execution 算法 1
4. else execution 算法 2

3.4 Tabucol+ 图解

Tabucol+每一轮选取染色动作过程中维护一个数组来统计当前状态下每种颜色已染顶点的数量, 存在 10%的可能性选择分数最高的且已染顶点数量最多的颜色所在的染色动作执行。图 1 中存在 3 个减少冲突顶点最多的染色动作, 分别是将顶点 F 染成红色、黄色和绿色, 其中黄色和绿色已染顶点数各 1 个, 红色已染顶点数 4 个。假设此染色动作随机按照算法 2 执行染色, 则 Tabucol+把顶点 F 染成红色, 如图 3 所示, 剩下 90%可能性的选择染色动作作参考 Tabucol 图解。

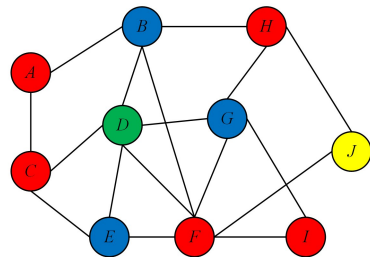


图3 新的评分策略图例(电子版为彩图)

Fig. 3 Legend of new scoring strategy

4 实验与分析

4.1 实验介绍

实验环境为: Linux 系统, GNU C++ 编译器, Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2680 v4 @ 2.40GHz, 算法程序使用 C++ 编写实现。实验设置参照组和实验组: 1) 参照组使用传统的 Tabucol; 2) 实验组使用改进版的 Tabucol+。这两组实验分别对 126 个经典的 DIMACS 基准图染色。用给定颜色数 k 将每个图染色 20 遍, 最后把包含颜色数、成功率、平均迭代时间和平均迭代次数的实验结果整理成表。

4.2 实验结果

表 1 列出了 α 取 10% 时 Tabucol 和 Tabucol+ 的实验比较。Tabucol+ 与 Tabucol 效果相比, 存在一个图的颜色数取得了很大的突破, 从最小的 128 种颜色变成了最小的 127 种

颜色即可完成着色;存在 9 个图在成功率、时间以及迭代次数 3 个衡量指标上面,至少有一个指标有较大程度的提升。除此之外,还存在 3 个图在成功率和迭代次数这两个衡量指标上变得更差,它们分别是图 flat300_28_0.col 的迭代

次数从 4.34×10^6 增加到 7.74×10^6 ,图 DSJC500.9.col 的成功率从 20% 下降到 10%,图 DSJC1000.5.col 的成功率从 45% 下降到 25%,其他图的实验结果对比差距很小,几乎保持不变。

表 1 实验结果

Table 1 Experimental results

算例名称 G_name	Tabucol				Tabucol+			
	# color	# suc	# time/s	# iteration	# color	# suc	# time/s	# iteration
abb313GPIA.col	9	3/20	37	3.44×10^6	9	8/20	150.64	1.57×10^7
anna.col	11	19/20	2.75	2.70×10^5	11	20/20	0	8.29×10^2
4-FullIns_4.col	8	18/20	21.44	1.71×10^4	8	19/20	0.01	4.15×10^4
5-FullIns_4.col	9	11/20	11.16	1.88×10^6	9	12/20	0.54	9.17×10^4
5-FullIns_3.col	8	19/20	0.06	4.25×10^4	8	19/20	0.00	2.35×10^3
r1000.5.col	249	2/20	2638	3.50×10^7	249	3/20	1154	2.78×10^7
r1000.1c.col	98	6/20	1011	2.38×10^7	98	5/20	450	1.09×10^7
DSJR500.5.col	128	1/20	94	5.81×10^6	127	1/20	216	1.34×10^7
DSJC250.9.col	72	20/20	4.87	2.76×10^5	72	20/20	3.10	2.25×10^5
DSJR500.1.col	12	18/20	0.01	1.56×10^4	12	18/20	0.01	5.07×10^3
wap08a.col	42	1/20	191	1.08×10^7	42	4/20	537	3.24×10^7
flat1000_60_0.col	60	20/20	620.27	1.58×10^6	60	20/20	659.07	1.62×10^6
flat300_28_0.col	31	20/20	55.74	4.34×10^6	31	20/20	77.39	7.74×10^6

4.2.1 Tabucol 结果部分介绍

表 1 左半部分列出了传统 Tabucol 对部分图实验得到的结果。其中,# color 表示算法得到的最小颜色数;# suc 表示成功率,是一个反映算法健壮性的指标;# time 表示执行成功的算例花费的平均时间,以 s 为单位;# iteration 是执行成功算例的平均迭代次数,时间或者迭代次数越少算法效率越高。颜色数标粗的图 anna.col,4-FullIns_4.col,5-FullIns_4.col,5-FullIns_3.col 和 r1000.1c.col 已经达到启发式算法的最优解^[14]。此版本的 Tabucol 是目前效果最好的算法。

4.2.2 Tabucol+ 结果部分介绍

表 1 右半部分列出了使用 Tabucol+ 对部分图实验得到的结果。得到的结果在颜色数、时间和迭代次数上相比传统 Tabucol 均有不同程度的改进。相比传统 Tabucol,图 abb313GPIA.col 在成功率上提高了 25%,图 wap08a.col 在成功率上提高了 15%,有了较大幅度的提升;图 anna.col,4-FullIns_4.col,5-FullIns_4.col,5-FullIns_3.col,r1000.5.col,DSJC250.9.col 和 r1000.1c.col 在成功率近乎持平的情况下,成功算例的平均迭代时间显著缩短,证明了 Tabucol+ 的收敛性更强。特别是图 DSJR500.5.col 从原来至少 128 种颜色才能完成着色突破到 127 种颜色就能完成染色,实现了颜色数的改进。

4.3 分析与讨论

4.3.1 对参数 α 的分析

α 值标志着新引进的策略在禁忌搜索算法里面产生的影响力大小,Tabucol+ 中的 α 值是通过实验验证得来的。为了

兼顾随机性和集中性,将传统 Tabucol 的比例 α 分别取值 5%,10%,15%,20%,一一对应算法 2 的比例 $1-\alpha$ 分别取值 95%,90%,85% 和 80% 组合成为 4 组新的算法。本文在 126 个常用的 DIMACS 基准图上分别用以上 4 种算法做实验。实验结果显示以上 4 组算法对大部分图的染色效果都能达到传统 Tabucol 所能达到的效果,存在部分图时间和迭代次数下降以及少部分图时间和迭代次数增大的情况。然而只有当传统 Tabucol 的比例 α 取值 10%、算法 2 的比例 $1-\alpha$ 取值 90% 组合的算法改进的图数量最多甚至存在颜色的改进,所以本文最终确定传统 Tabucol 的比例 α 取值为 10%,算法 2 的比例 $1-\alpha$ 取值为 90% 的组合算法为 Tabucol+。根据实验结果分析, α 的递增对结果的影响是非规律性的,这种无序性也是启发式算法区别于精确算法的一个显著特点。

4.3.2 对图的分析

给定一个图 G ,设它由 m 条边和 n 个顶点组成。以 $m = n \log n$ 为标准划分稀疏图与稠密图,当图 G 满足 $m > n \log n$ 时为稠密图,否则为稀疏图。实验结果表明当顶点越多且为稠密图时,新引进的策略对结果影响越大,分析因为此种图中存在足够多的最佳染色动作可供选择。本文定义颜色数少且稀疏的图为简单图,颜色数多且稠密的图为复杂图。下面依据实验结果分别对这两种图进行分析。

(1) 简单图

表 2 截取的是 Tabucol 及 Tabucol+ 在一部分简单图的实验结果。

表 2 简单图算例结果的对比

Table 2 Comparison of calculation results of simple diagrams

算例名称 G_name	Tabucol				Tabucol+			
	# color	# suc/%	# time/s	# iteration	# color	# suc/%	# time/s	# iteration
huck.col	11	100	0	1.9×10^1	11	100	0	1.8×10^1
jean.col	10	100	0	2.3×10^1	10	100	0	2.1×10^1
le450_25a.col	25	100	0.01	4.77×10^2	25	100	0.01	4.21×10^2
le450_5c.col	5	100	0.18	2.98×10^4	5	100	0.28	4.69×10^4
mug88_25.col	4	100	0	2.5×10^1	4	100	0	2.5×10^1
myciel3.col	4	100	0	3×10^0	4	100	0	2×10^0
myciel5.col	6	100	0	1.9×10^1	6	100	0	1.9×10^1
queen5_5.col	5	100	0	2.6×10^1	5	100	0	2.3×10^1

分析结果得出 Tabucol+与 Tabucol 的染色效果基本一致。其原因为:如果在搜索过程中执行了新引入的策略,仍需要满足以下 3 个条件才能带来改变:1)每一轮搜索中存在一些最高分染色动作;2)这些染色动作作用到的颜色已染顶点数量存在较大差距;3)对图 G 的成功着色需要有足够多的迭代次数。然而这些条件在简单图中是很难满足的,大部分图迭代很少次就能成功染色并且收敛得很快,因此新引入的策略对它们带来的影响很有限。传统 Tabucol 对简单图着色找到的最小颜色数绝大部分与这些图的历史最优解相同,因此想找到更小的颜色数是极其困难甚至不可能的。

表 3 复杂图算例结果的对比

Table 3 Comparison of calculation results of complex graphs

算例名称 G_name	Tabucol				Tabucol+			
	# color	# suc/%	# time/s	# iteration	# color	# suc/%	# time/s	# iteration
DSJC500.9.col	126	20	815	2.76×10^7	126	10	1193.45	3.92×10^7
r250.1c.col	67	5	0.02	3.25×10^2	66	10	0.62	3.84×10^4
r250.5.col	67	15	85	9.32×10^6	67	20	118.63	1.59×10^7
r1000.1c.col	98	30	1011	2.38×10^7	98	25	450.47	1.08×10^7
r1000.5.col	250	30	2094	2.94×10^7	250	10	1342.91	3.43×10^7
r1000.5.col	249	10	2638	3.50×10^7	249	15	1154.25	2.78×10^7

结束语 文中提出了一种解决图着色问题的新的评分策略,这种评分策略引入到经典禁忌搜索得到改进的算法 Tabucol+。Tabucol+在颜色的选择上倾向于选择使用次数最多的颜色来进行染色,以便于为后续的染色动作留出更多的选择空间。相比传统的 Tabucol,Tabucol+在 DSJR500.5.col 和 4-FullIns_4.col 等 10 个图上取得了更好的效果。禁忌搜索算法是一种很强的通用性算法,在实际问题中有广泛的应用,比如用于解决寄存器、航班调度等问题。禁忌搜索算法的改进能进一步推动这一系列问题的优化。另外,禁忌搜索算法还作为目前解决大图效果最好的混合进化算法的底层算子之一^[15],改进禁忌搜索算法同样为混合进化算法的研究提供了更强的底层算子,从而极有可能使它的效果得到进一步的提升。

参 考 文 献

- [1] CHOU X C, MARIA G L, ROBERTO M. A Tabu Search algorithm for the Probabilistic Orienteering Problem[J]. Computers & Operations Research, 2021, 126: 105107.
- [2] TANSEL D, ENDER S. Memetic Teaching-Learning-Based Optimization algorithms for large graph coloring problems[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2021, 102.
- [3] FRED G. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence[J]. Pergamon, 1986, 13(5): 533-549.
- [4] HERTZ A, WERRA D. Using tabu search techniques for graph coloring[J]. Computing, 1987, 39(4): 345-351.
- [5] GALINIER P, HAO J K. Hybrid Evolutionary Algorithms for Graph Coloring [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 1999, 3(4): 379-397.
- [6] LÜ Z P, HAO J K. A memetic algorithm for graph coloring[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 203(1): 241-250.
- [7] MOALIC L, GONDRAN A. Variations on memetic algorithms for graph coloring problems[J]. Journal of Heuristics, 2018, 24(1): 1-24.
- [8] PREUX P, TALBI E G. Towards hybrid evolutionary algo-

(2) 复杂图

表 3 截取的是 Tabucol+在一部分复杂图上染色的实验结果。结果显示 Tabucol+较明显地区别于 Tabucol 的效果,在时间、迭代次数甚至颜色数等评价指标上会有较大的变化,这种变化大部分是积极的,很小部分是消极的变化。带来变化的条件有以下 3 个:1)复杂图的每一轮搜索中存在足够多的最高分染色动作;2)复杂图有较大的改进空间,因为它们通过传统 Tabucol 找到的最小颜色数与历史最优解差距较大;3)复杂图找到一次合法的解的迭代次数大都是百万次甚至千万次,因此在复杂图中引入的策略能更广泛地施加影响,引导发生更大的变化。

- ritms[J]. International Transactions in Operational Research, 1999, 6(6): 557-570.
- [9] LU Y L, BENLIC U, WU Q H. A highly effective hybrid evolutionary algorithm for the covering salesman problem[J]. Information Sciences, 2021, 564: 144-162.
- [10] GLOVER F, CAMPOS V, MARTÍ R. Tabu search tutorial. A Graph Drawing Application[J]. TOP, 2021: 319-350.
- [11] MOSTAFAIE T, MODARRES F, NAVIMIPOUR K N J. A systematic study on meta-heuristic approaches for solving the graph coloring problem [J]. Computers and Operations Research, 2020, 120: 104850.
- [12] CHALUPA D. On transitions in the behaviour of tabu search algorithm TabuCol for graph colouring[J]. Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence, 2017, 30(1): 53-69.
- [13] RAJA M, GOPALAKRISHNAN S. Solution to Graph Coloring Using Genetic and Tabu Search Procedures[J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2018, 43(2): 525-542.
- [14] <https://sites.google.com/site/graphcoloring/vertex-coloring>.
- [15] LAI X J, HAO J K, GLOVER F. A study of two evolutionary/tabu search approaches for the generalized max-mean dispersion problem[J]. Expert Systems With Applications, 2020, 139: 112856.



WANG Jian-chang, born in 1997, post-graduate. His main research interest is intelligent computing.



JIANG Hua, born in 1978, Ph. D, assistant professor, is a professional member of China Computer Federation. His main research interests include practical algorithm solving for combinatorial optimization problems, algorithms for social network analysis and graph theory.